I. PENDAHULUAN

1.1. **Latar Belakang**

Matematika sebagai ilmu dasar, dewasa ini sangat dirasakan interaksinya dengan bidang ilmu yang lain. Sejak Sekolah Dasar (SD) hingga bangku Sekolah Menengah Atas (SMA), kita selalu mempelajari matematika. Bukan hanya di bangku sekolah saja selalu dijumpai matematika, namun ketika ada tes masuk perguruan tinggi, SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri), ilmu matematika yang sudah didapat selama dua belas tahun pun patut untuk diujikan. Bahkan, seleksi penerimaan calon pegawai negeri sipil (CPNS) pun, terdapat soal-soal matematika. Hal ini menunjukkan matematika sebagai *Queen of Science* menjadi salah satu aspek penilaian tingkat intelijensi seseorang.

Sejak tahun 2009, terdapat materi baru untuk seleksi masuk perguruan tinggi negeri, yaitu TPA (Tes Potensi Akademik). Salah satu jenis soal pada TPA adalah tes angka. Tes angka bertujuan untuk mengukur kemampuan angka dalam kaitannya dengan kemampuan berpikir secara terstruktur dan logis matematis (Tim Grad, 2010). Pada tes angka ini, sering dijumpai soal-soal yang erat kaitannya dengan pola bilangan, barisan dan deret.

Misalnya, dalam suatu soal terdapat seri angka 1 3 6 10 15, berapakah angka selanjutnya? Bagi seseorang yang memiliki *number sense* yang baik, tidak sulit untuk melengkapi barisan bilangan tersebut.

Ada macam-macam barisan, antara lain barisan Aritmetika, Geometri, dan barisan polinomial. Juga dikenal barisan Fibonacci dan Lucas.

Fibonacci adalah seorang matematikawan asal Italia yang hidup pada abad 12. Latar belakang munculnya barisan Fibonacci adalah untuk menggambarkan pertumbuhan sepasang kelinci selama setahun. Misalkan pertumbuhan jumlah kelinci mengikuti keadaan sebagai berikut: Sepasang kelinci (satu betina dan satu jantan) menjadi dewasa dalam waktu dua bulan, dan setiap bulan berikutnya berturut-turut melahirkan sepasang anak kelinci, jantan dan betina. Bila tidak ada kelinci yang mati, bagaimanakah perkembangan jumlah pasangan kelinci itu pada setiap awal bulan?

Pada bulan pertama dan kedua terdapat satu pasang kelinci. Pada bulan ketiga bertambah satu menjadi tiga pasang kelinci. Pada bulan keempat, dua pasang kelinci melahirkan sehingga menjadi lima pasang kelinci, dan seterusnya. Banyaknya pasangan kelinci setiap awal bulan berturut-turut terlihat pada barisan di bawah ini :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. ...

Barisan di atas disebut barisan Fibonacci.

Fibonacci sendiri tidak banyak menyelidiki lebih lanjut mengenai masalah yang ia kemukakan tersebut. Ia pun tidak memberikan nama barisannya sebagai barisan Fibonacci. Nama barisan Fibonacci baru muncul pada abad ke-19 yang diperkenalkan oleh matematikawan asal Perancis yang bernama Lucas. Lucas mengembangkan suatu barisan yang mempunyai sifat seperti barisan Fibonacci yang kemudian disebut barisan Lucas, yaitu sebagai berikut :

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

Sifat dasar barisan Lucas sama dengan barisan Fibonacci, yaitu dimulai dari suku ketiga, setiap suku di setiap barisan tersebut didapat dengan menjumlahkan tepat dua suku sebelumnya.

1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menyelidiki apakah terdapat hubungan (relasi) antara barisan Fibonacci dan Lucas.
2. Mengidentifikasi identitas barisan Fibonacci dan Lucas.
3. Menemukan dan meneliti aplikasi dari barisan Fibonacci atau Lucas.

1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bertambahnya pengetahuan tentang konsep barisan khususnya barisan Fibonacci dan Lucas.
2. Bertambahnya informasi tentang hubungan (relasi) antara barisan Fibonacci dan Lucas.
3. Untuk menambah referensi terkait identitas barisan Fibonacci dan Lucas.
4. Agar pembaca dapat mengkaji lebih jauh permasalahan yang berhubungan dengan barisan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan didiskusikan definisi – definisi, istilah – istilah, dan teorema - teorema yang berhubungan dengan penelitian ini.

2.1. Barisan Tak Hingga (Gunawan, 2011)

Barisan tak hingga adalah suatu fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan bulat positif dan daerah kawannya himpunan bilangan real.

Notasi untuk barisan a_n adalah a_1, a_2, a_3, . . . , atau $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau {an}. Barisan dapat dinyatakan dalam formula eksplisit (contoh, $a_n = 2n + 1\,; n > 1$) atau formula rekursif (contoh, $a_n = a_{n-1} + 2\,; n > 1$).

2.1.1. Definisi (Leithold, 1991)

Barisan $\{a_n\}$ mempunyai limit L apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan *N>0* sehingga untuk *n* bilangan bulat positif berlaku :

$$\text{jika } n > N \text{ maka } |a_n - L| < \varepsilon$$

dan dituliskan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

2.1.2. Definisi (Leithold, 1991)

Bila barisan $\{a_n\}$ mempunyai suatu limit, dikatakan bahwa barisan *konvergen* dan a_n *konvergen* ke limit tersebut. Bila barisan tidak konvergen, barisan disebut *divergen.*

2.1.3. Teorema (Leithold, 1991)

Bila $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dua barisan yang konvergen dan *c* suatu konstanta maka :

(i) Barisan konstanta $\{c\}$ mempunyai limit c

(ii) $\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

(iv) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

(v) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ jika $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ dan semua $b_n \neq 0$

2.1.4. Definisi (Leithold, 1991)

Barisan {an} dikatakan :

(i) naik apabila $a_n \leq a_{n+1}$ untuk semua nilai n

(ii) turun apabila $a_n \geq a_{n+1}$ untuk semua nilai n

Jika $a_n < a_{n+1}$ (kasus khusus dari $a_n \leq a_{n+1}$) maka barisan adalah naik murni dan jika $a_n > a_{n+1}$ barisan adalah turun murni.

2.1.5. Definisi (Leithold, 1991)

Bilangan C disebut batas bawah barisan $\{a_n\}$ apabila $C \leq a_n$ untuk semua bilangan bulat positif n dan bilangan D disebut batas atas barisan $\{a_n\}$ apabila $D \geq a_n$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Ilustrasi 1 : Bilangan nol adalah batas bawah barisan $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ yang elemen-elemennya adalah :

$$\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\ldots,\frac{n}{2n+1},\ldots$$

Batas bawah lainnya untuk barisan di atas adalah $\frac{1}{3}$. Setiap bilangan yang lebih kecil atau sama dengan $\frac{1}{3}$ merupakan batas bawah barisan ini.

Ilustrasi 2 :Untuk barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ yang elemen-elemennya adalah :

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

Bilangan 1 merupakan batas atas, 26 juga batas atas. Setiap bilangan yang lebih besar atau sama dengan 1 merupakan batas atas barisan ini dan setiap bilangan yang bukan positif merupakan batas bawah.

Dari ilustrasi 1 dan 2 dapat dilihat bahwa suatu barisan dapat mempunyai banyak batas atas dan batas bawah.

2.1.6. Definisi (Leithold, 1991)

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika barisan tersebut mempunyai batas atas dan batas bawah.

Karena barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ mempunyai batas atas dan batas bawah maka barisan tersebut terbatas (Leithold, 1991).

2.1.7. Aksioma Kelengkapan (Leithold, 1991)

Setiap himpunan bilangan real, yang tak kosong, yang mempunyai batas bawah, mempunyai batas bawah terbesar. Juga setiap himpunan bilangan real, yang tak kosong, yang mempunyai batas atas, mempunyai batas atas terkecil.

2.1.8. Teorema (Leithold, 1991)

Suatu barisan yang monoton terbatas adalah konvergen.

Bukti :

Dibuktikan teorema untuk kasus barisan monoton naik. Misalkan barisan tersebut adalah $\{a_n\}$. Karena $\{a_n\}$ terbatas maka terdapat suatu batas atas untuk barisan tersebut. Berdasarkan aksioma kelengkapan (2.1.7), barisan $\{a_n\}$ mempunyai batas atas terkecil yang kita sebut B. Maka, untuk suatu ε bilangan positif, $B - \varepsilon$ tidak dapat menjadi batas atas karena $B - \varepsilon < B$ dan B adalah batas atas terkecil untuk barisan. Jadi, untuk suatu bilangan positif N,

$$B - \varepsilon < a_N \tag{1}$$

Karena B adalah batas atas terkecil untuk barisan$\{a_n\}$ maka menurut Definisi 2.1.5.

$$a_n \leq B \tag{2}$$

untuk setiap bilangan positif n. Karena$\{a_n\}$ monoton naik, dan dari Definisi 2.1.4. (i) diperoleh :

$a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap bilangan bulat positif n

sehingga

$$\text{jika } n \geq N \text{ maka } a_N \leq a_n \qquad (3)$$

Dari (1), (2), (3) diperoleh :

Jika $n \geq N$ maka $B - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq B < B + \varepsilon$

Dari ketaksamaan ini didapat

$$\text{jika } n \geq N \text{ maka } B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ jika } n \geq N \text{ maka } -\varepsilon < a_n - B < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ jika } n \geq N \text{ maka } |a_n - B| < \varepsilon \qquad (4)$$

Tetapi menurut Definisi 2.1.1. (d)adalah syarat agar $\lim_{n\to\infty} a_n = B$. Jadi barisan $\{a_n\}$ adalah konvergen.

2.2. Macam – Macam Barisan

2.2.1. Barisan Aritmetika (Anonim, 2011)

Barisan aritmetika adalah suatu barisan yang mempunyai pola keberaturan selisih dua suku berurutan tetap harganya. Harga yang tetap ini dinamakan beda. Setiap unsur bilangan dalam susunan bilangan tersebut disebut *suku barisan*. Secara umum, barisan bilangan dapat ditulis sebagai berikut.

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$

dengan:

U_1 merupakan suku ke-1

U_2 merupakan suku ke-2

U_3 merupakan suku ke-3

U_{n-1} merupakan suku ke-(n–1)

U_n merupakan suku ke-n

Selisih antara dua suku yang berurutan pada barisan bilangan dinamakan *beda* dan dinotasikan dengan b.

$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = ... = U_n - U_{n-1}$

Suatu barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b adalah $a, a + b,$ $a + 2b, a + 3b$, dan seterusnya.

Dengan memperhatikan pola keberaturan empat suku pertama,

Suku pertama $= u_1 = a = a + (1 - 1)b$

Suku kedua $= u_2 = a + b = a + (2 - 1)b$

Suku ketiga $= u_3 = a + 2b = a + (3 - 1)b$

Suku keempat $= u_4 = a + 3b = a + (4 - 1)b$

……………………………………………………..

Maka suku ke-n suatu barisan aritmetika adalah

$$\boldsymbol{u_n = a + (n - 1)b}$$

2.2.2. Barisan Geometri (Anonim, 2011)

Barisan geometri adalah suatu barisan yang mempunyai pola keberaturan hasil bagi dua suku berurutan tetap harganya. Harga yang tetap ini dinamakan rasio. Suatu barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah a, ar, ar^2, ar^3 , dan seterusnya.

Dengan memperhatikan pola keberaturan empat suku pertamanya.

Suku pertama $= u_1 = a = ar^0 = ar^{1-1}$

Suku kedua $= u_2 = ar = ar^{2-1}$

Suku ketiga $= u_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

Suku keempat $= u_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

………………………………………..

maka suku ke$-n$ suatu barisan geometri adalah

$$\boldsymbol{u_n = ar^{n-1}}$$

2.2.3. Barisan Polinom (Anonim, 2011)

Barisan polinom adalah barisan bilangan yang dibentuk dari fungsi polinom variabel tunggal dengan domain fungsi bilangan asli.

Beberapa peristiwa dapat memberikan data yang menggambarkan keberadaan barisan ini, misalnya data banyaknya jabat tangan yang terjadi pada sekelompok orang. Jumlah orang dalam kelompok sebagai urutan suku dan jumlah jabat tangan dari mereka adalah nilai sukunya sehingga, dapat dinyatakan dalam bentuk

- Jika ada 1 orang dalam kelompok maka tidak ada jabatan tangan
- Jika ada 2 orang dalam kelompok maka hanya ada 1 jabatan tangan
- Jika ada 3 orang dalam kelompok maka ada 3 jabatan tangan
- Jika ada 4 orang dalam kelompok maka ada 6 jabatan tangan
- dan seterusnya

Rangkaian bilangan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk barisan $0,1,3,6, \dots$. Tentu akan menyulitkan kita jika ingin melihat jumlah jabatan tangan yang terjadi pada kelompok yang anggotanya 100 orang. Untuk itu, seringkali kita mencari bentuk umum dari persamaan barisan tersebut, dan benar bahwa pada barisan tersebut apabila jumlah n orang dalam kelompok secara unum terdapat $\frac{n^2-n}{2}$ atau $U_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ jabatan tangan yang menunjukkan barisan tersebut berupa barisan polinom.

Jika $\boldsymbol{f}$ sebuah fungsi polinom variabel tunggal maka barisan polinom yang dibangun dari fungsi $\boldsymbol{f}$ tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$f(1), f(2), f(3) \dots, f(n-1), f(n), \dots$$

mempunyai arti :

suku ke – 1 : $U_1 = f(1)$

suku ke – 2 : $U_2 = f(2)$

suku ke – 3 : $U_n = f(3)$

....

suku ke – n : $U_n = f(n)$

Derajat polinom adalah pangkat tertinggi dari variabel fungsi polinom.

Untuk **i**, $\mathbf{a_i}$ berupa bilangan bulat positif :

$$\boldsymbol{f(n) = a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 = \sum_{k=0}^{i} a_k n^k}$$

Maka fungsi *f(n)* mempunyai derajat *i* pada suku polinom $a_i n^i$

2.2.4. Barisan Fibonacci dan Lucas (Weisstein,2012)

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \,;\, \boldsymbol{n} > 1 \qquad (2.2.4.1)$$

dengan, $F_0 = 0$

$F_1 = 1$

F_n = suku ke – n dari barisan Fibonacci

Tabel 2.1. Daftar 20 suku pertama barisan Fibonacci

f_n	N	f_n	N
1	1	89	11
1	2	144	12
2	3	233	13
3	4	377	14
5	5	610	15
8	6	987	16
13	7	1597	17
21	8	2584	18
34	9	4181	19
55	10	6765	20

Barisan Lucas didefinisikan sebagai berikut :

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \,; n > 1 \tag{2.2.4.2}$$

dengan,

$L_0 = 2$

$L_1 = 1$

L_n = suku ke – n dari barisan Lucas

Tabel 2.2. Barisan Lucas.

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	...
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	...

2.3. Formula Binet (Krismanto, 2011)

Untuk menentukan bentuk umum barisan Fibonacci dapat menggunakan formula Binet. Perbandingan dari barisan Fibonacci yang berurutan $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ mendekati bilangan Phi (φ) yang disebut juga sebagai *golden number/ratio*.

Diasumsikan bahwa F_n merupakan suatu fungsi variabel misalnya x yang berderajat n, sehingga

$$F_n = Cx^n \tag{2.3.1}$$

Dari Persamaan (2.2.4.1) dan (2.3.1) diperoleh hubungan :

$$Cx^n = Cx^{n-1} + Cx^{n-2} \qquad (2,3,2)$$

Bagi kedua ruas dengan Cx^{n-2}, sehingga :

$$x^2 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

dan didapat :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Bentuk umum suku ke-n barisan Fibonacci dapat diubah menjadi :

$$F_n = A{x_1}^n + B{x_2}^n$$

atau

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (2.3.2)$$

dengan : A dan B konstanta bukan nol

$F_0 = 0$

$F_1 = 1$

$F_0 \rightarrow A + B = 0$

$$B = -A \qquad (2.3.3)$$

$$F_1 \rightarrow A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (2.3.4)$$

$$\Leftrightarrow A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 2 \qquad (2.3.5)$$

Substitusikan (2.3.3) ke (2.3.5) sehingga menjadi :

$\Leftrightarrow A(1+\sqrt{5}) - A(1-\sqrt{5}) = 2$

$\Leftrightarrow A + A\sqrt{5} - A + A\sqrt{5} = 2$

$\Leftrightarrow \quad 2A\sqrt{5} = 2$

$\Leftrightarrow \quad A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \quad B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Didapat bentuk umum barisan Fibonacci yaitu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (2.3.6)$$

atau,

$$\boldsymbol{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (2.3.7)}$$

Hal yang sama juga dapat dilakukan pada barisan Lucas.

Dasar (2.2.4.2) dan (2.3.2) diperoleh :

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (2.3.8)$$

dengan : A dan B konstanta bukan nol

$L_0 = 2$

$L_1 = 1$

$L_0 \rightarrow A + B = 2$

$$B = 2 - A \qquad (2.3.9)$$

$$L_1 \rightarrow A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (2.3.10)$$

$$\Leftrightarrow A\left(1+\sqrt{5}\right) + B\left(1-\sqrt{5}\right) = 2 \qquad (2.3.11)$$

Substitusikan (2.3.9) ke (2.3.11) sehingga menjadi :

$\Leftrightarrow A\left(1+\sqrt{5}\right) + (2 - A)\left(1-\sqrt{5}\right) = 2$

$\Leftrightarrow A + A\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} - A + A\sqrt{5} = 2$

$\Leftrightarrow \quad 2A\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \quad A = 1$

$\Leftrightarrow \quad B = 1$

Didapat bentuk umum barisan Lucas yaitu

$$\boldsymbol{L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \qquad (\mathbf{2.3.12})$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

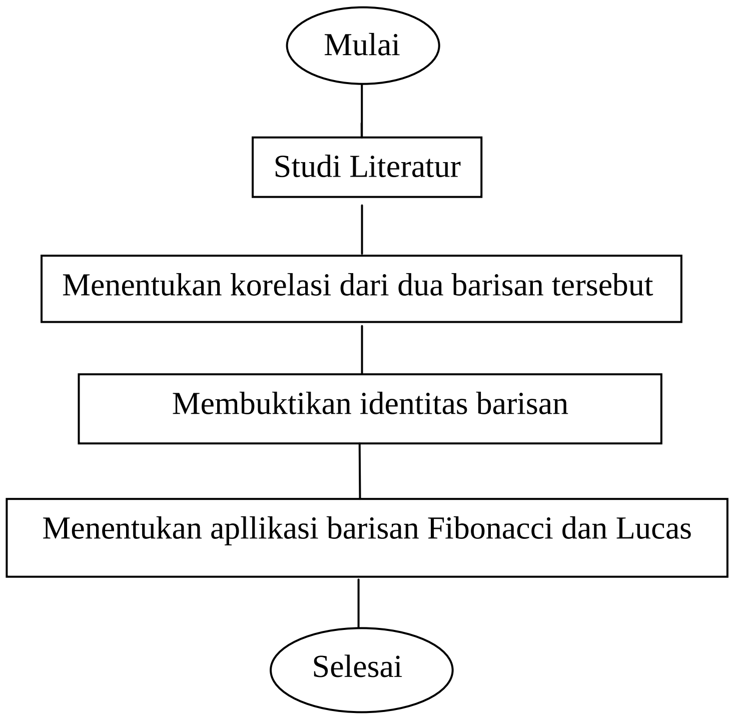
Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2011-2012 bertempat di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Mengumpulkan dan mempelajari pustaka (buku-buku) yang berhubungan dengan barisan Fibonacci dan Lucas.
2. Mencari relasi (hubungan) antara barisan Fibonacci dan barisan Lucas
3. Menentukan dan membuktikan identitas dari barisan Fibonacci dan Lucas.
4. Mencari aplikasi dari barisan Fibonacci dan Lucas

Langkah-langkah penelitian ini dapat digambarkan dalam diagram alir sebagai berikut :


Mulai
Studi Literatur
Menentukan korelasi dari dua barisan tersebut
Membuktikan identitas barisan
Menentukan apllikasi barisan Fibonacci dan Lucas
Selesai

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Relasi dan Identitas Barisan Fibonacci dan Lucas

Barisan Fibonacci dan Lucas mempunyai kesamaan yaitu suku ke – n dari barisan tersebut didapat dengan menjumlahkan tepat dua suku sebelumnya. Perbedaannya terletak dari nilai awal masing – masing barisan. Kesamaan yang dimiliki dapat menjadi salah satu sebab adanya hubungan dari kedua barisan tersebut sehingga membentuk suatu identitas.

4.1.1. Relasi dan Identitas Pertama

Tabel 4.1. Relasi 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fn	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Ln	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

Dari sebelas suku pertama barisan Fibonacci dan Lucas di atas, dengan pola yang terbentuk tampak ada hubungan antara kedua barisan tersebut, yaitu :

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \ ; n \geq 1 \qquad (4.1.1)$$

Identitas di atas akan dibuktikan secara analitik menggunakan formula Binet.

Bentuk umum barisan Fibonacci dari Persamaan (2.3.7) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Bentuk umum barisan Lucas dari Persamaan (2.3.12)

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{4+1+5+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{4+1+5-2\sqrt{5}}{2(1-\sqrt{5})}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{10+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{10-2\sqrt{5}}{2(1-\sqrt{5})}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{5-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(1+\sqrt{5})}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\left[\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{(1-\sqrt{5})}\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}$$

$\boldsymbol{F_{n-1} + F_{n+1} = L_n}$ ■

Jadi, suku ke – n dari barisan Lucas bisa didapatkan dengan menjumlahkan suku ke – $(n-1)$ dan $(n+1)$ dari barisan Fibonacci.

4.1.2. Relasi dan Identitas Kedua

Tabel 4.2. Relasi 2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Fn	0	1	1	2	3	5	8	13	...
Ln	2	1	3	4	7	11	18	29	...

Perhatikan suku-suku yang terdapat dalam warna-warna yang sama.

Pada tabel tersebut untuk $2 \le n \le 5$ berlaku :

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \qquad (4.1.2)$$

Selanjutnya akan dibuktikan apakah identitas (4.1.2) berlaku untuk seluruh $n \geq 2$.

Bukti :

$$F_{n+2} - F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{4}{6+2\sqrt{5}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{4}{6-2\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{36+24\sqrt{5}+20-16}{8(3+\sqrt{5})}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{36-24\sqrt{5}+20-16}{8(3-\sqrt{5})}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{40+24\sqrt{5}}{8(3+\sqrt{5})}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{40-24\sqrt{5}}{8(3-\sqrt{5})}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+3)}{3+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-3}{3-\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$\boldsymbol{F_{n+2} - F_{n-2} = L_n} \quad \blacksquare$$

Jadi, suku ke – n dari barisan Lucas bisa didapatkan dengan mengurangkan suku ke – $(n+2)$ dengan $(n-2)$ dari barisan Fibonacci.

4.1.3. Relasi dan Identitas Ketiga

Tabel 4.3. Relasi 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Fn	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
Ln	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...

Jika diperhatikan suku-suku pada warna yang sama, terdapat hubungan antara barisan Fibonacci dan Lucas. Pada tabel di atas untuk $3 \leq n \leq 8$ berlaku :

$$F_{n+3} + F_{n-3} = 2\,L_n \qquad (4.1.3)$$

Selanjutnya akan dibuktikan apakah identitas (4.1.3) berlaku untuk seluruh n≥3.

Bukti :

$F_{n+3} + F_{n-3}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-3}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-3}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} + \frac{8}{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8} + \frac{8}{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[2+\sqrt{5}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right]-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[2-\sqrt{5}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{9+4\sqrt{5}+1}{2+\sqrt{5}}\right]-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{9-4\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{2+\sqrt{5}}\right]-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{2-\sqrt{5}}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,2\sqrt{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$$F_{n+3}+F_{n-3} = 2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

$$\boldsymbol{F_{n+3}+F_{n-3} = 2\,L_{n}} \quad \blacksquare$$

Jadi, dua kali suku ke–n dari barisan Lucas bisa didapatkan dengan menjumlahkan suku ke – $(n+3)$ dan $(n-3)$ dari barisan Fibonacci.

4.1.4. Relasi dan Identitas Keempat

Tabel 4.4. Relasi 4

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fn	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Ln	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

Dari tabel di atas, diduga ada Relasi antara barisan Fibonacci dan Lucas. Suku kedua Fibonacci (F_2) didapat dengan mengalikan suku pertama dari masing-masing barisan Fibonacci dan Lucas $(F_1\ x\ L_1)$. Suku keenam dari barisan Fibonacci (F_6) didapat dengan mengalikan suku ketiga dari kedua barisan tersebut $(F_3\ x\ L_3)$. Demikian pula dengan suku kedelapan Fibonacci (F_8) didapat dengan mengalikan suku keempat dari kedua barisan tersebut $(F_4\ x\ L_4)$.

Secara matematis diduga bahwa :

$$F_n \, x \, L_n = F_{2n} \tag{4.1.4}$$

Selanjutnya akan dibuktikan identitas (4.1.4) berlaku untuk seluruh n bilangan bulat positif.

Bukti :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n \text{ x } L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right]\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right]$$

$$F_n \text{ x } L_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2\mathrm{n}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2\mathrm{n}}\right]$$

$$\boldsymbol{F_n} \textbf{ x } \boldsymbol{L_n} = \boldsymbol{F_{2n}} \quad \blacksquare$$

Jadi, suku ke – $2n$ dari barisan Fibonacci bisa didapatkan dengan mengalikan suku ke – n dari barisan Fibonacci dan Lucas.

4.1.5. Relasi dan Identitas Kelima

Tabel 4.5. Relasi 5

n	1	2	3	4	...
F_{2^n}	1	3	21	987	...
L_{2^n}	3	7	29	2207	...

Berdasarkan tabel tersebut jika diperhatikan terdapat relasi antara suku ke – 2^n dari barisan Fibonacci dan Lucas, dimana $n \geq 2$, yaitu :

- Suku ke – 4 Fibonacci (F_{2^2}) sama dengan suku ke – 2 Lucas (L_{2^1})

- Suku ke – 8 Fibonacci (F_{2^3}) sama dengan perkalian suku ke – 2 (2^1) dan ke – 4 (2^2) Lucas.

$$F_{2^3} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2}$$

- Suku ke – 16 Fibonacci (F_{2^4}) sama dengan perkalian suku ke – 2 (2^1), ke – 4 (2^2), dan suku ke – 8 (2^3) Lucas.

$$F_{2^4} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$$F_{2^n} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{n-1}} \quad ; n \geq 2 \qquad (4.1.5)$$

Bukti :

Untuk membuktikan identitas (4.1.5) digunakan metode induksi matematika yang terdiri dari dua langkah yaitu :

1. Basis induksi

   Pada basis induksi harus dibuktikan bahwa pernyataan tersebut benar pada nilai awal yang diberikan.

2. Langkah induksi

   Anggap benar untuk $n = k$ kemudian buktikan benar untuk $n = k + 1$

Pembuktian dengan induksi matematika untuk identitas (4.1.5) :

1. Basis induksi

   Nilai awal yang diberikan yaitu $n = 2$, sehingga pernyataan (4.1.5) harus dibuktikan benar untuk nilai awal tersebut.

   $F_{2^n} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{n-1}}$

$F_{2^2} = L_{2^1}$

$F_4 \ = L_2$

$3 = 3$ (Benar) ....(I)

2. Langkah Induksi

Anggap benar untuk $n = k$ artinya :

$F_{2^k} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{k-1}}$

Selanjutnya akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, artinya harus dibuktikan bahwa :

$F_{2^{k+1}} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{k-1}}\ x\ L_{2^k}$

Bukti :

$L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{k-1}}\ x\ L_{2^k} = F_{2^k}$ x L_{2^k}

$= F_{2.2^k}$ (4.1.4)

$= F_{2^{k+1}}$ Terbukti ....(II)

Dari (I) dan (II) maka terbukti bahwa :

$F_{2^n} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \dots x\ L_{2^{n-1}}\ ; n \geq 2$ ■

4.2. Aplikasi Barisan Fibonacci

Beberapa aplikasi dari barisan Fibonacci adalah sebagai berikut.

4.2.1. Fibonacci pada Tanaman (Knott, 2012)

Beberapa tanaman memiliki jumlah daun bunga yang ada pada barisan Fibonacci.

Tabel 4.2.1. Barisan Fibonacci pada Jumlah Daun Bunga

NO	JUMLAH DAUN BUNGA	NAMA TANAMAN
1	3	*Lily, Iris,Tradescantia*
2	5	*Buttercup, Wild Rose, Larkspur, Columbine (Aquilegia),*
3	8	*Dhelpiniums, Coreopsis*
4	13	*Ragwort, Corn Marigold, Cineraria,*dan beberapa *Daisies*
5	21	*Aster, Black-Eyed Susan, Chicory*
6	34	*Plantain, Pyrethrum*
7	55, 89	*Michaelmas Daisies, Asteraceae Family*

Beberapa contoh tanaman yang memiliki jumlah daun bunga sesuai dengan barisan Fibonacci adalah sebagai berikut :

Lily

Iris

Tradescantia

Gambar 1. Daun Bunga Berjumlah Tiga

Buttercup

Pinks

Wild Rose

Larkspur

Columbine

Gambar 2. Daun Bunga Berjumlah Lima

Coreopsis

Dhelpinium

Gambar 3. Daun Bunga Berjumlah Delapan

Ragwort

Cineraria

Marigold

Gambar 4. Daun Bunga Berjumlah Tiga Belas

Aster

Black-Eyed Susan

Chicory

Gambar 5. Daun Bunga Berjumlah 21

Plantain

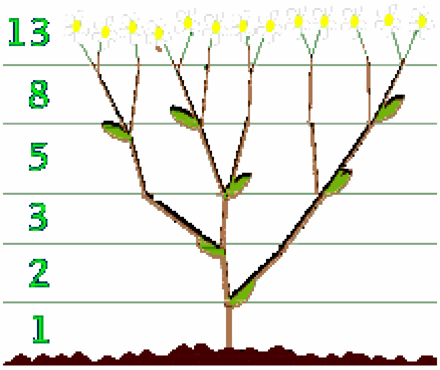
Gambar 6. Daun Bunga Berjumlah 34

Asteraceae Family (55 daun bunga)

Asteraceae Family (89 daun bunga)

Gambar 7. Daun Bunga Berjumlah 55 dan 89

Pencabangan pada tanaman juga menunjukkan barisan Fibonacci. Bentuk ini untuk memaksimalkan jumlah paparan sinar matahari. Misalkan saat tanaman mengeluarkan tunas baru, sebelum berumur dua bulan tunas baru tidak akan kuat untuk mendukung percabangan. Jika percabangan pada titik tumbuh mengikuti pola tersebut maka akan didapatkan gambar seperti berikut :



Gambar 8. Fibonacci pada Pencabangan Tanaman

4.2.2. Metode Analisis dari Fibonacci

Para *trader* atau investor mengenal Fibonacci bukan sebagai suatu barisan atau deret hitung dalam Matematika. Mereka mengenal Fibonacci sebagai salah satu teknik analisis pergerakan harga khususnya mengenai *support*, *resistance,* dan *retracement.* Ada beberapa analisis dengan metode Fibonacci, di antaranya yang memiliki popularitas yang tinggi yaitu *Arc*, *Fan*, *Retracement*, dan *Time Zone.*

4.2.2.1 Fibonacci *Arc*

Jika diterjemahkan ke dalam bahasa Indonesia, *arc* berarti busur atau lengkungan. Fibonacci *Arc* didapatkan dengan menarik garis virtual dari dua titik ekstrem yang terjadi. Harga terendah dengan harga tertinggi, lalu tiga garis *arc* digambarkan dengan nilai tengah berada di garis *arc* kedua. Ketiga garis *arc* tersebut melibatkan rasio Fibonacci di level 38,2%, 50,0%, dan 61,8%.

Gambar 9. Fibonacci *Arc*

Pada Gambar 9, dapat dilihat bahwa di titik 1,2, dan 3 memberikan indikasi adanya level *support* dan *resistance* ketika harga sedang bergerak naik dan turun.

4.2.2.2. Fibonacci *Fan*

Garis Fibonacci *Fan* didapatkan dengan menggambarkan garis trend virtual yang menghubungkan harga terendah dengan harga tertinggi ataupun sebaliknya. Fibbonacci *Fan* menghasilkan tiga buah garis trend dengan level Fibonacci berada di 38.2%, 50%, dan 61.8%.

Gambar 10. Fibonacci *Fan*

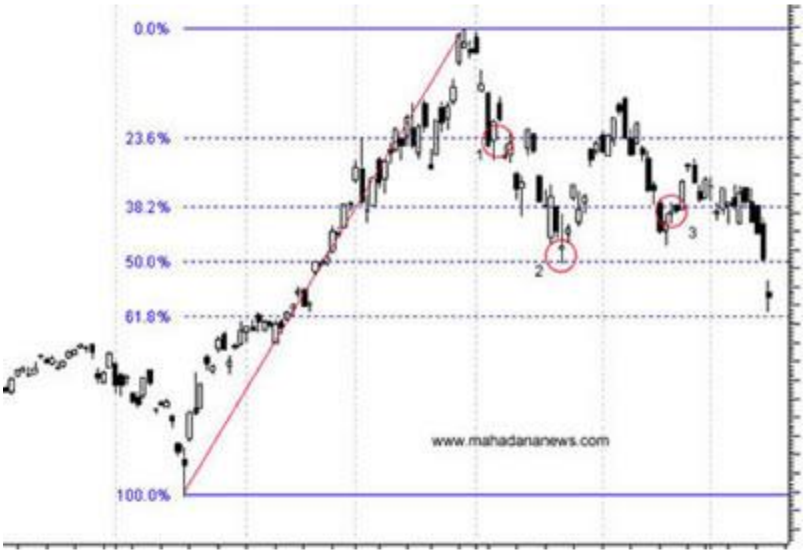
Penggunaan garis Fibbonacci *Fan* ini hampir sama dengan penggunaan *Arc*. Namun menjadi lebih sederhana karena bentuknya merupakan garis *trend*. Penetrasi terhadap garis ini merupakan kunci analisis sebagai level *support* dan *resistance*. Selain itu, karena bentuknya merupakan garis *trend*, perubahan arah *trend* kadangkala dapat terlihat dari penembusan garis Fibbonacci *Fan* ini.

4.2.2.3. Fibonacci *Retracement*

Banyak analis dan trader yang memiliki gaya dan karakteristik analisis berdasarkan pergerakan koreksi atau *rebound* dari harga. Mereka akan berusaha untuk mencari harga tertinggi atau terendah lalu mengambil posisi setelahnya. Pandangan bahwa harga akan berbalik arah (*retrace*) dari pergerakan awal setelah terjadi pergerakan yang cepat memang bukan hal yang asing lagi dan untuk mendapatkan level-level tujuan pergerakan harga setelah pergerakan yang cepat dengan sifat *support* maupun *resistance,* Fibonacci *Retracement* dianggap sebagai salah satu yang terbaik.

Untuk mendapatkan Fibonacci *Retracement*, yang perlu dilakukan adalah menarik sebuah garis *trend* virtual antara harga terendah dengan harga tertinggi. Begitu juga sebaliknya, lalu dihasilkan level-level *support* dan *resistance* dari rasio-rasio Fibonacci.

Support dan *resistance* di gambarkan dengan bentuk garis horizontal yang mewakili level Fibonacci dari 0.0%, 23.6%, 38.2%, 50%, 61.8%, 100%, 161.8%, 261.8%, 423.6%. Mungkin tidak semua level tersebut akan tampak dalam grafik karena memiliki nilai yang berjarak sangat jauh.



Gambar 11. Fibonacci *Retracement*

Dalam Gambar 11 terlihat bahwa setiap rasio Fibonacci atau garis horisontal Fibonacci *Retracement* kemungkinan akan menjadi level-level *support resistance* dari pergerakan harga.

4.2.2.4. Fibonacci *Time Zones*

Fibonacci *Time Zones* merupakan sebuah seri garis vertikal. Garis-garis vertikal ini memiliki jarak sesuai dengan interval Fibonacci yaitu 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, dan seterusnya.

Fibonacci *Times Zones* ini digunakan untuk melihat apakah terdapat pergerakan harga yang signifikan disekitar garis-garis vertikal tersebut.

Metode analisis dengan menggunakan Fibonacci memang tidak ditujukan untuk menghasilkan sinyal beli dan jual ataupun waktu masuk dan keluar pasar. Namun, metode Fibonacci sangat berguna untuk menentukan area *support* dan *resistance*. Banyak analis menggunakan Fibonacci digabungkan dengan metode analisis lainnya seperti *Elliott Wave* untuk menghasilkan gambaran perpanjangan pergerakan *retrace* dan gelombang harga lainnya.

Gambar 12. Fibonacci *Time Zones*

Pada Gambar 12 di atas, terlihat bahwa terdapat pergerakan harga yang cukup signifikan ketika harga mendekati dan melewati garis-garis vertikal dari Fibonacci *Time Zones*.

4.2.3. Fibonacci pada Segitiga Pascal

Segitiga Pascal dipekenalkan oleh B. Pascal walaupun pada tahun sebelumnya sudah digambarkan oleh matematikawan Cina Yanghui dan astronomiwan Persia Omar Khayyam pun sudah mengenalnya.

Segitiga Pascal dapat dituliskan dengan formula :

$$a_{nr} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$$

dimana $\binom{n}{r}$ merupakan koefisien binomial.

Formula Pascal menunjukkan bahwa setiap baris berikutnya didapat dengan menambahkan dua entri diagonal di atasnya.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} \qquad (4.2.2.1)$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

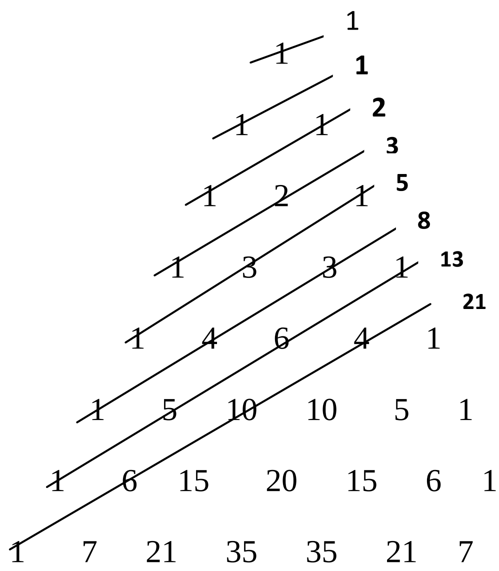
$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{6}{0} = 1 \quad \binom{6}{1} = 6 \quad \binom{6}{2} = 15 \quad \binom{6}{3} = 20 \quad \binom{6}{4} = 15 \quad \binom{6}{5} = 6 \quad \binom{6}{6} = 1$$

Gambar 13. Segitiga Pascal



Gambar 14. Segitiga Pascal dan Barisan Fibonacci

Penjumlahan angka pada tiap diagonal di atas menghasilkan barisan Fibonacci.

$$\binom{0}{0} = 1 = F_1$$

$$\binom{1}{0} = 1 = F_2$$

$$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_3$$

$$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_4$$

$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = F_5$$

$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_6$$

$$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 13 = F_7$$

$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 21 = F_8$$

Penjumlahan dari kombinasi – kombinasi di atas secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}\,;\, n \geq 0} \qquad (\mathbf{4.2.2.2})$$

Bukti :

Pembuktian menggunakan induksi matematika.

(i) Basis Induksi $(n = 0)$

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n-k}{k} = F_{0+1}$$

$$\binom{0}{0} = F_1$$

$$1 = 1$$

Pernyataan yang benar.

(ii) Induksi matematika

Anggap benar untuk n = p.

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k} = F_{p+1} \text{ (Benar)}$$

Kemudian buktikan benar untuk n = p + 1.

Akan ditunjukkan bahwa :

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \binom{p+1-k}{k} = F_{p+2}$$

Berdasarkan (4.2.2.1.) :

$$\binom{p+1-k}{k} = \binom{p-k}{k} + \binom{p-k}{k-1}$$

dan,

$$\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 0$$

$$= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$$

Sehingga menjadi :

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \binom{p+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \left[\binom{p-k}{k} + \binom{p-k}{k-1} \right]$$

$$= \binom{p}{0} + \left[\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \left[\binom{p-k}{k} + \binom{p-k}{k-1} \right] \right]$$

$$= 1 + \left[\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k-1} \right]$$

$$= 1 + \left[\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k} - 1 \right] + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor} \binom{p-k}{k-1}$$

$$= F_{p+1} + F_p$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor} \binom{p+1-k}{k} = F_{p+2}} \quad (\textbf{Benar})$$

Catatan :

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}\binom{p-k}{k-1}=\binom{p-1}{0}+\binom{p-2}{1}+\binom{p-3}{2}+\cdots$$

Jika $n = p-1$, maka menjadi :

$$=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{0}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}$$

Sehingga jika dikembalikan ke bentuk semula :

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}\binom{p-k}{k-1}=F_{p-1+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}\binom{p-k}{k-1}=F_{p}$$

V. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Terdapat relasi atau hubungan antara barisan Fibonacci dan Lucas.
2. Beberapa identitas dari barisan Fibonacci dan Lucas yang teridentifikasi adalah sebagai berikut :
   a. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$; $n \geq 1$
   b. $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$; $n \geq 2$
   c. $F_{n+3} + F_{n-3} = 2\, L_n$; $n \geq 3$
   d. F_n x $L_n = F_{2n}$; $n \geq 1$
   e. $F_{2^n} = L_{2^1}\ x\ L_{2^2} x\ L_{2^3} x\ \ldots x\ L_{2^{n-1}}$; $n \geq 2$
3. Salah satu aplikasi dari barisan Fibonacci terdapat pada segitiga Pascal, yaitu penjumlahan angka pada tiap diagonal dari segitiga Pascal membentuk barisan Fibonacci. Secara umum dapat ditulis :

$$\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \right\rfloor} \binom{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\ ; \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$$