II. LANDASAN TEORI

2.1 Limit Fungsi

Definisi 2.1.1(Edwin J, 1987)

Misalkan I interval terbuka pada R dan $f: I \to R$ fungsi bernilai real. Secara matematis ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

untuk suatu $a \in I$, yaitu nilai $f(x)$ cukup dekat dengan L untuk semua nilai x yang cukup dekat dengan a, tetapi $x \neq a$.

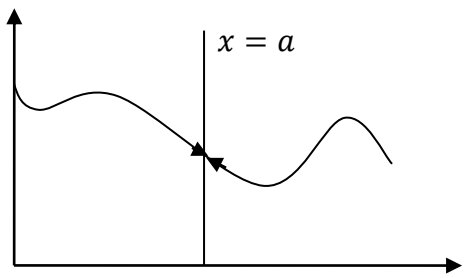
Secara matematis definisi di atas dapat ditulis,

$\forall \varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga

$|f(x) - l| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in I$ dan $0 < |x - a| < \delta$.

Nilai mutlak pada definisi tersebut di interpretasikan untuk mengukur jarak dua buah titik atau bilangan.

Y



Gambar 1. Fungsi satu peubah f yang mempunyai limit L di $x = a$

Limit Fungsi di Titik $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Definisi 2.1.2

Diketahui fungsi bernilai real f dengan daerah definisi himpunan buka D di R^2 dan (a, b) titik di D atau titik batas D.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk semua (x, y) di D dan memenuhi

$$0 < \big|\,|(x, y) - (a, b)|\,\big| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

berlaku,

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Syarat Limit Ada

Definisi 2.1.3

Sebuah $\lim_{x\to a} f(x)$ dikatakan ada jika limit kirinya sama dengan limit kanan, ditulis jika,

$\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ dan $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, maka

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

Teorema 2.1.4 (Teorema Apit)

Andaikan f, g, dan h adalah fungsi – fungsi yang memenuhi

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

untuk semua x mendekati a, kecuali di a itu sendiri. Jika,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$$

maka,

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

Definisi 2.1.5

Diketahui fungsi $f : D_f \subset R \to R,\ a \in D_f$ dan a titik limit himpunan D_f. f dikatakan kontinu di a jika beberapa selang terbuka di sekitar a terkandung dalam daerah asal f dan

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Definisi 2.1.6

Diketahui fungsi $f : D_f \subset R \to R,\ a \in D_f$ dan c titik limit himpunan D_f.

i. Fungsi f dikatakan kontinu kanan (*right continuous*) di a jika

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ii. Fungsi f dikatakan kontinu kiri (*left continuous*) di a jika

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Teorema 2.1.7(Edwin J, 1987)

Jika $\lim_{x \to a} g(x) = l$ dan jika f kontinu di l, maka,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$$

Khususnya jika g kontinu di a dan f kontinu di $g(a)$, maka fungsi komposit $f\ o\ g$ kontinu di a.

Bukti :

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu di l, maka terdapat $\delta_1 > 0$, sedemikian sehingga,

$$|t - l| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(l)| < \varepsilon$$

Jadi,

$$|g(x) - l| < \delta_1 \Rightarrow \left|f\big(g(x)\big) - f(l)\right| < \varepsilon$$

karena,

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, untuk suatu $\delta_1 > 0$ terdapat $\delta_2 > 0$

sedemikian sehingga

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \delta_1$$

Dengan menggabungkan kedua teori di atas diperoleh,

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$$

Teorema 2.1.8(Soeparno,2006)

Jika fungsi f dan g kontinu di suatu $a \in R$ dan $\alpha \in R$, maka fungsi $\alpha f, f + g$, dan fg juga kontinu di a. Selanjutnya, fungsi $\frac{f}{g}$ juga kontinu di a asalkan $g(a) \neq 0$.

Sifat Aljabar Limit Fungsi

- $\lim\limits_{x \to a} k = k$
- $\lim\limits_{x \to a} a = a$
- $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\quad , \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

- $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

2.2 Turunan Fungsi

Definisi 2.2.1(Stewart, 2002)

Turunan fungsi f adalah f'(dibaca "f aksen") yang nilainya sebarang pada bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada.

Teorema 2.2.2(Stewart, 2002)

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c), \quad x \neq c$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right] \\
&= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.\lim_{x \to c}(x - c) \\
&= f(c) + f'(c).0 \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.3(Soeparno,2006)

Diketahui dua fungsi $f, g : D \subset R \to R$, dan $c \in D$ sebagai titik limit himpunan D. Jika $f'(c)$ dan $g'(c)$ ada, maka

i. $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

ii. $(\alpha f)'(c) = \alpha . f'(c)$, untuk sebarang konstanta α

iii. $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

iv. $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$

Teorema 2.2.4

Diketahui fungsi $f: D_f \to R$, fungsi $g: D_g \to R$ dengan $R_f \subset D_g, a \in D_f$ sebagai titik limit himpunan D_f, dan $f(a)$ sebagai titik limit himpunan D_g. Jika $f'(a)$ dan $g'(a)$ ada, maka

$$(g\ o\ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$$

Bukti :

Karena $g'(f(a))$ dan $f'(a)$ ada, maka diperoleh

$$(g\ o\ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(g\ o\ f)(x) - (g\ o\ f)(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(a)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= g'\big(f(a)\big).f'(a)$$

Teorema 2.2.5

Jika fungsi $f: [a, b] \to R$ mempunyai titik di suatu titik $c \in (a, b)$ maka fungsi f kontinu di c.

Bukti :

Dengan menerapkan defenisi turunan $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ada. Oleh karena itu diperoleh :

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - f(c)\big) = \lim_{x \to c}\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c) = f'(c).0 = 0$$

yang berarti terbukti bahwa fungsi f kontinu di c.

Teorema 2.2.6

Diketahui fungsi $f: [a, b] \to R$ dan f terdiferensial di $x_0 \in (a, b)$.

i. Jika $f'(x_0) > 0$, maka fungsi f naik di x_0

ii. Jika $f'(x_0) < 0$, maka fungsi f turun di x_0

Bukti :

Fungsi f terdiferensial di x_0, maka bilangan $f'(x_0)$ ada, artinya untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

Untuk setiap $|h| < \delta$. Jadi diperoleh

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < f'(x_0) + \varepsilon$$

i. Jika $f'(x_0) > 0$ dipilih bilangan ε tersebut sehingga $f'(x_0) - \varepsilon > 0$. Oleh karena itu untuk $|h| < \delta$ berlaku,

$$0 < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Untuk $x" \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dan $x" > x_0$ diperoleh,

$0 < x" - x_0 = h < \delta$ dan $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ atau $f(x") > f(x_0)$.

Untuk $x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dan $x' < x_0$ diperoleh $h = x' - x_0 < 0$, $|h| < \delta$ dan $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ atau $f(x') < f(x_0)$.

Jadi terbukti bahwa jika $f'(x_0) > 0$ berakibat fungsi f naik di x_0.

2.3 **Ruang Vektor** (Maddox,1970)

Ruang vektor V adalah himpunan vektor tak kosong dimana dua operasi berlaku, penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Setiap dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dan kombinasi liniernya $\alpha\vec{a}$ dan $\vec{b}$, α dan β bilangan real merupakan anggota dari V, dan memenuhi sifat – sifat berikut :

- operasi penjumlahan :
    1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
    2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
    3. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$
    4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
- operasi perkalian :
    1. $c\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = c\vec{a} + c\vec{b}$
    2. $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$
    3. $c(k\vec{a}) = (ck)\vec{a}$
    4. $1\vec{a} = \vec{a}$

Kombinasi Linier

Suatu vektor $\vec{w}$ disebut kombinasi linier dari vektor – vektor $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \dots \dots, \overrightarrow{a_m}$ jika dapat dituliskan,

$$\vec{w} = c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c_m\overrightarrow{a_m}$$

dimana $c_1, c_2, c_{3,\ldots\ldots\ldots,} c_m$ adalah skalar.

***Span* (membangun) Ruang Vektor**

Himpunan vektor $= \{ \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, , , , , , , \overrightarrow{a_m} \}$ disebut membangun V jika setiap $\vec{v}$ anggota dari V dapat dinyatakan dalam kombinasi linier dari $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots \ldots \ldots \overrightarrow{a_m}$, yaitu

$$\vec{v} = c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots \ldots + c_m\overrightarrow{a_m}$$

Basis

Jika V adalah ruang vektor dan $S = \{ \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, , , , , , , \overrightarrow{a_m} \}$ adalah hmpunan vektor di V. S adalah basis dari V jika,

1. S bebas linier
2. S membangun V

Ruang vektor dapat mempunyai lebih dari satu basis.