II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Normal Umum

Menurut Herrhyanto dan Gantini (2009), peubah acak *X* dikatakan berdistribusi normal umum, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right];\ -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi normal umum adalah $N(x\colon \mu, \sigma^2)$, artinya peubah acak *X* berdistribusi normal umum dengan rataan μ dan varians σ^2.

Peubah acak *X* yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum dirumuskan sebagai berikut:

$E(x) = \mu$

$Var(x) = \sigma^2$

$M_x(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right); t\epsilon R$

2.2 Distribusi Log-Normal

Variabel dalam sebuah sistem kadang-kadang mengikuti sebuah hubungan eksponensial $x = exp(w)$

Jika exponent, *W*, adalah sebuah variable acak, maka $X = exp(W)$ adalah sebuah variabel acak. Sebuah kasus khusus penting terjadi ketika *W* mempunyai sebuah distribusi normal. Pada kasus tersebut, distribusi *X* disebut sebuah distribusi lognormal. Nama tersebut mengikuti transformasi ln (X) = W. Yaitu, logaritma natural dari X adalah terdistribusi normal.

Misalkan bahwa W adalah terdistribusi normal dengan rata-rata θ dan variansi σ^2; maka fungsi distribusi kumulatif untuk X adalah:

$$F(x) = P[X \leq x] = P[\exp(W) \leq x] = P[W \leq \ln(x)]$$
$$= P\left[Z \leq \frac{\ln(x) - \theta}{\sigma}\right] = \varphi\left[\frac{\ln(x) - \theta}{\sigma}\right]$$

Untuk $x > 0$ dan Z adalah variabel normal standar, sehingga tabel distribusi normal standar dapat digunakan untuk menghitung probabilitasnya.

$F(x) = 0$ untuk $x \leq 0$

Menurut Kundu dan Manglick (2004). Fungsi kepekatan peluang dari suatu peubah acak log-normal dengan parameter θ > 0 dan σ > 0, adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2 x}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(\ln x - \ln\theta)^2\right]$$

untuk $x > 0$

Distribusi log normal dengan parameter θ dan σ dapat dinotasikan juga sebagai berikut LN(θ, σ).

Dengan nilai mean dan variansi berturut-turut adalah:

$E(x) = e^{\ln\theta + \frac{\sigma^2}{2}}$

$V(x) = e^{2\ln\theta + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

2.3 Distribusi Weibull (β, λ)

Distribusi Weibull sering digunakan untuk memodelkan waktu kegagalan dari banyak sistem fisik. Parameter dalam distribusi memungkinkan fleksibilitas untuk memodelkan sistem dengan jumlah kegagalan bertambah terhadap waktu, berkurang terhadap waktu, atau tetap konstan terhadap waktu.

Menurut Kundu dan Manglick (2004). Fungsi kepekatan peluang dari suatu peubah acak Weibull (β, λ) dengan parameter β > 0 dan λ > 0, adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \beta\lambda^{\beta} x^{\beta-1} e^{-(x\lambda)^{\beta}}$$

untuk $x > 0$

Distribusi Weibull dengan parameter β dan λ dapat dinotasikan juga sebagai berikut WE(β, λ).

Dengan nilai Mean dan variansi berturut-turut adalah:

$$E(x) = \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\lambda^{-1}$$

$$V(x) = \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)\lambda^{-2} - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\lambda^{-1}\right]^2$$

2.4 Metode Kemungkinan Maksimum (*maximum lilelihood Estimation method*)

Metode kemungkinan maksimum adalah metode untuk menduga suatu sebaran dengan memilih dugaan-dugaan yang nilai-nilai parameternya diduga dengan memaksimumkan fungsi kemungkinannya.

Menurut Nar Nerrhyanto(2003), misalkan X adalah peubah acak kontinu atau diskrit dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$, dengan θ adalah satu sampel yang tidak diketahui. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan sampel acak berukuran n maka fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dari sampel acak itu adalah:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta)$$

Dalam hal ini, fungsi kemungkinan adalah fungsi dari parameter yang tidak diketahui θ. Biasanya untuk mempermudah penganalisaan, fungsi kemungkinan L(θ) diberi log natural (ln). penduga kemungkinan maksimum dari θ adalah nilai θ yang memaksimumkan fungsi kemungkinan $L(\theta)$.

2.5 Informasi Fisher

Menurut Hogg dan craig (1995), informasi fisher dinotasikan dengan I(θ), dimana :

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x;\theta)dx$$

Atau I(θ) juga dapat dihitung dengan:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\, f(x;\theta)dx$$

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang f(x;θ). Maka fungsi kemungkinan adalah:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta)$$

Dari hal tersebut fungsi kemungkinan diberi fungsi logaritma natural, sehingga:

$$\ln L(\theta) = \ln f(x_1;\theta) + \ln f(x_2;\theta) + \cdots + \ln f(x_2;\theta)$$

dan

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial\theta} + \cdots + \frac{\partial \ln f(x_n;\theta)}{\partial\theta}$$

dari hal tersebut, dapat didefinisikan informasi fisher dalam sampel acak sebagai:

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

2.6 Matriks Informasi Fisher

Pada kasus lain, jika θ merupakan suatu vektor dari parameter, maka I(θ) adalah Matriks Informasi.

Menurut Hogg dan craig (1995), misalkan sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x,\theta_1,\theta_2); (\theta_1,\theta_2) \in \Omega$, dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan dikatakan bahwa ruang dari X dimana $f(x,\theta_1,\theta_2) > 0$ yang tidak mengandung $\theta_1$dan θ_2.

Sehingga matriks informasi adalah sebagai berikut :

$$I_n = n\begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right\} \\ E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta_1,\theta_2}{\partial\theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

$$I_n = -n \begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial{\theta_1}^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1,\theta_2}{\partial{\theta_2}^2}\right] \end{bmatrix}$$

Menurut Elandt-Johnson(1971), misalkan terdapat s parameter,$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ atau, dalam bentuk vektor,$\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ dan terdapat logaritma fungsi kemungkinan maka informasi yang diperoleh dari sampel tentang $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ dapat ditulis dalam bentuk matriks informasi s x s, $I(\theta)$, dimana elemennya didefinisikan sebagai berikut:

$I_{ij}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = I_{ij}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)$, dimana i,j = 1,2,…,s

Dan untuk i=j adalah sebagai berikut:

$$I_{ii}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = I_{ii}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial{\theta_i}^2}\right)$$

Sehingga bentuk matrik informasi tersebut adalah:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} I_{11}(\theta) & \cdots & I_{1s}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{s1}(\theta) & \cdots & I_{ss}(\theta) \end{bmatrix}$$

2.7 Pertidaksamaan *Cramer-Rao Bound* (CRB) atau *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Definisi 2.11:

Misalkan Y merupakan penduga tak bias dari suaru parameter θ dalam kasus penduga titik. Status y disebut penduga efisien dari θ jika dan hanya jika ragam dari Y mencapai batas bawah *Cramer-Rao* (Hogg dan Craig, 1995).

Menurut Elandt-Johnson (1971), pertidaksamaan *Cramer-Rao Bound* (CRB) dapat ditulis sebagai berikut :

$$Var(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{nE\left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial\theta^2}\right)} = -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right)}$$

atau

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

karena

$$-nE\left(\frac{\partial^2 \ln p}{\partial\theta^2}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right) = nE\left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)^2\right] = I(\theta)$$

Maka :

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

Dimana $\frac{1}{I(\theta)}$ disebut sebagai *Lower Bound of the Variance* dari penduga θ.

2.8 Kelas Eksponensial dan Fungsi Kepekatan Peluang

Menurut Hogg dan Craig (1995), mengingat suatu keluarga $\{f(x;\theta): \theta \in \Omega\}$ dari fungsi kepekatan peluang, dimana Ω merupakan himpunan interval Ω = $\{\theta : \gamma < \theta < \delta\}$, dimana γ dan δ merupakan konstanta yang diketahui, dan dimana ;

$$f(x;\theta) = \begin{cases} exp[p(\theta)K(x) + S(x) + q(\theta)] & , a < x < b \\ 0 & , lainnya \end{cases}$$

Suatu fungsi kepekatan dari bentuk fungsi tersebut diatakan sebagai anggota dari kelas eksponensial yang kontinu apabila:

1. a dan b tidak tergantung pada θ, γ < θ < δ
2. p(θ) merupakan fungsi kontinu yang non trivial dari θ,γ < θ < δ
3. setiap K'(x) ≠ 0 dan S(x) adalah fungsi kontinu dari x, a < x < b

jika ketiga syarat dipenuhi maka f(x;θ) dikatakan sebagai *regular case* dari kelas eksponensial.

2.9 Teorema Nilai Tengah

Teorema:

Misalkan f merupakan fungsi dengan mengikuti hipotesis berikut ini:

1. f kontinu dalam interval tertutup [a,b]
2. f terdeferensiasi dalam interval terbuka (a,b)

maka terdapat bilangan c dalam (a,b), sedemikian sehingga:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ } atau \text{ } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

(Stewart, 1994).

2.10 Teorema Limit Pusat

Teorema:

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinotasikan sebagai observasi sampel acak dari suatu sebaran yang mempunyai mean µ dan ragam positif σ^2, maka peubah acak

$$Y_n = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)}{\sigma}$$

Mempunyai pendekatan sebaran normal dengan mean 0 dan ragam 1 (Hogg dan Craig,1995).

2.11 Asimtotik Normalitas dari Penduga Kemungkinan Maksimum

Penduga kemungkinan maksimum (*Maximum Likelihood Estimator*) merupakan penduga yang lebih atraktif karena jumlah sampelnya yang besar atau sifat keasimtotikannya.

Penduga kemungkinan maksimum (*Maximum Likelihood Estimator*) memiliki salah satu sifat asimtotik yaitu:

Asimtotik normalitas (*asymptotic normality*):

$$\theta_{ML} \sim N[\theta, \{I(\theta)\}^{-1}]$$

Dimana I(θ) merupakan informasi fisher:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'}\right]$$

Asimtotik Normalitas juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \{I(\theta)\}^{-1})$$ (Greene, 2000).

2.12 Rasio kemungkinan maksimum

Misalkan $X_1, X_2, .., X_n$ melambangkan *n* peubah acak independen yang memiliki masing-masing fungsi kepekatan peluang $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m), i = 1,2, .., n$. Deret yang terdiri dari semuat titik parameter $(\theta_1, \theta_2, .., \theta_m)$dinotasikan *Ω*, yang kita sebut ruang parameter. Misalkan *ω* menjadi sebuah himpunan bagian dari ruang parameter *Ω*.

Kita inginkan hipotesis $H_0: (\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \in \omega$ jika bukan maka merupakan semua hipotesis alternatif.

Definisi fungsi kemungkinan:

$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i\,(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m),\qquad (\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \in \omega$

dan

$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f_i\,(x_i; \theta_1, \theta_2, .., \theta_m),\qquad (\theta_1, \theta_2, .., \theta_m) \in \Omega$

Misalkan $L(\widehat{\omega})$dan $L(\widehat{\Omega})$maksimum, yang kita asumsikan ada, dari dua fungsi kemungkinan. Rasio dari $L(\widehat{\omega})$dan $L(\widehat{\Omega})$ disebut rasio kemungkinan (*likelihood ratio*) dan dinotasikan oleh

$$L(x_1, x_2, .., x_n) = L = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}$$

(Hogg dan Craig,1978)

2.13 Statistik T

Menurut Kundu dan Manglick (2004), Statistik T merupakan logaritma natural dari rasio kemungkinan maksimum dan dinotasikan oleh

$$T = \ln L(x_1, x_2, .., x_n) = \ln\left(\frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})}\right)$$

Statistik T memiliki karakteristik yaitu jika $T > 0$ maka data akan mengikuti distribusi pembilang, untuk statistik T lainnya sata akan mengikuti distribusi penyebut.