I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang memiliki banyak terapan di berbagai bidang sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui makalah tulisan Leonard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Ia menggunakan teori graf untuk menyelesaikan masalah jembatan Königsberg (sekarang bernama Kaliningrad) di sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof . Masalah jembatan Konigsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ditempat semula. Untuk menyelesaikan masalah itu, Euler memisalkan daratan yang dihubungkan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (*edge*).

Salah satu kajian yang penting dalam teori graf adalah mengenai graf Hamiltonian. Graf Hamiltonian adalah suatu graf yang mengandung Hamiltonian *cycle*.

Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* jika $G\backslash\{e\}$adalah Hamiltonian untuk setiap $e \in E$ dan suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-vertex fault-tolerant Hamiltonian* jika $G\backslash\{v\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $v \in V$. Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-fault-tolerant Hamiltonian* jika $G\backslash\{f\}$adalah Hamiltonian untuk setiap $f \in E \cup V$.

Pada penelitian ini, akan dikaji mengenai salah satu bentuk *1-fault tolerant-Hamiltonian* yaitu *Honeycomb Rectangular Disk* (HReD(m,n)). *Honeycomb Rectangular Disk* (HReD(m,n)) merupakan salah satu variasi dari *Honeycomb Rectangular Mesh* (HReM(m,n)). HReD(m,n) diperoleh dari HReM(m,n) dengan penambahan *cycle* penutup/pembatas.

1.2 Batasan Masalah

Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *Honeycomb Rectangular Disk* (HReD(m,n)) untuk m bilangan bulat genap positif dan n bilangan bulat ganjil positif dengan $m \geq 4$ dan $n \geq 5$ dan pembuktian 1 – *fault-tolerant Hamiltonian* dibatasi pada graf *Honeycomb Rectangular Disk* (HReM(m,n)) untuk $m = 4$.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh informasi terkait graf *Honeycomb Rectangular Disk* berupa contoh, istilah dan definisi umum dari graf *Honeycomb Rectangular Disk*. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk menjelaskan pembuktikan bahwa HReD(m,n) untuk $m = 4$ dan $n \geq 5$ merupakan graf 1 – *fault-tolerant Hamiltonian*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini antara lain :

1. Memperdalam pengetahuan tentang teori graf, khususnya mengenai salah satu bentuk *1-fault-tolerant Hamiltonian graph* yaitu *Honeycomb Rectangular Disk*.
2. Menggali beberapa informasi mengenai *Honeycomb Rectangular Disk*.
3. Menambah referensi terkait bentuk *1-fault-tolerant Hamiltonian graph* khususnya *Honeycomb Rectangular Disk*.
4. Memotivasi pembaca untuk dapat mengkaji bentuk-bentuk *1-fault-tolerant Hamiltonian graph* lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini, akan diberikan beberapa definisi, istilah dan contoh-contoh yang akan digunakan dalam penelitian ini.

1. Graf

Graf $G = (V,E)$ terdiri dari himpunan objek $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut *vertex* (titik) yang tidak kosong, dan himpunan lain $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang unsur-unsurnya disebut *edge* (garis) yang boleh kosong, sehingga setiap *edge* e_k diidentifikasikan sebagai pasangan bukan berurutan (v_i, v_j) dari *vertex*. Representasi paling umum dari graf adalah dengan cara diagram, di mana *vertex* direpresentasikan sebagai titik dan setiap *edge* sebagai garis yang menghubungkan *vertex* (Deo,1989).

2. Subgraf dan Supergraf

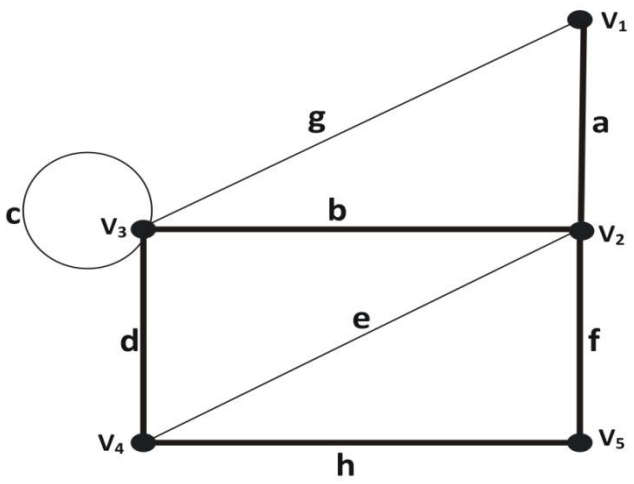
Misalkan dua graf $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$. H dikatakan subgraf dari G atau G adalah supergraf dari H jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hsu & Lin, 2009).

3. *Loop*

Garis yang mempunyai titik awal dan ujungnya sama disebut dengan *loop*. Pada Gambar 1 yang merupakan *loop* adalah *edge* c (Deo, 1989).

4. *Walk*

Walk adalah barisan berhingga dari titik (*vertex*) dan garis (*edge*), dimulai dan diakhiri dengan *vertex*, sedemikian sehingga setiap *edge* menempel dengan *vertex* sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *walk* tertutup (Deo, 1989).



Gambar 1. Contoh *walk* pada suatu graf

Garis yang tebal pada Gambar 1 merupakan salah satu *walk* yaitu $v_1\ a\ v_2\ b\ v_3\ d\ v_4\ h\ v_5\ f\ v_2$.

5. Lintasan (*Path*)

Lintasan (*path*) adalah *walk* yang semua titik (*vertex*) nya berbeda. Pada Gambar 1 salah satu lintasan (*path*)nya adalah $v_1\ a\ v_2\ b\ v_3\ d\ v_4$ (Wibisono, 2008).

Suatu *path* dinyatakan oleh $\langle\ x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\ \rangle$. P^{-1} menyatakan *path* $\langle x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 \rangle$ jika P adalah *path* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$(Teng.,*et al*,2005).

6. Sirkuit (circuit/cycle)

Sirkuit adalah *walk* tertutup dimana tidak ada vertex (kecuali titik awal dan akhirnya) yang dilewati lebih dari satu kali. Pada Gambar 1 salah satu sirkuitnya adalah $v_1\ a\ v_2\ b\ v_3\ g\ v_1$ (Deo, 1989).

7. Derajat (*Degree*)

Derajat (*degree*) adalah jumlah *edge* yang menempel pada suatu *vertex* v_i, dengan *loop* dihitung dua kali, dan ditulis dengan $d(v_i)$ (Deo, 1989) .

Pada Gambar 1 $d(v_1) = 2, d(v_2) = 4, d(v_3) = 5, d(v_4) = 3, d(v_5) = 2$.

8. Teorema 2.1

Misalkan suatu graf *G* dengan *e-edge* dan *n-vertex* $v_1, v_2, \ldots v_n$. Jumlah derajat dari semua *vertex* di *G* adalah dua kali dari jumlah *edge*nya, dan dinyatakan sebagai berikut : $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$ (Deo, 1989).

Bukti : Karena suatu *edge* pasti menghubungkan dua *vertex*, maka setiap *edge* dihitung dua kali dalam perhitungan derajat suatu titik pada suatu graf.

9. Bertetangga (*Adjacent*) dan Menempel (*Incidence*)

V_i dan e_j dikatakan *incident* dengan satu sama lain jika *vertex* v_i adalah suatu *vertex* ujung dari *edge* e_j. Dua *egde* yang tidak paralel dikatakan *adjacent* jika kedua edges tersebut *incident* pada satu *vertex*, dan dua vertex dikatakan *adjacent* jika kedua vertex tersebut adalah *vertex* akhir dari edges yang sama (Deo, 1989).

10. Graf Teratur (Regular Graph)

Suatu graf yang semua *vertex*nya mempunyai *degree* yang berjumlah sama disebut graf teratur (Deo, 1989).

11. Graf Planar

Suatu graf G adalah planar jika graf tersebut dapat digambarkan pada bidang pada suatu cara dimana dua *edge* tidak bertemu satu sama lain kecuali pada suatu vertex dimana keduanya *incident* (Wilson & Watkins, 1990).

12. Isomorfis dan Automorfisma

Dua graf G dan G′ dikatakan isomorfis (satu sama lain) jika terdapat korespondensi satu-satu antara *vertex* keduanya dan *edge* keduanya sehingga mempertahankan ketetanggaan keduanya (Deo, 1989). Automorfisma dari G adalah permutasi dari $V(G)$ yang merupakan suatu isomorfis dari G ke G (Hsu & Lin, 2009).

13. Graf Simetrik

Suatu graf G dikatakan simetrik, jika diberikan dua pasangan *vertex* yang *adjacent* u_1—v_1 dan u_2—v_2 dari G, terdapat suatu automorfisma

$$f : V(G) \rightarrow V(G)$$

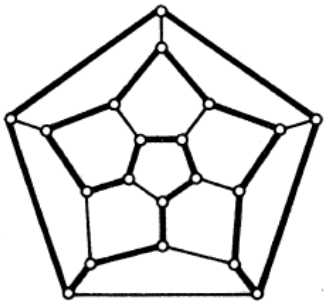
sehingga

$f(u_1) = u_2$ and $f(v_1) = v_2$ (Biggs, 1993).

14. Graf Hamiltonian

Hamiltonian circuit (sirkuit Hamiltonian) dalam graf terhubung didefinisikan sebagai *walk* tertutup yang melewati setiap titiknya tepat sekali, kecuali titik awalnya (Deo, 1989). *Hamitonian path* adalah suatu *path* yang setiap titiknya berbeda dan semua titiknya dilewati (Teng.,*et al*,2005). Graf Hamiltonian adalah

graf yang semua titik-titiknya dapat dilalui masing-masing sekali dan mempunyai lintasan tertutup, artinya titik awal sama dengan titik akhir (Wibisono, 2008).



Gambar 2. Contoh graf hamiltonian

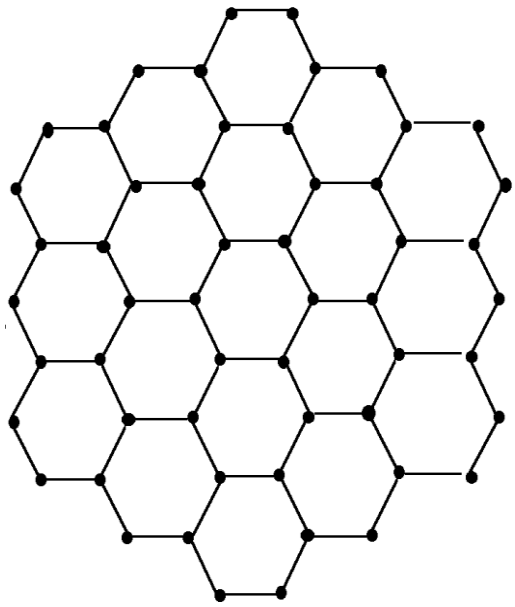
15. *1-Fault-Tolerant Hamiltonian Graph*

Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* jika $G \setminus \{e\}$adalah Hamiltonian untuk setiap $e \in E$, dan suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-vertex fault-tolerant Hamiltonian* jika $G \setminus \{v\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $v \in V$. Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-fault-tolerant Hamiltonian* jika $G\setminus\{f\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $f \in E \cup V$ (Teng.,*et al*,2005). Dengan kata lain, suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-fault-tolerant Hamiltonian* jika graf tersebut *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* dan *1-vertex fault-tolerant Hamiltonian* (Kao & Hsu, 2005).

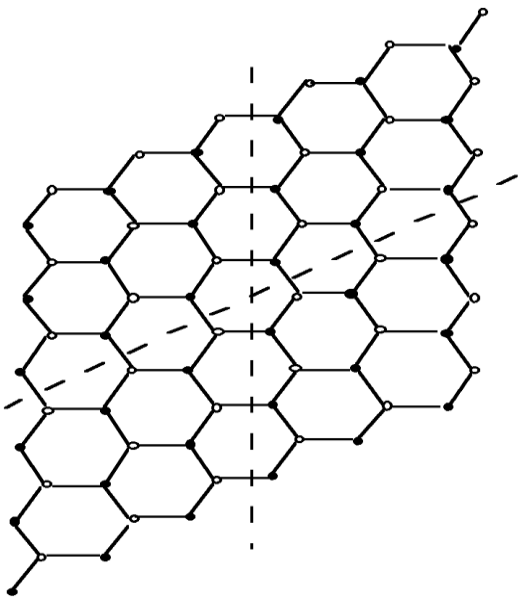
16. *Honeycomb Rectangular Mesh* (HReM(*m,n*))

Honeycomb Rectangular Mesh adalah variasi dari *Honeycomb Mesh*. *Honeycomb Mesh* dibangun dari *hexagon* dengan berbagai cara. Ada 3 tipe dari *Honeycomb Mesh* berdasarkan penutup/pembatasnya, yaitu, *Honeycomb Hexagon Mesh* (HHM) yang berbentuk segi enam beraturan, *Honeycomb Rhombic Mesh* (HRoM)

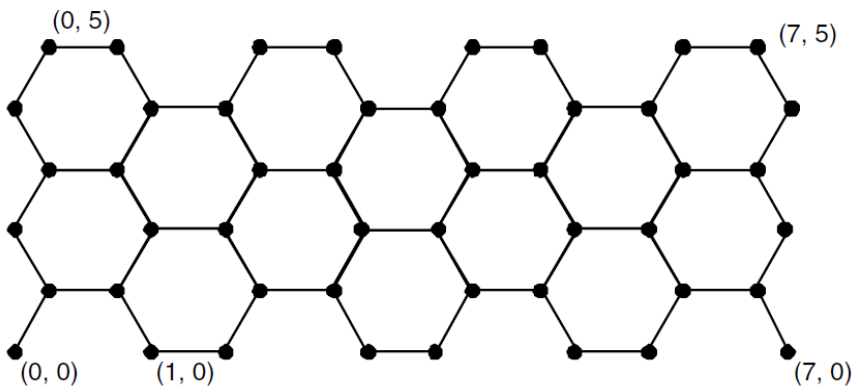
yang berbentuk belah ketupat beraturan dan *Honeycomb Rectangular Mesh* (HReM) yang berbentuk segi empat beraturan (Stojmenovic, 1997).



Gambar 3. *Honeycomb Hexagon Mesh*



Gambar 4. *Honeycomb Rhombic Mesh*



Gambar 5. *Honeycomb Rectangular Mesh* HReM(8,6)

(Hsu & Lin, 2009).

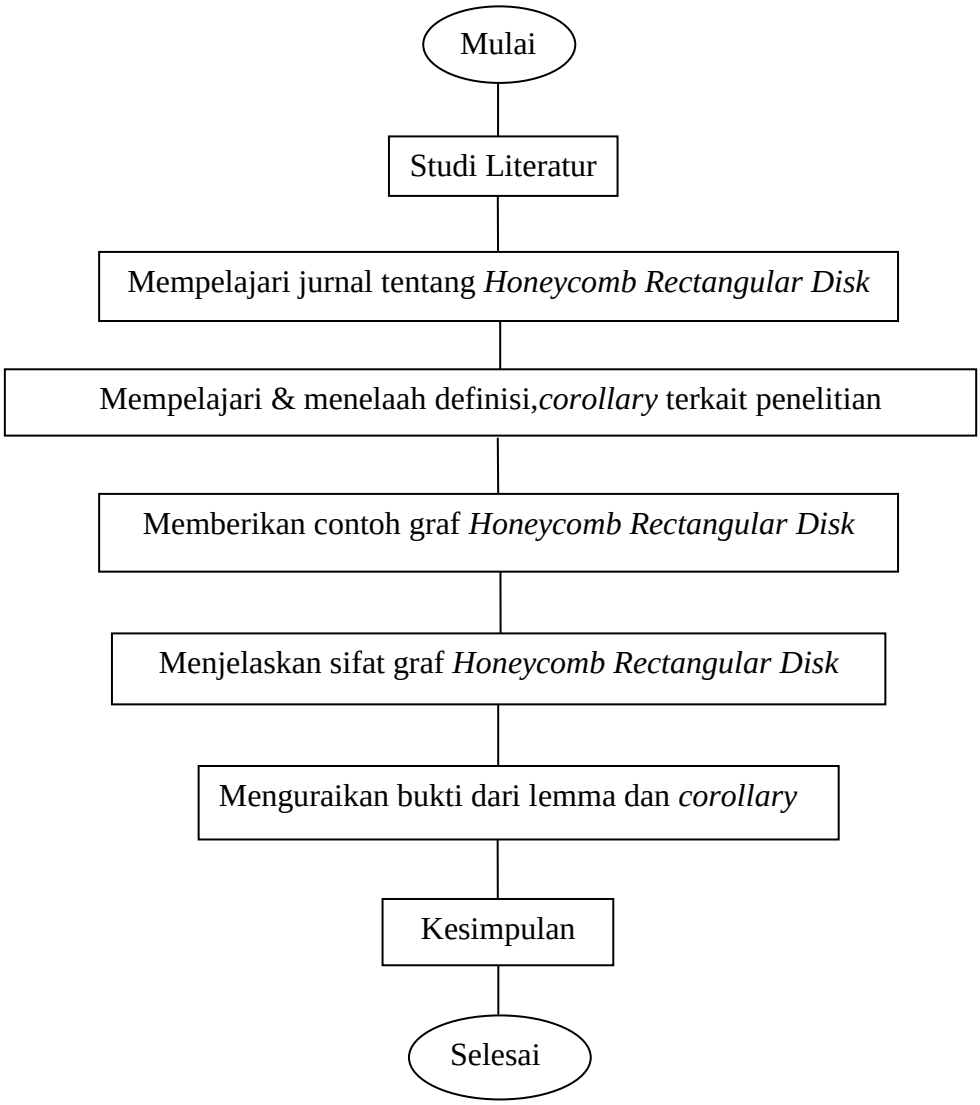
III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dimulai pada semester ganjil tahun ajaran 2011-2012 bertempat di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini antara lain sebagai berikut :

1. Mengumpulkan pustaka (buku-buku) yang terkait dengan penelitian ini.
2. Mencari dan mempelajari jurnal terkait graf yang dibahas dalam penelitian ini.
3. Mempelajari definisi-definisi, teorema-teorema dan sifat-sifat terkait graf yang digunakan dalam penelitian ini.
4. Memberikan beberapa contoh dari graf *Honeycomb Rectangular Disk*.
5. Menelaah dan menguraikan bukti-bukti dan teorema yang berlaku pada graf *Honeycomb Rectangular Disk* .

Berikut in adalah diagram alir yang menjelaskan tentang tahap-tahap penelitian ini.