I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Salah satu bahasan dalam ilmu matematika adalah limit fungsi. Dengan mengingat kembali konsep limit fungsi real $x = f(t)$ yang terdefinisi pada selang terbuka D yang memuat a kecuali mungkin di a sendiri, yaitu

$$\lim_{t \to a} f(t) = \mathrm{l} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \ni 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa situasi yang terjadi sebelum konsep limit fungsi real dirancang adalah bahwa nilai $f(t)$ dapat dibuat sebarang dekat ke l dengan cara mengambil nilai t yang cukup dekat ke a. Dengan kata lain, jarak $f(t)$ ke l dapat dibuat sebarang kecil dengan cara mengambil jarak t ke a cukup kecil. Bila ukuran jarak yang digunakan di sini adalah nilai mutlak, maka diperoleh rancangan konsep limit yang hasilnya seperti di atas.

Konsep limit fungsi real di atas sering dijumpai dalam pembahasan limit fungsi dan tidak asing lagi dalam bahasan limit fungsi.

Bagaimana jika limit fungsi itu sendiri di bawa ke dalam ruang vektor ?

Dalam bahasan ini akan difokuskan pada limit fungsi vektor tersebut.

Konsep limit fungsi vektor di R^n dirancang serupa dengan limit fungsi real. Di sini, yang digunakan adalah ukuran jarak dua vektor di R^n .

Jarak antara vektor di R^n,

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ dan\ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Ditulis nilai,$\|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|$ didefinisikan sebagai,

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Agar limit fungsi vektor $X = F(t)$ untuk t mendekati a dapat dibahas, di sekitar a harus terdapat tak terhingga banyaknya titik dari D_f; untuk itu, di ambil D_f selang terbuka D yang memuat a, kecuali di a itu sendiri. Jarak dua vektor yang digunakan adalah seperti yang didefinisikan di atas sedangkan untuk jarak t ke a di R dipergunakan nilai mutlak. Dari situasi ini diperoleh konsep limit fungsi vektor berikut.

Misalkan fungsi vektor $F(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \ldots + f_n(t)e_n$ terdefinisi pada selang terbuka di D yang memuat a, kecuali di a sendiri dan $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ vektor di R^n. Limit fungsi F jika t mendekati a sama dengan L, ditulis

$\lim\limits_{t \to a} F(t) = L$, jika $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \varepsilon$.

Adapun limit sepihak fungsi vektor didefinisikan sebagai berikut:

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < t - a < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \varepsilon$$

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < a - t < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \varepsilon$$

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan ini adalah

1. Mengkonstruksi konsep limit dan *derivatif* bernilai vektor,
2. Menjelaskan sifat – sifat dasar kedua konsep tersebut.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Menambah wawasan penulis tentang limit fungsi dalam vektor,
2. Dapat memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas wawasan di bidang analisis khususnya limit fungsi dalam vektor.