II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas beberapa konsep mendasar meliputi ruang vektor, ruang Bernorm dan ruang Banach, ruang barisan, operator *linear* (transformasi *linear*) serta teorema-teorema yang mendukung. Semua pembicaraan berada dalam bilangan *real* $\mathbb{R}$.

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1.1(Maddox, 1970).

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \quad \rightarrow X$ dan fungsi perkalian skalar $(.): F \quad \rightarrow X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku:

(1) $x + y = y + x$

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(3) ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$

(4) ada $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = \theta$

(5)$1. x = x$

(6) $\lambda(x + y) = \lambda \quad + \lambda$

(7)$(\lambda + \mu)x = \lambda \quad + \mu$

(8)$\lambda(\mu \quad) = (\lambda \quad)x$

2.2 Ruang Bernorm dan Ruang Banach

Definisi 2.2.1 (Rudin, 1987)

Fungsi nonnegatif $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ disebut norm jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$(a)\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$

$\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \theta$

$(b)\|\alpha \quad\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ $d \qquad x \in X$

$(c)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$

Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norm $\|.\|$, ditulis $(X, \|.\|)$ disebut ruang bernorm.

Definisi 2.2.2 (Mizrahi dan Sulivan,1949)

Barisan (x_n) di dalam ruang Bernorm disebut barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq N$ berlaku

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Definisi 2.2.3 (Mizrahi dan Sulivan,1949)

Barisan (x_n) di dalam ruang Bernorm disebut barisan konvergen jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga jika $n \geq N$ berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Definisi 2.2.4 (Maddox, 1970)

Suatu ruang vektor bernorm X dinamakan ruang Banach jika X lengkap. Kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cauchy dalam X konvergen jika

$$\|(x_n + x_m)\| \to 0 \ (n, m \to \infty),\ x_n \in x$$

maka terdapat $x \in X$ sehingga

$$\|(x_n - x)\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

2.3 Ruang Barisan

Definisi 2.3.1 (Soeparna, 2007)

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi:

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{x \in \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l^\infty = \left\{x \,\square\, \{x_j\} \,\square\, \omega: \sup_{j\geq 1} |x_j| < \infty\right\}$$

dan norm pada l^∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{j\geq 1} |x_j|.$$

Definisi 2.3.2 (Soeparna, 2007)

Misal p, q □ $(1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk x □ l^p dan y □ l^q

$$\left(x_j y_j\right)_{j \square N} \square\ l^{\infty} \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j y_j\right| \leq \|x\|^p \|y\|^q$$

Teorema 2.3.1 (Soeparna, 2007)

$l^p (1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang Bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l^{∞} merupakan ruang bernorm terhadap norm $\|.\|_{\infty}$.

Untuk setiap skalar α dan $\bar{x} = \{x_k\}, \{y_k\}$ □ l^{∞} diperoleh

(i) $\|\bar{x}\|_{\infty} = \underbrace{s}_{k \geq 1} |x_k| \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$|\bar{x}]_{\infty} = \underbrace{s}_{k \geq 1} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \bar{x} = \{0\} = \bar{0}$.

(ii) $\|\square\, \bar{x}\|_{\infty} = \underbrace{s}_{k \geq 1} |\square\, x_k| . \underbrace{s}_{k \geq 1} |x_k| = \square\, \|\bar{x}\|_{\infty}$

Karena $\|\bar{x}\|_{\infty} = \underbrace{s}_{k \geq 1} |x_k| < \infty$ maka $\|\square\, \bar{x}\|_{\infty} = \square\, \|\bar{x}\|_{\infty} < \infty$ atau

□ $\bar{x}$ □ l^{∞}.

(iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_{\infty} \leq \|\bar{x}\|_{\infty} + \|\bar{y}\|_{\infty}\, d \quad \|\bar{x} + \bar{y}\|_{\infty} < \infty$ yaitu

$\bar{x} + \bar{y}$ □ l^{∞}.

Berdasarkan (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa l^{∞} merupakan ruang linear dan $\|.\|_{\infty}$ norm pada l^{∞}. Dengan kata lain $(l^{\infty}, \|.\|_{\infty})$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\bar{x} = \{x_k\}$, $\bar{y} = \{y_k\}$ □ l^p dan skalar α.

Diperoleh :

(i) $\|\bar{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\bar{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap

$\Leftrightarrow \bar{x} = \{0\} = \tilde{0}.$

(ii) $\|\square\, \bar{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha \;\; _k|^p\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \square\, \|x\|_p$

Jelas bahwa $\|\square\, \bar{x}\|_\infty < \infty$.

(iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} + \{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain $(l^p, \|.\|_p)$ ruang Bernorm.

Teorema 2.3.2 (Kreyszig, 1978)

Diberikan ruang barisan l^p dengan $1 \leq p \leq \infty$

a. Jika $x \square l^p, y \square l^q$ dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p maka

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

b. Jika $x \square l^1, y \square l^\infty$ maka

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$$

Bukti :

a. Akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|}{\|x\|_p}\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q\right\}$$

$$= \frac{1}{p}\frac{1}{\|x\|_p{}^p}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\|y\|_q{}^q}\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

b. Akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$

Jelas bahwa $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i|$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \sup_{i\geq 1} |y_i| = \|x\|_1 \|y\|_\infty$$

Jika $p = q = 2$, pertidaksamaan di atas disebut pertidaksamaan *Cauchy-Schwarz*. Teorima ini sering juga dinamakan Pertidaksamaan *Holder*.

Teorema 2.3.3 (Soeparna, 2007)

Jika bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Banach.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Bernorm. Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang Bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p < \infty$, diambil sebarang barisan Cauchy

$\{\overline{x}^{(n)}\}$ □ l^p dengan

a) $\overline{x}^{(n)} = \{\overline{x}^{(n)}\} = \left(x_1{}^{(n)}, x_2{}^{(n)}, x_3{}^{(n)}, \dots\right)$

   Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$. Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli *m*, *n* > 0 diperoleh $\left|x_k{}^{(m)} - x_k{}^{(n)}\right|^p < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap *k*. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k{}^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehungga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan (b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya dibentuk barisan $\bar{x} = (x_k)$. Menurut ketidaksamaan Minkowski.

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$. Berdasarkan (a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d) $\left\|\bar{x} - \bar{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

maka barisan $\left\{\bar{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\bar{x}$. Berdasarkan hasil (c) dan (d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{\bar{x}^{(n)}\right\} \in l^p$ konvergen ke $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $(l^p, \|.\|_p)$, $(1 \leq p < \infty)$, merupakan ruang Banach.

Definisi 2.3.3 (Ruckle, 1991)

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (Banach Komplit) jika X merupakan ruang Banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n$, $x = (x_k) \in X$ kontinu.

Contoh ruang BK (Banach Komplit) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

2.4 Operator dan Transformasi

Definisi 2.4.1(Kreyszig, 1989)

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang Bernorma disebut operator.

Definisi 2.4.2(Kreyszig, 1989)

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.

b. Operator $A \square X \to Y$ dikatakan linier jika untuk setiap $x, y \square X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha \quad) = \alpha \qquad$ dan $A(x + y) = A \quad + A \quad$.

Definisi 2.4.3 (Kreyszig, 1989)

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang Bernorm.

a. Operator $A \square X \to Y$ dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \square R$ dengan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x \square X$ berlaku $\|A \quad \| \leq M\|x\|$.

b. Operator A dikatakan kontinu di $x \square X$ jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \square X$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\|A \quad - A \quad \| < \varepsilon$.

c. Jika A kontinu di setiap $x \square X$, A disebut kontinu pada X.

Teorema 2.4.1 (Ruckle, 1991)

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas *field* yang sama maka $l_c(X, Y)$ merupakan ruang *linier*.

Bukti :

Diambil sebarang $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β, *a*, *b* untuk setiap *x,y* $\in X$ diperoleh

$$(\alpha \quad + \beta \quad)(a \quad + b \quad) = \alpha \quad (a \quad + b \quad) + \beta \quad (a \quad + b \quad)$$

$$= \alpha \qquad + \alpha \qquad + \beta \qquad + \beta$$

$$= \alpha \qquad + \alpha \qquad + a \qquad + b$$

$$= a \qquad + a \qquad + b \qquad + b$$

$$= a(\alpha \quad + \beta \quad)x + b(\alpha \quad + \beta \quad)y$$

Jadi $(\alpha \quad + \beta \quad)$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga

$$\|(\alpha \quad + \beta \quad)x\| = \|\alpha \quad + \beta \quad \|$$

$$\leq \|\alpha \quad \| + \|\beta \quad \|$$

$$= |\alpha|\|A \quad \| + |\beta|\|B \quad \|$$

$$\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|$$

$$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$$

$$= M\|x\|$$

Dengan demikian $\alpha \quad + \beta$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Jadi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ linear.

Teorema 2.4.2 (Maddox, 1970)

Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c\big((X, Y), \|.\|\big)$ ruang Banach.

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\}$ □ $\mathcal{L}_c\big((X, Y), \|.\|\big)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat *n₀* □ *N* sehingga jika *m*, *n* □ *N* dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal untuk setiap x □ X dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$

$\leq \|A_m - A_n\| \|x\| < \varepsilon_0 \|x\|$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilih bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \|x\| < \varepsilon$) ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap *m*, *n* $\in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0 \|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\}$ □ Y dan *Y* lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen, katakan ke y_x □ Y.

Jadi $\lim_{n\to\infty} A_n\, x = y_x$ dan *x* menentukan suatu operator *A* sehingga $A \quad = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$.

Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n\, z = y_z$ dan *z* menentukan suatu operator *A* sehingga $A \quad = y_z$.

Untuk setiap skalar *a* dan *b*, diperoleh $ax + bz \in X$.

$\lim_{n\to\infty} A_n\, (a \quad + b \quad) = y_{a \quad + b}$ dan *ax+ bz* menentukan suatu operator *A* sehingga *A(ax+ bz)* = $y_{a \quad + b}$.

Jadi $A(a \quad + b \quad) = \lim_{n\to\infty} A_n\, (a \quad + b \quad)$

$= \lim_{n\to\infty} (a \quad _n x + bA_n z)$

$= \lim_{n\to\infty} a \quad _n x + \lim_{n\to\infty} b \quad _n z$

$= a \lim_{n\to\infty} A_n\, x + b \lim_{n\to\infty} A_n\, z$

$= a y_x + b y_z$

$$= aA_x + bA_z$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - A_n x\|$$

$$= \|A_m x - A\ \|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0 \|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena *Am* dan $(A_m - A)$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka *A* terbatas (kontinu).

Jadi A $\mathcal{L}_c\big((X, Y), \|.\|\big)$ dengan kata lain $\mathcal{L}_c\big((X, Y), \|.\|\big)$ ruang Banach.

Definisi 2.4.4 (Kreyszig, 1978)

Diberikan ruang Bernorm X dengan *field* ℝ.

a. Pemetaan $f: X \to$ ℝ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi linier kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis X $l_c(X, Y)$.

Teorema 2.4.3 (Ruckle, 1991)

Misal *X* dan *Y* ruang BK (Banach Komplit). Jika *A* matriks tak hingga yang memetakan *X* ke *Y* maka *A* kontinu.

Bukti :

Misal $A = (a_i\ )$

$X = (x_j)$ X

$y = (y_i)$ Y dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_i\ x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada *X*. Jelas bahwa setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_i\ x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan α R

$$f_m(s) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_i\ s_j \qquad f_m(t) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_i\ t_j$$

$$(i) f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_i\ s_j + \sum_{j=1}^{m} a_i\ t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_i\ s_j + a_i\ t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_i\ (s_j + t_j)$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_i\ (s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)\ (f_m)(\alpha\ \ ) = \sum_{j=1}^{m} a_i\ (\alpha\ \ _j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha(a_i\ x_j)$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{m} a_i\ x_j$$

$$= \alpha(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti merupakan fungsi linear pada *X*.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada *X*.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada *X*.

Diketahui *X* ruang BK maka terdapat *M* > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu,

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_i \;\; x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_i\;||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_i\;| M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$$f_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \;\; x_j{}^{(n)}$$

Atau

$$A^{\;(n)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(n)} \\ x_2{}^{(n)} \\ x_3{}^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \;\; x_1{}^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_2{}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i \;\; x_j{}^{(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$= A(x)_i, \;\; \forall i$$

Jika *y* = *Ax* maka bukti lengkap.

Definisi 2.4.5 (Berberian, 1996)

a. Matriks tak hingga $A = (a_i\ )$ adalah matriks dengan $a_i \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak tak hingga.

b. Jika $A = (a_i\ )$ dan $B = (b_i\ )$ masing-masing matriks tak hingga dan α skalar maka $A + B = (a_i\ + b_i\ )$, $\alpha\ \ = (\alpha\ \ _i\ )$, dan $A\ \ = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{i} b_k\ )$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i} b_k \in R$.