II. LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang konsep dasar teori graf dalam bentuk definisi yang berhubungan dengan masalah 1-*fault-tolerant Hamiltonian* pada graf *generalized* Petersen.

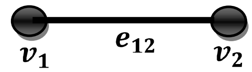
Berikut ini beberapa definisi yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Graf

Graf G = (V,E) terdiri dari $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut *vertex* (titik) yang tidak kosong, dan $E = \{e_{ij};$ i, j $\in V\}$ yang unsur-unsurnya disebut *edge* (garis) yang boleh kosong, sehingga setiap edge e_{ij} diidentifikasi dengan pasangan (v_i,v_j) dari *vertex*. *Vertex* v_i, v_j berhubungan dengan *edge* e_{ij} disebut *vertex* akhir dari e_{ij}. Representasi paling umum dari graf adalah dengan cara diagram, dimana *vertex* direpresentasikan sebagai titik dan setiap *edge* sebagai garis yang menghubungkan *vertex* (Deo, 1989).

2. Tetangga (*Adjacent*) dan Terhubung (*Incidence*)

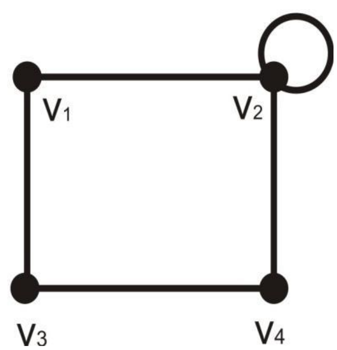
Jika $e = \{u,v\}$ adalah suatu garis yang menghubungkan titik u dan v pada graf G, maka titik u dikatakan tetangga (*adjacent*) terhadap titik v dan garis e_{uv} dikatakan terhubung (*incidence*) pada u dan v (Lipschutz and Lipson, 2002).



Gambar 1. Graf dengan garis e_{12} *incidence* pada titik v_1 dan v_2, serta titik v_1 dan v_2 *adjacent*

3. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu titik pada graf G adalah jumlah garis yang terhubung (*incidence*) pada v, dengan kata lain jumlah garis yang memuat v sebagai titik ujung. Titik yang memuat *loop* memiliki 2 *degree* karena kedua titik ujung garis berada di satu titik . Derajat suatu graf ditulis deg (v) (Lipschutz and Lipson, 2002).



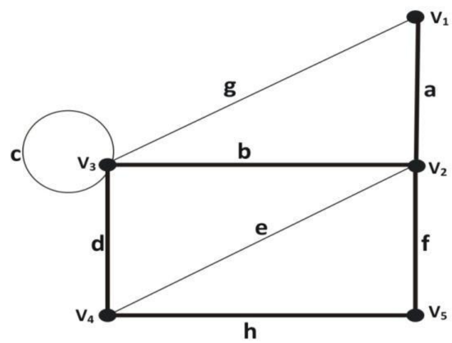
Gambar 2. Graf dengan deg (v_1) = 2, deg (v_2) = 4, deg (v_3) = 3, deg (v_4) = 3

4. Eulerian

Eulerian merupakan graf yang mempunyai derajat genap untuk*vertex* dan setiap *edge*nya dilewati tepat satu kali (Deo, 1989).

5. Walk

Walk adalah barisan berhingga dari titik (*vertex*) dan garis (*edge*), dimulai dan diakhiri dengan *vertex*, sedemikian sehingga setiap *edge* menempel dengan *vertex* sebelum dan sesudahnya. Tidak ada *edge* yang muncul lebih dari sekali dalam suatu *walk* (Deo, 1989).



Gambar 3. Contoh *walk* pada suatu graf

Garis yang tebal pada Gambar 3 merupakan salah satu *walk* yaitu $v_1\ a\ v_2\ b\ v_3\ d\ v_4\ h\ v_5\ f\ v_2$.

6. Lintasan (*Path*)

Lintasan merupakan walk yang semua *vertex*nya berbeda (Wibisono, 2008).

Pada gambar 3 salah satu lintasannya adalah v_1, v_2, v_3, v_4

7. Terhubung (*Connected*)

Graf tak-berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untukpasang simpul *u* dan *v* di dalam himpunan V terdapat lintasan dari *u* ke *v* (yang juga harus berarti ada lintasan dari *u* ke *v*) (Munir, 2010).

8. Graf tak-berarah (*Undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.

Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama (Munir, 2010).

9. Graf berarah (*Directed graph atau Digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut graf berarah (Munir, 2010).

10 . Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama (Munir, 2010).

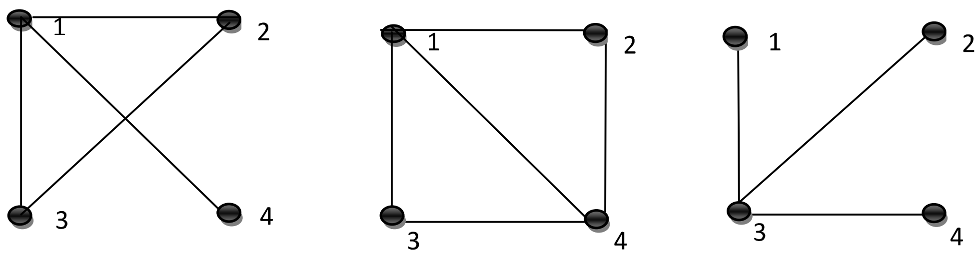
11. Hamiltonian

Hamiltonian adalah graf yang semua titik-titiknya dapat dilalui masing-masing sekali dan mempunyai lintasan tertutup, artinya titik awal sama dengan titik akhir (Wibisono, 2008).

12. Lintasan dan Sirkuit Hamiltonian

Lintasan Hamiltonian ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan itu kembali ke simpul asal membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan sirkuit Hamiltonian. Dengan kata lain, sirkuit Hamiltonian adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graf yang memiliki sirkuit Hamiltonian dinamakan graf Hamiltonian, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamiltonian disebut graf semi Hamiltonian (Munir, 2010).



(a) **(b)** **(c)**

Gambar 4. Lintasan dan sirkuit Hamiltonian

(a) Graf yang memiliki lintasan Hamiltonian (misal: 3, 2, 1, 4)

(b) Graf yang memiliki sirkuit Hamiltonian (1, 2, 4, 3, 1)

(c) Graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamiltonian

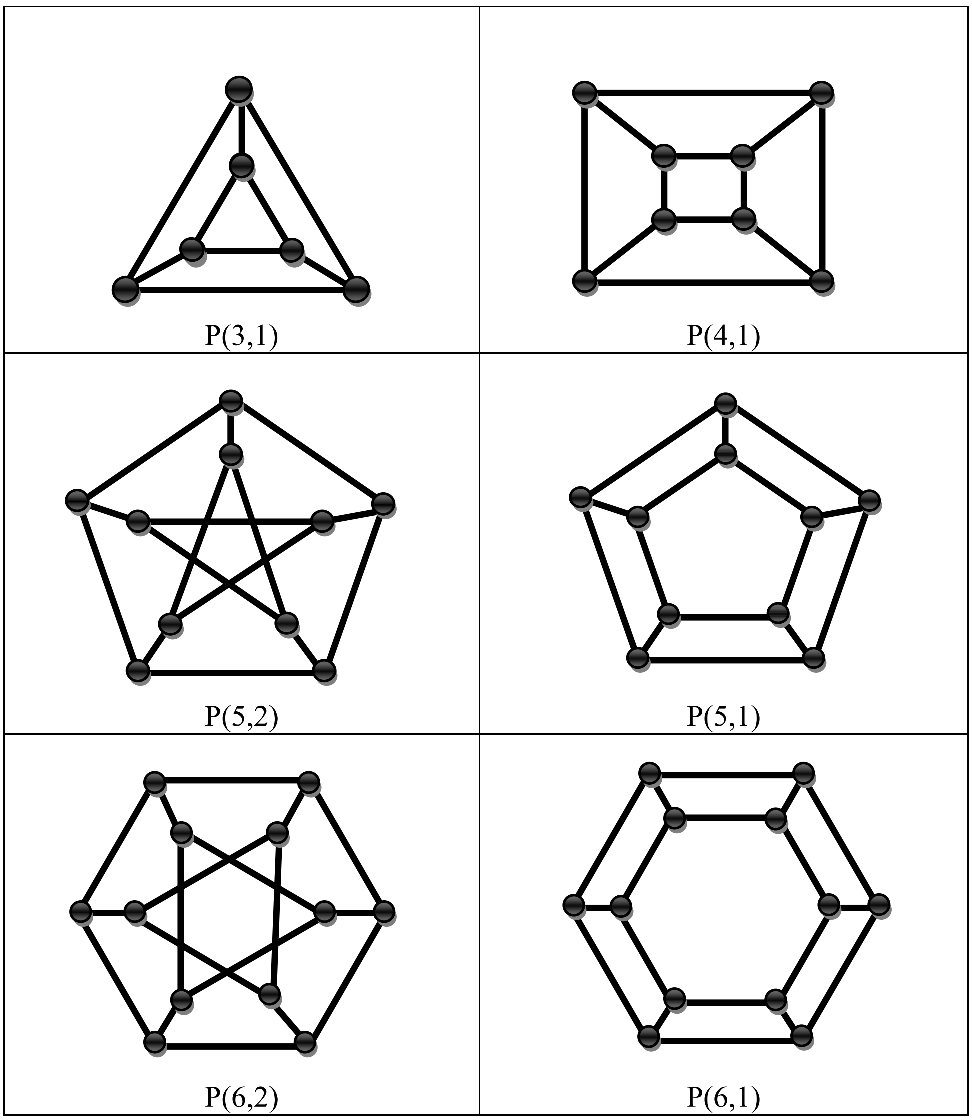
13. Graf Berlabel

Suatu graf G dikatakan berlabel jika *edge* dan atau *vertex-vertex*nya diberikan data (Lipschutz and Lipson, 2002).

14. Graf *Generalized* Petersen P(n, k)

Diasumsikan bahwa n dan k adalah bilangan bulat positif dengan n $\geq$ 2k+1. Dinotasikan + adalah penjumlahan pada modulo bilangan bulat n, Z_n. Graf *generalized* Petersen P(n, k) adalah graf dengan himpunan *vertex* $\{i|0 \leq i \leq n-1\} \cup \{i^{'}|0 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan *edge* $\{(i, i+1)|0 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, i^{'})|0 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i^{'}, (i+k)^{'})|0 \leq i \leq n-1\}$ (Hsu and Lin, 2009).

Graf *generalized* Petersen P(n,k) adalah graf yang setiap titiknya berderajat tiga, memiliki 2n titik dan 3n garis. Graf ini terdiri dari graf poligon bintang (graf sirkuit{k}) di dalam dan poligon beraturan (graf siklus) di luar dengan simpul terkait (terhubung). Poligon luar dan poligon dalam terhubung oleh *edge*. (Anonim, 2012).



Gambar 5. Contoh bentuk graf *generalized* Petersen

15. 1-*Fault-Tolerant Hamiltonian Graphs*

Suatu graf $G = (V, E)$ adalah 1-*edge- fault-tolerant Hamiltonian* jika $G/\{e\}$ adalah Hamiltonian untuk $e \in E$ dan suatu graf $G = (V, E)$ adalah 1-*vertex fault-tolerant Hamiltonian* jika $G/\{v\}$ adalah Hamiltonian untuk $v \in V$. Setiap graf 1-*edge-fault-tolerant Hamiltonian* adalah Hamiltonian. Suatu graf $G = (V,E)$ adalah 1-*fault-tolerant Hamiltonian* jika $G/\{f\}$ adalah Hamiltonian untuk $f \in E \cup V$ (Teng, *et al*, 2005).

16. Diagram *Lattice* D(n,k)

Diagram *lattice* D(n,k) untuk Hamiltonian pada graf generalized Petersen P(n,k) adalah suatu graf label pada bidang (x,y) yang memiliki lintasan Eulerian terbuka ataupun tertutup. Pola *lattice* suatu graf *lattice* L terdiri dari titik *lattice* pada bidang (x,y). Dua titik *lattice* (a_1,b_1) dan (a_2,b_2) pada L *adjacent* jika dan hanya jika $|a_1-a_2| + |b_1-b_2| = 1$. Misalkan n dan k adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2k+1$, suatu label graf *lattice* pada graf generalized Petersen P(n,k) dilambangkan L(n,k) adalah graf *lattice* L dengan titik *lattice* (a,b). Suatu label dari bilangan bulat positif dari $0 \leq i \leq n-1$ pada titik *lattice* (a+1,b) menyatakan label untuk *vertex* i+1 dan titik *lattice* (a,b-1) menyatakan label untuk *vertex* i+k .

Hubungan antara lintasan Eulerian pada diagram *lattice* D(n, k) dengan sirkuit Hamiltonian pada graf *generalized* Petersen P(n,k) dapat ditunjukkan pada *edge* di bawah ini:

1. *Edge* horizontal (*i, i+1*) pada L(n,k) diartikan sebagai *edge* (*i, i+1*) pada graf *generalized* Petersen P(n,k)

2. *Edge* vertikal (*i, i+k*) pada L(n,k) diartikan sebagai *edge* (*i', (i+k)'*) pada graf *generalized* Petersen P(n,k)
3. Dua e*dge* yang berbeda arah menempel (*incidence*) dengan *vertex i* yang berderajat dua pada L(n,k) diartikan sebagai *edge* (*i, i'*) pada graf *generalized* Petersen P(n, k) (Teng, *et al*, 2005).