II. LANDASAN TEORI

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1 Fungsi Bernilai Real

Fungsi bernilai real adalah fungsi yang domain dan rangenya adalah himpunan bagian dari real.

Definisi 2.1.2 Limit Fungsi

Jika f adalah suatu fungsi, maka

$$\lim_{t \to c} F(t) = L$$

Jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sehingga jika $0 < |t - c| < \delta$ berlaku

$$|F(t) - L| < \varepsilon$$

(Ayres,jr dan Mendelson,2004).

Definisi 2.1.3

Misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka $f(x)$, $g(x)$ mempunyai limit dan $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\lim_{x\to a} f(x) = L$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ apabila $0 < |x - a| < \delta_1$. Karena $\lim_{x\to a} g(x) = M$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ apabila $0 < |x - a| < \delta_2$.

Pilih $\delta = m \quad \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$, maka untuk $0 < |x - a| < \delta$ dipenuhi

$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

sehingga:

$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) - (g(x) - M)|$

$\leq |f(x) - L| - |g(x) - M|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$$

Sifat Limit fungsi

Jika $\lim_{x\to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = B$, maka berlaku:

- $\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$
- $\lim_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$
- $\lim_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = A.B$
- $\lim_{x\to a}\left(c.f(x)\right) = c.\lim_{x\to a} f(x) = c.A$

- $$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}; B\neq 0$$
- $$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}=A^B$$

(Ayres,jr dan Mendelson,2004).

Teorema 2.1.1 Kekontinuan Fungsi

Misalkan $A\subset\mathcal{R}$, fungsi f disebut kontinu di $c\in A$ untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $x\in A$ memenuhi $|x-c|<\delta$ maka $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$. Fungsi f disebut kontinu pada A, jika f kontinu di setiap titik $c\in A$.

Bukti :

Misalkan f kontinu di c, ambil $\varepsilon>0$ sebarang. Anggap $V=(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$, karena f kontinu di c maka terdapat lingkungan U_v dari c sehingga $f(x)\in V$, untuk setiap $x\in U_v$. Pilih $\delta>0$ sehingga $(c-\delta, c+\delta)\subset U_v$, maka untuk δ ini berlaku $f(x)\in V$, sehingga untuk $|x-c|<\delta$ maka $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$.

Diberikan sebarang (x_n) barisan yang konvergen ke c dan ambil $\varepsilon>0$ sebarang. Menurut hepotesis terdapat $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $x\in A$ memenuhi $|x-c|<\delta$ maka $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$. Karena (x_n) konvergen ke c, maka terdapat $N_0\in N$ sehingga $|x_n-c|<\delta$ bila $n\geq n_0$. Jadi untuk $n\geq n_0$ berlaku $|f(x_n)-f(c)|<\varepsilon$, sehingga $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$. Ini menunjukkan fungsi f kontinu di c.

Teorema 2.1.2 Kontinu Seragam

Misalkan $A\subset\mathcal{R}$ dan $f\colon A\to R$, f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat $\delta(\varepsilon)>0$ sehingga jika $x,u\in A$ memenuhi $|x-u|<\delta$ maka $|f(x)-f(u)|<\varepsilon$.

2.2 Vektor

Definisi 2.2.1 Ruang Vektor

Ruang vektor V adalah himpunan vektor tak kosong di mana dua operasi berlaku, penjumlahan dan perkalian skalar. Setiap dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dan kombinasi liniernya $\alpha\vec{a}$ dan $\beta\vec{b}$, α dan β bilangan real merupakan anggota dari V, dan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

- Operasi penjumlahan :
  1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
  3. $\vec{a} + 0 = \vec{a}$
  4. $\vec{a} + (\overline{-\vec{a}}) = 0$
- Operasi perkalian :
  1. $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$
  2. $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$
  3. $c(k\vec{a}) = (c\ \ )\vec{a}$
  4. $1\vec{a} = \vec{a}$

(Maddox, 1970).

Definisi 2.2.2 Fungsi Bernilai Vektor

Suatu fungsi F bernilai vektor dengan peubah real t memadankan tiap bilangan real t dengan suatu vektor $F(t)$.

Jadi

$$F(t) = f(t)i + g(t)j = \langle f(t), g(t) \rangle$$

dengan f dan g fungsi bernilai real

(Spiegel, 1990).

Definisi 2.2.3 Limit Fungsi Bernilai Vektor

Misalkan fungsi vektor $F(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$ terdefinisi pada selang terbuka di D yang memuat a, kecuali mungkin di a sendiri dan $L=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ vektor di R^n. Limit fungsi F jika t mendekati a, ditulis

$$\lim_{t \to a} \vec{F}(t) = L$$

dan didefinisikan sebagai berikut:

setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga

$$\left\| \vec{F}(t) - L \right\| < \varepsilon$$

Untuk semua t di daerah definisi fungsi $\vec{F}$ dan memenuhi $0 < |t - a| < \delta$.

Teorema 2.2.1 Limit Fungsi Bernilai Vektor

Misalkan $F(t) = f(t)i + g(t)j$, maka F memiliki limit di c jika dan hanya jika f dan g memiliki limit di c. Dalam hal ini berlaku:

$$\lim_{t \to c} F(t) = \left\lfloor \lim_{t \to c} f(t) \right\rfloor i + \left\lfloor \lim_{t \to c} g(t) \right\rfloor j$$

(Purcell dan Varberg, 1987).

Definisi 2.2.4 Norm

Misal diberikan sebarang partikel $x \in R^n$ dan $\boldsymbol{o} = (0,0,0)$ merupakan titik awal. Maka jarak atau norm antara x dan $\boldsymbol{o}$ dinotasikan dengan $\|x\|$ serta didefisikan sebagai:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 +,,, + x_n^2}$$

atau

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 Integral Riemann

Definisi 2.3.1 Partisi

Misalkan $f: I \to R$ terbatas dan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi I pada selang $[a, b]$, suatu himpunan berhingga $\{a = x_0, x_1, \dots., x_n = b\}$ sedemikian sehingga

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Norm partisi P yang dinyatakan dengan $\|P\|$ nilai terbesar diantara bilangan $(x_i - x_{i-1}), i = 1,2, \dots, n$. Maka definisi jumlah Riemann pada fungsi $f: I \to R$ adalah

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

(Bartle, 1992).

Definisi 2.3.2

Diberikan integral tertutup $[a, b]$, partisi Q disebut penghalus partisi P pada $[a, b]$ jika $P \subset Q$ (Herawan-Thobirin, 2008).

Teorema 2.3.1

Untuk setiap bilangan real $\delta > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga $\|P\| < \delta$

(Herawan-Thobirin, 2008).

Definisi 2.3.3 Jumlah Riemann Atas dan Jumlah Riemann Bawah

Misalkan A partisi P dari $[a, b]$ adalah terbatas. Untuk setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ dari P maka:

$m_k = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ dan $M_k = \sup \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Sehingga jumlah integral Riemann bawah dari f dengan partisi P adalah

$$L(f; P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

sedangkan jumlah integral Riemann atas adalah

$$U(f; P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

dengan $m_k = \inf f(I_k)$ dan $M_k = \sup f(I_k)$. Akibatnya

$$L(P; f) \leq S(P; f) \leq U(P; f)$$

Definisi 2.3.4 Integral Riemann Atas dan Integral Riemann Bawah

Misalkan f fungsi bernilai real yang terbatas dan terdefinisi pada $I: [a, b]$ dan $P = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ merupakan partisi dari I. Maka integral Riemann atas dan integral Riemann bawah secara bersamaan didefinisikan sebagai:

$$\inf U(P; f) = \int_a^{\bar{b}} f(x) d$$

dan

$$\text{Sup}\, L(P;f) = \int_{\bar{a}}^{b} f(x)d$$

Fungsi f dikatakan terintegralkan Riemann pada selang $[a,b]$ jika

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)d = \int_{\bar{a}}^{b} f(x)d$$

dan dinotasikan

$$\int_{a}^{b} f(x)d$$

Definisi 2.3.5 Integral Sebagai Limit

Diberikan fungsi f real dan terbatas pada $[a,b]$ untuk tiap partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dibentuk jumlah

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Di mana merupakan titik sebarang pada sebselang tertutup $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,2,..,n$. Bilangan real A disebut limit $S(P,f)$ untuk norm $\|P\| \to 0$ dan ditulis $\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f) = A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan dan sebarang pengambilan titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, terdapat $\delta > 0$ untuk semua partisi P pada [a,b] dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P; f - A)| < \varepsilon$$

Definisi 2.3.6 Integral Riemann

Andaikan f suatu fungsi yang didefiniskan pada selang tertutup $[a,b]$

Jika $\lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ ada

Maka f terintegralkan pada $[a, b]$

(Purcell dan Varberg, 1987).

Teorema 2.3.2 Keintegralan Riemann

Jika f terbatas pada $[a, b]$ dan ia kontinu di sana kecuali pada sejumlah terhingga titik, maka f terintegralkan pada $[a, b]$. Khususnya, jika f kontinu pada seluruh selang $[a, b]$ maka ia terintegralkan pada $[a, b]$

(Purcell dan Varberg, 1987).

Teorema 2.3.3 Keintegralan Riemann Fungsi Kontinu

Jika f kontinu pada $[a, b]$ maka f terintegralkan pada $[a, b]$.

Bukti:

Fungsi yang kontinu pada $[a, b]$ pasti terbatas pada $[a, b]$ dan kontinu seragam pada $[a, b]$. Karena f fungsi kontinu seragam pada $[a, b]$ maka diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap x, y □ $[a, b]$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

diberikan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi dari $[a, b]$, setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, f mencapai nilai maksimum M_k dan nilai minimum m_k, maka

$$f(u_k) = M_k \text{ dan } f(v_k) = m_k$$

diperoleh:

$$M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

akibatnya:

$$0 \leq U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_{k-1}, x_k) - \sum_{k=i}^{n} m_k \, (x_{k-1}, x_k)$$

$$= \sum_{k=i}^{n} (M_k - m_k) \, (x_{k-1}, x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \big(f(u_k) - f(v_k)\big) \, (x_{k-1}, x_k)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1}, x_k)$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

ini menunjukkan

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Teorema 2.3.4 Ketunggalan

Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ maka nilai integralnya tunggal.

Bukti:

Diketahui $f \in \mathcal{R}[a, b]$, diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan misal A_1 dan A_2 keduanya nilai intergal Riemann fungsi f. Maka akan ditunjukkan $A_1 = A_2$.

Karena A_1 merupakan nilai integral fungsi f pada $[a, b]$, maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a, b]$ dengan sifat $\|P_1\| < \delta_1$ berlaku

$$|S(P_1; f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan karena A_2 merupakan nilai integral fungsi f pada $[a, b]$, maka terdapat bilangan $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a, b]$ dengan sifat $\|P_2\| < \delta_2$ berlaku

$$|S(P_2; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih δ = min$\{\delta_1, \delta_2\}$, akibatnya jika P sebarang partisi pada $[a, b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$.

Akibatnya

$$|S(P_1; f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$|S(P_2; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - S(P; f) + S(P; f) - A_2|$$

$$\leq |A_1 - S(P; f)| + |S(P; f - A_2)|$$

$$\leq |S(P; f - A_1)| + |S(P; f - A_2)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena ε sebarang bilangan positif maka $A_1 = A_2$

(Herawan-Thobirin, 2008).

Teorema 2.3.5 Fungsi Monoton Integral Riemann

Misal $f:[a,b] \to R$ fungsi monoton, maka f terintegralan Riemann pada $[a,b]$.

Bukti:

Karena f terbatas pada $[a,b]$ dan misal diberikan $\varepsilon > 0$ berlaku $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ maka untuk tiap partisi P pada selang $[a,b]$ berlaku $0 \leq U(f,P) - L(f,P) \leq |P||f(b) - f(a)|$.

Karena f monoton, setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ diperoleh:

$$M_k - m_k = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

akibatnya:

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=i}^{n} (M_k - m_k)\,(x_{k-1}, x_k)$$

$$\leq |P| \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = |P| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Karena f monoton maka $f(x_k) - f(x_{k-1})$ keduanya bernilai positif atau keduanya bernilai negatif. Sehingga

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) \leq |P| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |P| \left| \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \right| = |P||f(b) - f(a)|$$

dengan demikian $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Teorema 2.3.6 Nilai Rata-rata (Mean) Untuk Integral Riemann

Misalkan *f* kontinu pada $[a,b]$. Maka terdapat *c* dalam $[a,b]$ sedemikian rupa sehingga:

$$\int_a^b f(x)d \ = (b-a)f(c)$$

(Ayres,jr dan Mendelson,2004)

Teorema 2.3.7   Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan fungsi *f* kontinu pada interval $[a,b]$ dan misalkan *F(x)* = $\int f(x)$ yaitu *F* adalah anti turunan dari *f* maka :

$$\int_a^b f(x)d \ = F(b) - F(a)$$

(Ayres,jr dan Mendelson,2004).

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari I sedemikian sehingga

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

Menurut teorema nilai rata-rata, pada setiap interval $[x_{k-1}, x_k]$ terdapat titik $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ sedemikian sehingga:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})f(t_k)$$

Misalkan m_k dan M_k adalah infimum dan supremum dari f pada $[x_{k-1}, x_k]$ maka

$$m_k(x_{k-1}, x_k) \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq M_k(x_{k-1}, x_k)$$

Untuk tiap k = 1,2,3,...,n. Dengan menjumlahkan suku-suku di tengah maka diperoleh

$$L(P, f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P, f)$$

selain itu dimiliki

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(x)d \leq U(P, f)$$

akibatnya

$$\left| \int_a^b f(x)d - [F(b) - F(a)] \right| < \varepsilon$$

Karena ini berlaku untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan

$$\int_a^b f(x)d = F(b) - F(a)$$

(Gunawan,2008).

Selain kriteria di atas, sifat lainnya yang dimiliki oleh integral Riemann pada fungsi bernilai real adalah sebagai berikut.

Teorema 2.3.8 Kelinearan Integral Riemann

Andaikan bahwa f dan g teritegralkan pada $[a,b]$ dan bakwa k konstanta. Maka k dan $f+g$ terintegralkan dan

(i). $\int_a^b k\ \ (x)d\ \ = k\int_a^b f(x)d$

(ii). $\int_a^b [f(x)+g(x)]d\ \ = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$

(Purcell dan Varberg, 1987).

Bukti:

i. Diketahui f $\mathcal{R}[a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan k merupakan konstanta.

Karena f $\mathcal{R}[a,b]$ maka terdapat $A = \int_a^b f(x)d$ dan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P,f) - A| < \varepsilon$$

Jika P sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P,k\ \ ) - A| = \left|(P)\sum_{i=1}^{n}(k\ \ )(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

$$= \left|(P)k\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

karena k konstanta maka

$$= k\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

$$= k|S(P,f) - A| < \varepsilon$$

$$= k\int_a^b f(x)d$$

ii. Diketahui f,g $\mathcal{R}[a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Karena $f \,\square\, \mathcal{R}[a,b]$ maka terdapat $A_1 = \int_a^b f(x)d$ dan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_1 pada $[a,b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P_1, f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan karena $g \,\square\, \mathcal{R}[a,b]$ maka terdapat $A_2 = \int_a^b f(x)d$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_2 pada $[a,b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P_2, f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $\delta = m \quad \{\delta_1, \delta_2\}$ akibatnya jika P sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ akibatnya

$$|S(P, f+g) - (A_1 - A_2)| = \left|(P)\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) - (A_1 - A_2)\right|$$

$$= \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) + g(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) - (A_1 - A_2)\right|$$

$$= \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) + (P)\sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) - (A_1 - A_2)\right|$$

$$\leq \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) - A_1)\right| + \left|(P)\sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}) - A_2)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Terbukti $(f+g) \,\square\, \mathcal{R}[a,b]$ dan $\int_a^b [f(x) + g(x)]d \;\; = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$

Teorema 2.4.9 Sifat Penambahan Selang

Jika f terintegralkan pada selang yang mengandung tiga titik yaitu a, b, c maka

$$\int_a^b f(x)d = \int_a^c f(x)d + \int_c^b f(x)d$$

Bagaimanapun urutan dari a, b, c (Purcell dan Varberg, 1987).