II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar (pengertian) yang akan digunakan dalam pembahasan penelitian

2.1 Ruang Vektor

Definisi 3.1.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $(\mathcal{V}, +)$ grup komutatif dan $(\mathcal{F}, \oplus, .)$ lapangan dengan elemen identitas 1. $\mathcal{V}$ disebut ruang vektor (*vector space*) atas $\mathcal{F}$ jika ada operasi luar * antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{V}$dan $\alpha \in \mathcal{F}$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x \in \mathcal{V}$ yang memenuhi sifat – sifat :

(i) $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,

(ii) $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,

(iii) $(\alpha . \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$,

(iv) $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

2.2 Ruang Vektor Bagian dan Bebas Linear

Definisi 2.2.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Jika himpunan $\mathcal{W}$ terhadap operasi – operasi yang sama dengan operasi – operasi di bagian $\mathcal{V}$ juga merupakan ruang vektor atas $\mathcal{F}$, maka $\mathcal{W}$ disebut ruang vektor bagian (*vector sub-space*) dari $\mathcal{V}$.

Teorema 2.2.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \neq \theta$. Himpunan $\mathcal{W}$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{W}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ berlaku $\alpha x + \beta y \in \mathcal{W}$.

Teorema 2.2.3 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor terhadap lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y$ masing – masing ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ maka

$$\mathcal{X} + Y = \{m + n : \quad m \in \mathcal{X}, n \in Y\},$$

Juga merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ yang memuat $\mathcal{X}$ dan Y sebagai ruang vektor bagiannya.

Teorema 2.2.4 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor terhadap lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y \subset \mathcal{V}$ masing – masing ruang vektor bagian dan $\mathcal{X} \cap Y = \{\theta\}$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{X} + Y$ terdapat dengan tunggal $m_1 \in \mathcal{X}$ dan $n_1 \in Y$ sehingga $x = m_1 + n_1$.

Teorema 2.2.5 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapanngan $\mathcal{F}$. Jika $x, x_k \in \mathcal{V}$ dan $\lambda, \alpha_k, \beta_k \in \mathcal{F}$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$ maka benar bahwa

(i) $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k$,

(ii) $\lambda(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) x_k$,

(iii) $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k) x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x$, dan

(iv) $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k x_j$.

Teorema 2.2.6 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Jika $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{V}$, maka $\mathcal{W} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$.

Teorema 2.2.7 (Darmawijaya, 2007

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $M \subset \mathcal{V}$, maka $[M]$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$. Lebih lanjut, $[M]$ merupakan ruang vektor terkecil yang memuat M.

Definisi 2.2.8 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ atau $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}$ dikatakan bebas linier (*liniearly independent*) jika $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ dan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$$

berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teorema 2.2.9 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ tak bebas linier jika dan hanya jika terdapat k dengan $1 \leq k \leq n$ sehingga vektor x_k merupakan kombinasi linier $n - 1$ vektor – vektor lainnya.

Akibat 2..2.10 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ bebas linier jika dan hanya jika untuk setiap k, $1 \leq k \leq n$.

Vektor x_k bukan merupakan kombinasi linier $n - 1$ vektor – vektor lainnya.

Teorema 2.2.11 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linier jika dan hanya jika setiap persamaan

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

berakibat $\alpha_k = \beta_k$ untuk setiap k.

2.3 Basis dan Dimensi

Definisi 2.3.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang vektor $\mathcal{V}$ dikatakan terbangkitkan secara hingga(*finitely generated*) jika ada vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ sehinggga $\mathcal{V} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor $\mathcal{V}$.

Definisi 2.3.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$. Himpunan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ dikatakan bebas linier jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linier.

Definisi 2.3.3 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ disebut basis (*base*)

$\mathcal{V}$ jika $\mathcal{B}$ bebas linier dan $\mathcal{V} = [\mathcal{B}]$.

Teorema 2.3.4 (Darmawijaya, 2007)

Ruang vektor $\mathcal{V}$ terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika $\mathcal{V}$ mempunyai

basis hingga.

Teorema 2.3.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor dan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ basis. Banyaknya anggota $\mathcal{B}$ disebut dimensi ruang vektor $\mathcal{V}$,ditulis $\dim(\mathcal{V})$. Jika banyaknya anggota $\mathcal{B}$ hingga maka dikatakan $\mathcal{V}$ berdimensi hingga dan jika banyaknya anggota $\mathcal{B}$ tak hingga maka dikatakan $\mathcal{V}$ berdimensi tak hingga.

Teorema 2.3.6 (Darmawijaya, 2007)

Jika ruang vektor $\mathcal{V}$ berdimensi n, maka setiap $(n+1)$ vektor di dalam $\mathcal{V}$ tak bebas linier.

Akibat 2.3.7 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ masing – masing basis untuk ruang vektor $\mathcal{V}$, maka $m = n$.

2.4 Fungsi Linear

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu fungsi yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.4.1 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ disebut fungsi linear jika

(i) f fungsi aditif (*additive*)

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$, dan

(ii) f fungsi homogen (*homogeneous*)

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk setiap α dan vektor $x \in \mathcal{V}$.

Teorema 2.4.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ masing – masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama ($\mathcal{R}$ atau $\mathcal{C}$). Fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear jika dan hanya jika untuk sebarang skalar α, β dan vektor $x, y \in \mathcal{V}$, berlaku

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Teorema 2.4.3 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear maka

(i) $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$.

(ii) $f(x-y) = f(x) - f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$.

(iii) $f(\theta) = \bar{\theta}$, dengan $\theta \in \mathcal{V}$ dan $\bar{\theta} \in \mathcal{W}$ masing – masing menyatakan vektor nol.

(iv) $f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$ untuk setiap skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dan vektor – vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$.

Teorema 3.4.4 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear dan $g: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ sehingga $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$, maka g linear dan $g = f$.

Teorema 2.4.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor dan $S \subset \mathcal{V}$generator untuk $\mathcal{V}$. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear dan $g: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ sehingga $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in S$, maka fungsi g linear dan $g = f$; lebih lanjut $f(S)$ merupakan generator $f(\mathcal{V})$.

Teorema 2.4.6 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka $Rf = f(\mathcal{V})$ merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{W}$. Himpunan Rf disebut ruang jelajah (*range space*) fungsi f.

Teorema 2.4.7 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka

$$Nf = \{x \in \mathcal{V}: \quad f(x) = \bar{\theta}\}$$

dan

$$S = (\mathcal{V} - Nf) \cup \{\theta\}$$

masing – masing merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{V}$. Selanjutnya, himpunan Nf disebut ruang nol (*null space*) fungsi f.

Teorema 2.4.8 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor.Jika $\mathcal{V}$ berdimensi n dan $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka $\dim(f(\mathcal{V})) \leq n$.

Teorema 2.4.9 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika Jika $\mathcal{V}$ berdimensi n dan $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka

$$\partial + p = n$$

2.5 Operator Linear

Definisi 2.5.1 (Amanto, 2008)

Suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathfrak{D}(T)$ dan daerah hasil $\mathfrak{R}(T)$adalah

suatu operator linear jika memenuhi:

1. $\mathfrak{D}(T)$ dan $\mathfrak{R}(T)$ berada pada ruang vektor atas lapangan yang sama;
2. Untuk semua $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ dan skalar α berlaku $T(x+y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

2.6 Fungsi Linear dan Matriks

Teorema 2.6.1 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ merupakan ruang vektor real (*kompleks*) berdimensi n, maka $\mathcal{V}$ isomorfis dengan $\mathcal{R}^n(\mathcal{C}^n)$, yaitu terdapat fungsi linear dan bijektif dari $\mathcal{V}$ ke $\mathcal{R}^n(\mathcal{C}^n)$.

Akibat 2.6.2 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) \leq \dim(\mathcal{W})$, dan fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear dan injektif, maka $\mathcal{V}$ isomorfis dengan $Rf = f(\mathcal{V})$.

Teorema 2.6.3 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) = n$ dan $\dim(\mathcal{W}) = m$. Setiap fungsi linear $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ menentukan matriks *A* berukuran $m \times n$:

$$A = (\beta_{ik}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

sebaliknya juga berlaku.

Definisi 2.6.4 (Darmawijaya, 2007)

Dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ dikatakan isomorfik (*isomorphic*) jika ada fungsi linear bijektif $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Dalam hal ini, fungsi f tersebut dinamakan isomorfisma ruang vektor (*vector space isomorphism*) antara $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$.

Teorema 2.6.5 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ masing – masing adalah ruang vektor – ruang vektor atas lapangan yang sama, maka pernyataan – pernyataan di bawah ini benar :

(i) Untuk setiap $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ dan $g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, maka $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ merupakan ruang vektor.

(iii) $\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ merupakan aljabar assosiatif yang mempunyai elemen satuan.

2.7 Ruang Bernorma

Definisi 2.7.1 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang linier $\mathcal{K}$. Fungsi $x \in \mathcal{K} \mapsto \|x\| \in \mathcal{R}$, yang mempunyai sifat-sifat:

(N1) $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{K}$

$\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \theta$, (θ vektor nol)

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$, untuk setiap skalar α dan $x \in \mathcal{K}$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{K}$,

Disebut **norma** (norm) pada $\mathcal{K}$ dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut **norma vektor** x. Ruang linear $\mathcal{K}$ yang dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$ **disebut ruang bernorma** (norma space) dan dituliskan singkat dengan $(\mathcal{K}, \|.\|)$ atau $\mathcal{K}$ saja asalkan normanya telah diketahui.

2.8 Ruang Banach

Definisi 2.8.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Banach (*Banach Space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap)

2.9 Ruang Hilbert

Definisi 2.9.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Hilbert (Hilbert Space) adalah ruang pre-Hilbert yang lengkap

Definisi 2.9.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ ruang linier

(i) Fungsi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan rumus

$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$

yang memenuhi sifat-sifat

(I1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(I2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(I3) $\langle x, y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Untuk setiap $\mathcal{x}, \mathcal{y}, \mathcal{z} \in \mathcal{H}$ dan skalar α, dan

(I4) $\langle \mathcal{x}, \mathcal{x} \rangle > 0$ jika dan hanya jika $\mathcal{x} \neq \theta$,

disebut ***inner-product*** atau ***dot product***, atau ***scalar product*** pada $\mathcal{H}$.

(ii) Ruang linier $\mathcal{H}$ yang dilengkapi dengan suatu inner-product disebut **ruang pre-Hilbert** *(pre-Hilbert space)* atau **ruang inner-product** *(inner-product space)*

Di bawah ini akan diberikan contoh - contoh Ruang Hilbert :

1. Ruang linier $\mathcal{C}^n$ dan $\mathcal{R}^n$ masing-masing merupakan ruang pre-Hilbert terhadap inner-product :

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$$

untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{C}^n(\mathcal{R}^n)$.

Catatan: Jika $\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n$ maka

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{x}_k \, y_k$$

Karena $\bar{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}}$ (komponen-komponen anggota $\mathcal{R}^n$ merupakan bilangan real).

2. Contoh yang lebih umum dari pada contoh 1 adalah ruang linier ℓ^2. ℓ^2 merupakan ruang pre-Hilbert terhadap inner-product:

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$$

Untuk setiap $\tilde{x} = \{x_k\}$, $\tilde{y} = \{y_k\} \in \ell^2$.

3. $\mathbf{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ merupakan ruang pre-Hilbert terhadap inner-product:

$$\langle f, g\rangle = (R)\int_{a}^{b} f(x)\bar{g}\,(x)dx$$

untuk setiap $f, g \in \mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. $\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ dapat dianggap sebagai koleksi semua fungsi kontinu bernilai bilangan kompleks. Jadi, $g \in \mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ jika dan hanya jika $g = g_1 + ig_2$ dengan g_1 dan g_2 masing-masing fungsi kontinu pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ bernilai bilangan real. Mudah dipahami bahwa jika $g = g_1 + ig_2 \in \mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ maka $\bar{g} = g_1 - ig_2 \in \mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

2.10 Basis Orthonormal

Definisi 2.10.1 (Darmawijaya, 2007)

(i) Basis ortogonal (*ortogonal basis*) di dalam ruang pre-Hilbert adalah basis yang setiap dua vektornya saling tegak lurus.

(ii) Basis ortonormal (*orthonormal basis*) di dalam suatu ruang pre-Hilbert adalah basis ortogonal dan setiap anggotanya merupakan vektor satuan (normanya sama dengan 1).

Teorema 2.10.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui ruang Hilbert $\mathcal{H}$ mempunyai basis orthonormal $\{x_n\}$. Diperoleh pernyataan $x \in \mathcal{H}$ jika dan hanya jika ada $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

2.11 Operator pada Ruang Hilbert

Teorema 2.11.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. Untuk setiap $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ terdapat $T^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tunggal sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$ berakibat

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

Definisi 2.11.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua rang Hilbert $\mathcal{H}$dan $\mathcal{K}$. Menurut Teorema 5.1.1, untuk setiap operator $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ terdapat $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ sehingga

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

Untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$. Operator T^* disebut ***operator adjoint*** atau ***operator pendamping*** terhadap operator T.

Teorema 2.11.3 (Darmawijaya, 2007)

Ini adalah sifat – sifat operator pedamping. Diberikan dua ruang Hilbert $\mathcal{H}$dan $\mathcal{K}$. Jika $T, \mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan α sebarang skalar maka

(i) $(T + \mathcal{S})^* = T^* + S^*$

(ii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(iii) $T^{**} = (T^*)^* = T$

(iv) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$

(v) $TT^* = O \Leftrightarrow T = O$ (O operator nol).

Teorema 2.11.4 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ dan $\mathcal{X}$ masing – masing ruang Hilbert. Jika $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan $\mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{X})$ maka $(\mathcal{S}T)^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ dan

$$(\mathcal{S}T)^* = T^*\mathcal{S}^*$$

Teorema 2.11.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ dan $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$. Jika $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, maka $T^*(\mathcal{B}^\perp) \subset \mathcal{A}^\perp$.

Teorema 2.11.6 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui M dan N berturut-turut merupakan ruang bagian yang tertutup di dalam ruang Hilbert $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$. Untuk setiap $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ diperoleh $T(M) \subset N$ jika dan hanya jika $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$.

Teorema 2.11.7 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. Jika $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ maka

(i) $\{x : x \in \mathcal{H}\ dan\ Tx = \bar{\theta}\} = \{T^*(\mathcal{K})\}^\perp$

(ii) $\{x : x \in \mathcal{H}\ dan\ Tx = \bar{\theta}\}^\perp = \overline{T^*(\mathcal{K})}$

(iii) $\{y : y \in \mathcal{K}\ dan\ T^*y = \theta\} = \{T(\mathcal{H})\}^\perp$

(iv) $\{y : y \in \mathcal{K}\ dan\ T^*y = \theta\}^\perp = \overline{T(\mathcal{H})}$

Definisi 2.11.8 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ suatu ruang Hilbert $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ disebut :

1. Operator isometrik (*isometric operator*) jika $T^*T = I$;
2. Operator uniter (*unitary operator*) jika $T^*T = TT^* = I$;
3. Operator mandiri (*self adjoint operator*) jika $T^* = T$;

4. Operator proyeksi (*projection operator*) jika $T^* = T$ dan $TT = T$;
5. Operator normal (*normal operator*) jika $T^*T = TT^*$.

2.11 Ruang ukuran

Jika Ω adalah himpunan tak kosong, koleksi semua himpunannya disebut himpunan kuasa (power set) dan biasa dituliskan dengan P(Ω) atau 2^{Ω}

Definisi 2.12.1 (Darmawijaya, 2007)

(a). Jika Ω≠ θ, koleksi semua $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ disebut aljabar-σ himpunan pada Ω jika memenuhi sifat:

1. θ∈ $\mathcal{A}$
2. A∈ $\mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. $\{A_n\} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(b). jika $\mathcal{A}$ aljabar-σ himpunan pada Ω , maka setiap anggota $\mathcal{A}$ disebut himpunan terukur dan (Ω, $\mathcal{A}$) pasangan berurut Ω dengan $\mathcal{A}$ disebut ruang ukuran

(c). jika (Ω, $\mathcal{A}$) ruang terukur , fungsi μ : $\mathcal{A} \rightarrow \bar{R}$ disebut ukuran pada (Ω, $\mathcal{A}$) jika μ memenuhi sifat- sifat berikut:

1. μ(A) ≥ 0 untuk setiap A∈ $\mathcal{A}$
2. μ(Ø) = 0
3. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ untuk setiap barisan $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ yang saling asing

(d). Ruang terukur $(\Omega, \mathcal{A})$ yang dilengkapi dengan suatu ukuran μ padanya disebut ruang ukuran dan ditulis dengan $(\Omega, \mathcal{A},\mu)$

Definisi 2.12.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan $\Omega \neq \emptyset$, fungsi $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow \bar{R}$ disebut ukuran luar pada Ω jika fungsi tersebut mempunyai sifat :

(a). $\mu^*(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in 2^\Omega$ dan $\mu^*(\emptyset) = 0$

(b). $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ unuk setiap $A,B \in 2^\Omega$ dengan $A \subseteq B$

(c). $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ Untuk setiap $\{ A_n\} \subset 2^\Omega$

Definisi 2.12.3 (Darmawijaya, 2007)

Jika μ^* ukuran luar pada himpunan $\Omega \neq \emptyset$, maka $E \subset \Omega$ dikatakan terukur – μ^* jika

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

untuk setiap $A \subset \Omega$

Definisi 2.12.4 (Darmawijaya , 2007)

Jika $(\Omega, \mathcal{A})$ ruang ukuran dan $E \in \mathcal{A}$, maka fungsi $f : \Omega \rightarrow \bar{R}$ dikatakan terukur pada E jika salah satu pernyataan (i),(ii),(iii) atau (iv) terpenuhi:

(i). $\{x : x \in \& \ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}_E$

(ii). $\{x : x \in \& \ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}_E$

(iii). {x:x ∈ & f(x) > α} ∈ $\mathcal{A}_E$

(iv). {x:x ∈ & f(x) ≤ α} ∈ $\mathcal{A}_E$

Untuk setiap α ∈ R

2.12. Integral Lebesgue

Pada tahun 1902 Lebesgue, seorang matematikawan Perancis mencermati adanya fungsi yang tidak terintegral Riemann yaitu fungsi yang nilainya 0 dan 1. Selanjutnya Lebesgue menyusun teori ukuran yang terkenal dengan ukuran Lebesgue. Lebesgue menyusun teori integral baru yang merupakan perluasan dari integral Riemann karena jika fungsi f terintegral Riemann pada [a, b] maka fungsi f juga terintegral Lebesgue pada [a, b].

Definisi 3.13.1 (Darmawijaya. 2007)

Diketahui $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ruang ukuran lengkap dan hingga − σ. jika $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathrm{R}}$

(berbentuk kanonik):

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}$$

dan $E \in \mathcal{A}$, bilangan

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu \, (E \cap E_k)$$

disebut nilai integral – μ / integral Lebesgue umum fungsi sederhana μ pada E.

Jika bilangan

$$\left|\int_E \varphi \, d\mu \right| < \infty$$

Maka fungsi sederhana φ dikatakan terintegral – μ pada