II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang berhubungan dengan penelitian ini sehingga dapat dijadikan sebagai landasan berfikir dalam melakukan penelitian dan akan mempermudah dalam hal pembahasan hasil utama pada bab berikutnya. Adapun teori - teori tersebut mencakup pejelasan ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorm, ruang Banach, operator linear, operator pada ruang Hilbert dan lain sebagainya.

2.1 Ruang Vektor

Secara umum, misalkan terdapat suatu himpunan tak kosong dan suatu lapangan bilangan real maka diperoleh definisi suatu ruang vektor sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Ruang Vektor

Diketahui $(\mathcal{V}, +)$ grup komutatif dan $(\mathcal{F}, \oplus, .)$ lapangan dengan elemen identitas 1. $\mathcal{V}$ disebut ruang vektor (*vector space*) atas $\mathcal{F}$ jika ada operasi luar * antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{V}$ dan $\alpha \in \mathcal{F}$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x \in \mathcal{V}$ yang memenuhi sifat – sifat :

1. $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$;
2. $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$;

3. $(\alpha.\beta) * x = \alpha * (\beta * x)$;
4. $1 * x = x$;

untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ (Darmawijaya, 2007).

Anggota ruang vektor $\mathcal{V}$ disebut vektor (*vector*) sedangkan anggota – anggota $\mathcal{F}$ disebut skalar.

Ruang vektor yang dimaksudkan yaitu ruang vektor atas sistem bilangan real atau $\mathbb{R}$ atas sistem bilangan kompleks $\mathcal{C}$. Karena pembicaraan pada ruang vektor real atau ruang vektor kompleks, maka penulisan skalar (bilangan nol) ditulis dengan 0 sedangkan vektor nol ditulis dengan θ. Selanjutnya, sifat – sifat dasar ruang vektor diberikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.1.2

Jika $\mathcal{V}$ suatu ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$, maka berlaku pernyataan – pernyataan berikut :

1. Untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$ terdapat tepat satu $z \in \mathcal{V}$ sehingga $x + z = y$;
2. Jika z $\in \mathcal{V}$ dan $z + z = z$, maka $z = \theta$;
3. $\alpha \quad = \theta$ untuk setiap skalar α;
4. $0x = \theta$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$;
5. $(-1)x = -x$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$;
6. Jika α suatu skalar dan $x \in \mathcal{V}$ sehingga $\alpha \quad = \theta$ maka $\alpha = 0$ atau $x = \theta$ (Darmawijaya, 2007).

2.2 Ruang Vektor Bagian

Misalkan di dalam suatu ruang vektor terdapat suatu himpunan bagian tak kosong maka dapat terbentuk suatu ruang vektor bagian. Berikut ini akan dijelaskan tentang definisi suatu ruang vektor bagian.

Definisi 2.2.1 Ruang Vektor Bagian

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Jika himpunan $\mathcal{W}$ terhadap operasi – operasi yang sama dengan operasi di $\mathcal{V}$ juga merupakan ruang vektor atas $\mathcal{F}$, maka $\mathcal{W}$ disebut ruang vektor bagian (*vector sub - space*) dari $\mathcal{V}$ (Darmawijaya, 2007).

Jika $\mathcal{W}$ merupakan himpunan bagian tak kosong pada ruang vektor $\mathcal{V}$ berlaku sifat seperti ditunjukkan dalam Teorema berikut.

Teorema 2.2.2

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \neq \theta$. Himpunan $\mathcal{W}$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ jika hanya jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{W}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ berlaku

$$\alpha \quad + \beta \quad \in \mathcal{W}.$$

(Darmawijaya, 2007).

Teorema berikut dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian dari ruang vektor merupakan ruang vektor bagian dari ruang vektor tersebut.

Teorema 2.2.3

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y$ masing - masing ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ maka

$$\mathcal{X} + Y = \{m + n : m \in \mathcal{X}, n \in Y\},$$

merupakan ruang vektor bagian yang memuat $\mathcal{X}$ dan Y sebagai ruang vektor bagiannya (Darmawijaya, 2007).

Selanjutnya, dapat dilihat dalam teorema berikut yang mendukung tentang ruang vektor bagian.

Teorema 2.2.4

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor terhadap lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y \subset \mathcal{V}$ masing- masing ruang vektor bagian dan $\cap Y = \{\theta\}$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{X} + Y$ terdapat dengan tunggal $m_1 \in \mathcal{X}$ dan $n_1 \in Y$ sehingga $x = m_1 + n_1$ (Darmawijaya, 2007).

Jika $\mathcal{X}$ dan Y masing – masing ruang bagian ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{X} \cap Y = \{\theta\}$, maka untuk selanjutnya ruang bagian $\mathcal{X} + Y$ dituliskan dengan $\mathcal{X} \oplus Y$. Ruang vektor bagian $\mathcal{X} \oplus Y$ disebut ruang bagian jumlahan langsung $\mathcal{X}$ dan Y.

Diberikan ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Jika diberikan sebarang $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ dan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{F}$ maka dapat dipahami bahwa

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

merupakan anggota $\mathcal{V}$. Selanjutnya, mengingat $\mathcal{V}$ ruang vektor, maka diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.2.5

Diberikan $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Jika $x_k \in \mathcal{V}$ dan $\lambda, \alpha_k, \beta_k \in \mathcal{F}$ untuk setiap $k = 1,2, \ldots, n$ maka benar bahwa :

1. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k$;
2. $\lambda(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) x_k$;
3. $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k) x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x$;
4. $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k) (\sum_{j=1}^{m} x_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k \, x_j$ (Darmawijaya, 2007).

2.3 Kombinasi Linear, Bebas Linear, dan Merentang

Pada bagian sebelumnya dijelaskan tentang bentuk jumlahan $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ maka bentuk jumlahan tersebut dapat dijelaskan sebagai kombinasi linear dan selengkapnya dijelaskan dalam Definisi 2.3.1

Definisi 2.3.1 Kombinasi Linear

Misalkan $\mathcal{V}$ adalah suatu ruang vektor atas lapangan riil $\mathbb{R}$. Suatu vektor x dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor $x_1, \ldots, x_n$ dalam $\mathcal{V}$ jika vektor – vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (Friedberg, 1989).

Selanjutnya, koleksi semua kombinasi linear vektor – vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ dinotasikan dengan *span* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Jika suatu vektor merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor pada ruang vektor maka berkaitan dengan kejadian ini diperoleh definisi merentang dan bebas linear berikut.

Definisi 2.3.2 Merentang

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah vektor – vektor pada ruang vektor $\mathcal{V}$ dan jika masing – masing vektor pada $\mathcal{V}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka vektor – vektor ini merentang $\mathcal{V}$ (Anton, 1987).

.

Definisi 2.3.3 Bebas Linear

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor-vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ atau $x_1, x_2, \ldots, x_n \subset \mathcal{V}$ dikatakan bebas linear (*linearly independent*) jika $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ dan

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_n\, x_n = \theta$$

berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ (Darmawijaya, 2007).

Berkaitan dengan bebas linear, berikut Teorema yang berhubungan dengan bebas linear.

Teorema 2.3.4

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linear jika dan hanya jika setiap persamaan

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

berakibat $\alpha_k = \beta_k$ untuk setiap k (Darmawijaya, 2007).

2.4 Basis

Selanjutnya berdasarkan pengertian pada bagian 2.3, maka dapat disusun pengertian mengenai basis yang dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.4.1 Basis

Jika $\mathcal{V}$ adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor – vektor pada $\mathcal{V}$, maka S disebut basis untuk $\mathcal{V}$ jika :

1) S bebas linear;
2) S merentang $\mathcal{V}$ (Anton, 1987).

2.5 Fungsi Linear

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.5.1

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing-masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Fungsi $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ disebut fungsi linear jika

1. f fungsi aditif (*additive*)

   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$, dan
2. f fungsi homogen (*homogeneous*)

   $f(\alpha\ \ ) = \alpha\ \ (x)$ untuk setiap α dan vektor $x \in \mathcal{V}$ (Darmawijaya, 2007).

Berdasarkan Definisi 2.5.1 maka dapat dipahami teorema berikut ini.

Teorema 2.5.2

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing-masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama ($\mathbb{R}$ atau C). Fungsi $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear jika dan hanya jika untuk sebarang skalar α, β dan vektor $x, y \in \mathcal{V}$, berlaku

$$f(\alpha\ \ + \beta\ \ ) = \alpha\ \ (x) + \beta\ \ (y).$$

(Darmawijaya, 2007)

Untuk selanjutnya, jika diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ masing – masing ruang vektor dan $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear maka yang dimaksud dengan ruang jelajah (*range space*) adalah sebagai berikut.

Definisi 2.5.3

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka $R_f = f(\mathcal{V})$ merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{W}$. Himpunan R_f disebut ruang jelajah (*range space*) fungsi f (Darmawijaya, 2007).

Selanjutnya, pada Teorema di bawah ini akan diterangkan sifat – sifat dasar fungsi linear .

Teorema 2.5.4

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Jika $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear maka

1. $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$;
2. $f(x - y) = f(x) - f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$;
3. $f(\theta) = \bar{\theta}$, dengan $\theta \in \mathcal{V}$ dan $\bar{\theta} \in \mathcal{W}$ masing – masing menyatakan vektor nol;
4. $f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$ untuk setiap skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dan vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ $(\text{Darmawijaya}, 2007)$.

Pada Teorema di bawah ini akan dijelaskan mengenai ruang nol (*null space*).

Teorema 2.5.5

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka

$$N \quad = \{x \in \mathcal{V}: \ f(x) = \bar{\theta}\} \text{ dan } S = \left(\mathcal{V} - N_f\right) \cup \{\theta\}$$

masing – masing merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{V}$. Selanjutnya, himpunan N_f disebut ruang nol (*null space*) fungsi f (Darmawijaya, 2007).

2.6 Matriks

Vektor x dapat dituliskan sebagai

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

yang selanjutnya disebut dengan vektor baris dan dapat ditulis sebagai

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

yang disebut dengan vektor kolom.

Definisi 2.6.1 Matriks

Matriks didefinisikan sebagai suatu susunan persegi panjang dari bilangan – bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut matriks *m* kali *n* (ditulis *m x n*) karena memilikki *m* baris dan *n* kolom. Sebagai aturan, kurung siku [ ], kurung biasa ( ) atau bentuk|| || digunakan untuk mengurangi susunan persegi panjang dari bilangan – bilangan tersebut (Hadley, 1992).

Berikut dijelaskan beberapa jenis matriks antara lain matriks identitas, matriks skalar.

Definisi 2.6.2 Matriks Identitas

Matriks identitas berordo n yang ditulis I atau I_n adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai angka – angka satu sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atas menuju kanan bawah) dan nol tempat yang lainnya.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(Hadley, 1992).

Definsi 2.6.3 Matriks Skalar

Untuk setiap skalar λ, matriks bujur sangkar

$$\boldsymbol{S} = \|\boldsymbol{\lambda\delta_{i_i}}\| = \boldsymbol{\lambda}$$

disebut matriks skalar (Hadley, 1992).

2.7 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan ruang yang dibangun oleh aksioma – aksioma tertentu seperti dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.7.1 Ruang Metrik

Diberikan sebarang himpunan tak kosong X

1. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat – sifat
   a) $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$;
   b) $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
   c) $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$, dan
   d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$;

   disebut metrik (*metric*) atau jarak (*distance*) pada X.
2. Himpunan X dilengkapi dengan suatu metrik d dituliskan dengan (X,d) disebut ruang metrik (*metric space*). Jika metriknya telah diketahui (tertentu), maka ruang metrik cukup ditulis dengan X.
3. Anggota ruang metrik (X,d) disebut titik (*point*) dan untuk setiap $x, y \in X$ bilangan *nonnegatif* $d(x,y)$disebut jarak (*distance*) titik x dengan titik y (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.8.3 Ruang Metrik Lengkap

Ruang metrik dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan *Cauchy* di dalamnya konvergen (Darmawijaya, 2007).

2.8 Barisan

Untuk suatu ruang metrik (X, d) barisan di dalam X ditulis dengan $\{x_n\}$, dapat diartikan sebagai fungsi dari ℕ ke X.

Definisi 2.8.1 Barisan

Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen (*convergent*) jika ada x □ X sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n > n_0$ (bergantung pada ε) , sehingga untuk setiap bilangan asli berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

dikatakan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x atau barisan $\{x_n\}$ mempunyai limit x untuk $n \to \infty$ dan dituliskan dengan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Sedangkan titik x disebut titik limit barisan $\{x_n\}$. Barisan yang tak konvergen dikatakan divergen (*divergent*) (Darmawijaya, 2007).

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari barisan konvergen,

Contoh 2.1 :

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ merupakan barisan yang konvergen dalam ℝ

Penyelesaian :

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat n_0 ℕ sedemikian sehingga berlaku :

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Jika $n > n_0$´ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, sehingga diperoleh

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Oleh karena itu, barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0 dalam ℝ.

Selanjutnya, teorema di bawah ini berhubungan dengan barisan konvergen dan titik limit.

Teorema 2.8.2

Jika barisan $\{x_n\}$. di dalam suatu ruang metrik (X, d) konvergen, maka titik limitnya tunggal (Darmawijaya, 2007).

2.9 Barisan *Cauchy*

Untuk membuktikan bahwa suatu barisan merupakan barisan konvergen memerlukan definisi yang dapat digunakan untuk mengetahuinya, minimal dengan perkiraan limit. Definisi tersebut berguna untuk mengukur kekonvergenan jika limit tidak dapat diperkirakan. Pengukuran yang dimaksud adalah pengukuran *Cauchy* untuk suatu barisan.

Definisi 2.9.1 Barisan *Cauchy*

Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan *Cauchy* atau barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $, m > n_0$, maka berlaku $|\{x_n\} - \{x_m\}| \leq \varepsilon$ dinotasikan dengan $\lim_{n,m\to\infty} |\{x_n\} - \{x_m\}| = 0$ (Darmawijaya, 2007).

Berikut ini akan dijelaskan mengenai contoh dari barisan *Cauchy*.

Contoh 2.2 :

Misalkan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ suatu barisan, akan ditunjukkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan *Cauchy*.

Penyelesaian :

Misalkan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah suatu barisan. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu n_0 □ ℕ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ dan berlaku $\frac{1}{n_0} > \frac{\varepsilon}{2}$ karena $n, m > n_0$ diperoleh

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Oleh karena itu,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi, barisan $\{x_n\} = \left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan *Cauchy*.

Dari definisi dan teorema pada bagian sebelumnya mengenai barisan konvergen dan barisan *Cauchy* maka teorema di bawah ini masih merupakan pendukung dari barisan *Cauchy* dalam ruang metrik.

Teorema 2.9.2

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang metrik (X, d) merupakan barisan *Cauchy* (Darmawijaya, 2007).

2.10 Ruang Bernorma

Ruang linear juga merupakan ruang metrik. Berikut terlebih dahulu akan diperlihatkan definisi ruang linear yang diikuti dengan pendefinisian ruang linear bernorma.

Definisi 2.10.1 Ruang Bernorma

Diberikan ruang linear $\mathcal{K}$ fungsi $x \in \mathcal{K} \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ yang mempunyai sifat - sifat :

1. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{K}$;

   $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$ (0 vektor nol);

2. $\|\alpha \ \| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap skalar ~ dan $x \in \mathcal{K}$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk $x, y \in \mathcal{K}$;

disebut norma (*norm*) pada $\mathcal{K}$ dan bilangan *nonnegatif* $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear $\mathcal{K}$ yang dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$ disebut ruang bernorma (*normed space*) dan dituliskan singkat dengan $(\mathcal{K}, \|.\|)$ atau $\mathcal{K}$ asalkan normanya telah diketahui (Darmawijaya, 2007).

2.11 Ruang Banach

Teori ruang bernorma, merupakan salah satu konsep penting yang diperoleh dari kegunaan ruang metrik pada ruang linear atau ruang vektor.

Definisi 2.11.1 Ruang Banach

Ruang Banach (*banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) (Darmawijaya, 2007).

2.12 Ruang Hilbert

Pada suatu ruang vektor yang berdimensi hingga dapat didefinisikan suatu hasil kali antara vektor-vektor pada ruang vektor yang didefinisikan secara aksiomatis. Definisi berikut akan diberikan pada suatu ruang vektor atas lapangan real dan ruang *pre – Hilbert.*

Definisi 2.12.1 Ruang *Pre - Hilbert*

Diketahui $\mathcal{K}$ ruang linear

1. Fungsi $\mathcal{K} \quad \to C$ dengan rumus

$$(x, y) \in \mathcal{K} \quad \to \langle x, y\rangle \in C$$

yang memenuhi sifat – sifat :

(a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;

(b) $\langle \alpha \quad , y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

(c) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{K}$ dan skalar ~ dan

(d) $\langle x, x\rangle > 0$ jika dan hanya jika $x \neq 0$;

disebut *inner product* atau *dot-product*, atau *scalar product* pada $\mathcal{K}$.

2. Ruang linear $\mathcal{K}$ yang diperlengkapi dengan suatu *inner product* disebut ruang *pre - Hilbert* (*pre - Hilbert space*) atau ruang *inner-product* (*inner product space*) (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.12.1 telah menjelaskan berkaitan dengan ruang Pre – Hilbert. Selanjutnya, akan dijelaskan definisi ruang Hilbert.

Definisi 2.12.2 Ruang Hilbert

Ruang Hilbert (*Hilbert space*) adalah ruang *pre – Hilbert* yang lengkap (Darmawijaya, 2007).

Untuk lebih memahami pengertian ruang Hilbert, dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 2.3 :

ℓ^2 merupakan ruang Hilbert terhadap *inner product* :

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

untuk setiap $\tilde{x} = \{x_k\}; \tilde{y} = \{y_k\} \in \ell^2$.

Bukti :

Untuk setiap $\tilde{x} = \{x_k\}; \tilde{y} = \{y_k\}, \tilde{z} = \{z_k\}; \in \ell^2$ dan skalar α yang memenuhi sifat – sifat :

(a) $\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} y_k \bar{x}_k} = \langle\tilde{y}, \tilde{x}\rangle$;

(b) $\langle\alpha\tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha x_k \bar{y}_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k = \alpha\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle$;

(c) $\langle\tilde{x} + \tilde{y}, z\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)\overline{z_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{z_k} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \overline{z_k} = \langle\tilde{x}, z\rangle + \langle\tilde{y}, z\rangle$;

untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{K}$ dan skalar ~ dan

(d) $\tilde{x} \neq 0 \Leftrightarrow$ ada i sehingga ada $x_i \neq 0 \Leftrightarrow \langle\tilde{x}, \tilde{x}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^2 > 0$

Jadi tanda $\langle . , . \rangle$ tersebut merupakan *inner – product* dan oleh karena itu pada ℓ^2 merupakan ruang *inner – product* terhadap $\langle . , . \rangle$.

Contoh 2.4 :

Ruang linear C^n dan $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Hilbert terhadap *inner product*:

$$\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

untuk setiap $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \tilde{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_1\} \in C^n(\mathbb{R}^n)$.

Contoh 2.4 merupakan kejadian khusus contoh 2.3. Oleh karena itu, cukup dengan membuktikan bahwa ℓ^2 merupakan ruang Hilbert. Diambil sebarang barisan *Cauchy* $\tilde{x}^{(n)} \in \ell^2$ dan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Oleh karena itu, terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli m, n $\geq n_0$ benar bahwa :

$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\| < \varepsilon$ atau $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$.

Oleh karena itu, jika m, n $\geq n_0$ maka berlaku :

$$\left\|\tilde{x}^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right\| < \varepsilon$$

untuk setiap k $\mathcal{N}$. Jadi untuk setiap k $\mathcal{N}$, $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ merupakan barisan *Cauchy*.

Oleh karena itu, $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ konvergen ke suatu bilangan x_k

$\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$ $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Kemudian dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$ dan diperoleh :

$$\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_k^{(m)} - \tilde{x}^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_k^{(m)} - \tilde{x}_k^{(n)}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \qquad (2.1)$$

yang berarti $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Selanjutnya untuk, n$\geq n_0$

$$\|\tilde{x}\| = \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| \leq \left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| + \left\|\tilde{x}^{(n)}\right\| < \infty \qquad (2.2)$$

atau $\tilde{x} = \ell^2$.

Berdasarkan (2.1) dan (2.2) dapat disimpulkan bahwa terbukti ℓ^2merupakan ruang *pre-Hilbert* yang lengkap atau ℓ^2merupakan ruang Hilbert.

2.13 Operator Linear

Operator merupakan operator dalam fungsi real yaitu fungsi dari ruang vektor ke ruang vektor. Selanjutnya akan dibahas mengenai operator linear.

Definisi 2.13.1 Operator Linear

Suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathfrak{D}(T)$ dan daerah hasil $\square(T)$adalah suatu operator linear jika memenuhi:

1. $\mathfrak{D}(T)$ dan $\square(T)$ berada pada ruang vektor atas lapangan yang sama;
2. Untuk semua $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ dan skalar α berlaku $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha\ \ ) = \alpha\ \ (x)$ (Darmawijaya, 2007)

2.14 Operator Pendamping

Operator yang dimaksudkan disini yaitu operator dari ruang Hilbert ke ruang Hilbert. Definisi berikut ini menjelaskan tentang operator pendamping atau operator *adjoint* terhadap operator lain, karena berdasarkan sifat – sifat khusus operator pendamping maka operator dapat dibedakan jenis – jenisnya.

Definisi 2.14.1 Operator Adjoint

Diberikan dua ruang Hilbert $\mathcal{H}$dan K. Untuk setiap operator $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ terdapat $T^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ sehingga

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in K$. Operator T^* disebut operator *adjoint* (*adjoint operator*) atau operator pendamping terhadap operator T (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.14.1 didukung dengan Teorema berikut.

Teorema 2.14.2

Diketahui $\mathcal{H}$ dan K masing- masing ruang Hilbert. Untuk setiap $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ terdapat $T^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ tunggal sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in K$ berakibat

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

(Darmawijaya, 2007).

Selanjutnya sifat – sifat dasar operator pendamping tertuang dalam Teorema berikut.

Teorema 2.14.3

Diberikan dua ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan K. Jika $T, \mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ dan α sebarang skalar maka

1. $(T + \mathcal{S})^* = T^* + \mathcal{S}^*$;
2. $(\alpha\ )^* = \bar{\alpha}T^*$;
3. $T^{**} = (T^*)^* = T$;
4. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$;
5. $TT^* = O \leftrightarrow T = O$ (O operator nol) (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.14.4

Diketahui $\mathcal{H}$,K dan P masing – masing ruang Hilbert. Jika $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, K)$ dan $\mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(K, P)$ maka $(\mathcal{S}T)^* \in \mathcal{L}_c(P, \mathcal{H})$ dan

$$(\mathcal{S}T)^* = \mathcal{S}^*T^*.$$

Selanjutnya akan dijelaskan beberapa jenis operator $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$ pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ditinjau berdasarkan hubungannya dengan operator T^*. I adalah operator identitas pada $\mathcal{H}(Ix = x$, untuk setiap $x \in \mathcal{H}$) (Darmawijaya, 2007)

2.15 Operator pada Ruang Hilbert

Beberapa jenis operator pada ruang Hilbert $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_c(\mathcal{H},\mathcal{H})$ ditinjau berdasarkan hubunganngya dengan operator T^*. I adalah operator identitas pada $\mathcal{H}$ ($Ix = x$, untuk setiap $x \in \mathcal{H}$).

Definisi 2.15.1 Operator pada Ruang Hilbert

Diketahui $\mathcal{H}$ suatu ruang Hilbert $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ disebut :

1. Operator isometrik (*isometric operator*) jika $T^*T = I$;
2. Operator uniter (*unitary operator*) jika $T^*T = TT^* = I$;
3. Operator mandiri (*self adjoint operator*) jika $T^* = T$;
4. Operator proyeksi (*projection operator*) jika$T^* = T$ dan $T^2 = T$;
5. Operator normal (*normal operator*) jika $T^*T = TT^*$ (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.15.2

Misalkan $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operator linear terbatas pada ruang Hilbert Kompleks $\mathcal{H}$. Maka *Hilbert- operator adjoint* $T^*: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dapat didefinisikan dengan

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \text{ untuk semua } x, y \in \mathcal{H};$$

Self - adjoint atau *Hermitian* jika $T = T^*$ (Kreyszig, 1989)

Definisi 2.15.3

Operator linear terbatas $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dapat juga ditulis :

1. *Self-adjoint* atau *Hermitian* jika $T^{*} = T$;
2. Uniter jika T bijektif $T^{*} = T^{-1}$;
3. Normal jika $T\,T^{*} = T^{*}T$ (Kreyszig, 1989).

2.16 Ketidaksamaan *Cauchy – Schawrtz*

Berkaitan dengan norma yang berlaku pada suatu ruang vektor. Berikut ini akan dijelaskan mengenai teorema-teorema yang berlaku pada norma, salah satunya yaitu ketidaksamaan *Cauchy-Scwartz*.

Teorema 2.16.1

Jika u dan v adalah vektor pada sebuah ruang hasil kali dalam maka :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$$

(Anton, 1987).

2.17 Barisan Monoton

Berikut definisi dan teorema barisan monoton naik dan monoton turun

Definisi 2.17.1 Barisan Monoton

A barisan monoton dari operasi linear *self – adjoint* T_n pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Barisan T_n pada ruang Hilbert $\mathcal{H}$ disebut barisan T_n monoton naik jika

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots$$

atau monoton turun jika

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \geq \cdots$$

A barisan monoton naik seperti yang dimiliki (A sama dengan teorema yang ada dari barisan monoton turun) (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.17.2

Misalkan (T_n) barisan pada operator linear *self – adjoint* terbatas pada ruang Hilbert kompleks $\mathcal{H}$ seperti ditunjukan

$$T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_n \leq \cdots \leq K$$

Dimana $\mathcal{H}$ adalah operator linear *self adjoint* terbatas pada $\mathcal{H}$ (Kreyszig, 1989).