BAB II
LANDASAN TEORI

Untuk menghitung nilai cadangan asuransi secara umum, maka dibutuhkan beberapa teori dasar yang dapat menyederhanakan permasalahan dan mempermudah proses perhitungan dan analisis pada kajian cadangan asuransi tersebut.

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup *(Survival Function)*

Misalkan (x) adalah seseorang yang berusia x tahun pada saat polis asuransi ditanda tangani dan sedangkan jarak waktu antara (x) sampai meninggal dunia (X) akan disebut sisa umur bagi (x), sehingga terdapat peubah acak T(x), yaitu T(x) = X-x untuk x ≥ 0. T(x) menyatakan sisa umur bagi (x).

Fungsi distribusi dari T(x) dinyatakan dengan F(t) dan didefinisikan (Bowers, 1997) dengan :

$$F(t) = P(T(x) \leq t),\ t \geq 0 \qquad (2.1.1)$$

$F(t)$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum berusia $x+t$ tahun.

Secara umum fungsi kelangsungan hidup dapat dinyatakan dengan :

$$s(x+t) = 1 - F_{T(x)}(t) = P\ (T(x) > t) \qquad ;\ t > 0 \qquad (2.1.2)$$

s(x+t) adalah peluang orang berusia *x* tahun akan hidup mencapai usia *x+t* tahun.

2.2 Peluang Waktu Sisa Hidup

Dalam fungsi kelangsungan hidup untuk kasus kontinu, simbol T(x) menyatakan sisa umur bagi seseorang berusia x atau T(x) = X - x, dengan fungsi distribusinya dinyatakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \leq t | X > x) \\
&= P(X - x \leq t | X > x) \\
&= P(x \leq X \leq x + t | X > x) \\
&= \frac{F_x(x+t) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} \\
&= \frac{\big(1 - s(x+t)\big) - \big(1 - s(x)\big)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= {}_t q_x \qquad (2.2.1)
\end{aligned}
$$

Dalam ilmu aktuaria ${}_t q_x$ dinyatakan sebagai peluang orang yang berusia *x* tahun akan meninggal sebelum usia *x*+*t* tahun. Sedangkan fungsi hidupnya, yaitu :

$$
\begin{aligned}
P(T(x) > t) &= 1 - P(T(x) \leq t) \\
&= 1 - {}_t q_x \\
&= 1 - \left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right) \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= {}_t p_x \qquad (2.2.2)
\end{aligned}
$$

Jadi dapat diartikan bahwa ${}_tp_x$ adalah peluang seseorang yang berusia *x* tahun akan hidup sampai dengan usia *x*+*t* tahun. Jika *x* = 0 dan t = x, maka ${}_xp_0$ menyatakan peluang bayi yang baru lahir dapat mencapai usia x tahun dan dikenal dengan sebagai fungsi *survival* yang dinyatakan :

$$s(x) = {}_xp_0 \qquad (2.2.3)$$

Di dalam matematika aktuaria diberikan beberapa definisi peluang bersyarat, antara lain sebuah kondisi yang menyatakan bahwa *x* akan berlangsung hidup sampai *t* tahun dan meninggal dalam *u* tahun, berarti *x* akan meninggal antara usia *x*+*t* tahun dan *x*+*t*+*u* tahun. Kondisi ini disebut sebagi peluang meninggal yang ditangguhkan dan didefinisakan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) \leq t+u) \\
&= P(T(x) \leq t+u) - P(T(x) \leq t) \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\
&= \frac{\big(1 - s(x+t+u)\big) - \big(1 - s(x+t)\big)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \\
&= \left[\frac{s(x+t)}{s(x)} . \frac{s(x+t)}{s(x+t)}\right] - \left[\frac{s(x+t)}{s(x+t)} . \frac{s(x+t+u)}{s(x)}\right] \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}\right] \\
&= {}_tp_x \cdot (1 - {}_up_{x+t}) \\
&= {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} \qquad (2.2.4)
\end{aligned}
$$

Jika *u* = 1, maka peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan $_{t|}q_x$, sehingga :

$$_{t|}q_x = \ _tp_x \cdot q_{x+t} \qquad (2.2.5)$$

Dalam kasus diskrit, peluang meninggal sering disebut *Curtate Future Life Time*, dengan symbol K(x). Secara teori, definisi dari peubah acak K(x) adalah K(x) = [T(x)], dengan simbol [T(x)] yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari T(x). Adapun secara informal K(x) meyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dirayakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia atau peubah acak diskrit yang menyatakan lamanya hidup (x).

$K(x)$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi distribusi yang dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned} P(K(x) = k) &= P(K = k) \\ &= P([T(x)] = k) \\ &= P(k < T(x) \leq k + 1) \\ &= F(k + 1) - F(k) \\ &= \ _{k+1}q_x - \ _kq_x \\ &= \ _kp_x \cdot \big(1 - \ _{k+1}p_x\big) \\ &= \ _kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= \ _{k|}q_x \quad ; \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.2.6) \end{aligned}$$

2.3 Laju Tingkat Kematian *(Force of Mortality)*

Laju kematian dari seseorang yang baru lahir dan akan meninggal antara usia x dan x + Δx dengan syarat hidup pada usia x dapat dinyatakan dengan :

$$P(x < X < x + \Delta \mathrm{x} | X > x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Karena F(x + Δx) – F(x) dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka :

$$\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} F(x+\Delta x) - F(x) \, . \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \ \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} . \Delta x}{\lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian dari seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan :

$$\mu(x) \qquad = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.3.1)$$

atau

$$\mu(x+t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x+t)} \qquad (2.3.2)$$

dengan $\mu(x+t)$ adalah probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia *x* tahun antara *t* dan *t* + Δt tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia *x* sampai *x* + *t* tahun.

karena $s(x) = 1 - F(x)$ atau $F(x) = 1 - s(x)$, maka :

$$F'(x) = f(x) = -s'(x) \tag{2.3.3}$$

Sehingga diperoleh nilai laju kematian pada usia x adalah :

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d\ln s(x)}{ds(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d\ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)dx = -d\ln s(x)$$

Dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh :

$$\mu(y)dy = -d\ln s(y)$$

dan dengan menggunakan intergral tertentu pada batas x sampai x+t maka diperoleh :

$$\int_{x}^{x+t} \mu(y)dy = -\int_{x}^{x+t} d\ln s(y)$$

$$= -\ln s(y)|_{x}^{x+t}$$

$$= -\{\ln s(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -\ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln \; {}_tp_x$$

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)dy} \tag{2.3.4}$$

Jika nilai laju kematiannya konstan ($\mu(x) = \mu$) untuk semua x $\geq$ 0, artinya besarnya nilai dari *force of mortality* (laju tingkat kematian) adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh :

$$s(x) = {}_xp_0 = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = e^{-\mu x} \qquad (2.3.5)$$

Diketahui sebelumya bahwa ${}_tq_x$ adalah fungsi distribusi dari T(x), sehingga fungsi densitas dari T(x) adalah :

$$f(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp_x\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f(t) = {}_tp_x \cdot \mu(x+t) \qquad (2.3.6)$$

2.4 Tabel Mortalitas

Pada tabel mortalitas terdapat variable l_x dan d_x. l_x menyatakan jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia *x* tahun dari sekelompok orang yang jumlahnya l_o ketika baru lahir. Dalam hal ini, l_o yang menyatakan banyaknya bayi yang baru dilahirkan diasumsikan mempunyai fungsi survival sama dengan *s(x)*.

Misalkan $l_0 = 100.000$, lalu diberi indeks $j = 1, 2, 3, \ldots, l_0$ (orang ke-1, ke-2, …, ke-l_0), dan $\mathcal{L}(x)$ menyatakan banyaknya bayi yang hidup sampai dengan usia x, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j \qquad (2.4.1)$$

dimana I_j adalah indikator untuk bayi yang bertahan hidup dari j, dan dapat pula dinyatakan dengan :

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ hidup\ sampai\ dengan\ x \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

karena I_j adalah random variable, dan berdasarkan asumsi bahwa l_0 mempunyai fungsi survival yang sama dengan *s(x)*, maka akan diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut :

$$P(I_j = 1) = s(x) \qquad (2.4.2)$$

$$P(I_j = 0) = 1 - s(x) \qquad (2.4.3)$$

Dari persamaan (2.4.2) dan (2.4.3), diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut :

$$E[I_j] = 1.s(x) + 0.(1 - s(x)) = s(x)$$

Sehingga nilai ekspekstasi dari $\mathcal{L}(x)$ dapat dinyatakan dengan :

$$E[\mathcal{L}(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= \underbrace{s(x) + s(x) + \cdots + s(x)}_{sebanyak\ l_0}$$

$$l_x = l_0 \,.\, s(x) \qquad (2.4.4)$$

$$= l_0 \,.\, {}_x p_0$$

$$= l_0 \,.\exp\left(\int_0^x \mu_t \, dt\right) \quad (2.4.5)$$

Selanjutnya, variabel d_x menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $x+1$ tahun.

Misalkan, ${}_nD_x$ menyatakan banyaknya bayi yang meninggal antara usia x tahun sampai dengan usia x+n tahun, maka berlaku persamaan berikut :

$$P(x < X < x + n) = s(x) - s(x + n)$$

Selanjutnya indikator yang berlaku adalah sebagai berikut :

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ meninggal\ antara\ usia\ x\ sampai\ x + n\ tahun \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variable, maka akan diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut :

$$P(I_j = 1) = s(x) - s(x + n) \quad (2.4.6)$$

$$P(I_j = 0) = 1 - \{s(x) - s(x + n)\} \quad (2.4.7)$$

Dari persamaan (2.4.6) dan (2.4.7), diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut:

$$E[I_j] = 1.\ s(x) - s(x + n) + 0.(1 - \{s(x) - s(x + n)\} = s(x) - s(x + n)$$

Sehingga nilai ekspekstasi dari ${}_nD_x$ dapat dinyatakan dengan :

$$E[\,{}_nD_x\,] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$${}_nd_x = l_0 \,.\{s(x) - s(x + n)\}$$

$$ {}_{n}d_x \ = \ l_0\,.\,s(x) - l_0.\,s(x+n) $$

$$ {}_{n}d_x \ = l_x - l_{x+n} \qquad (2.4.8) $$

dimana ${}_{n}d_x$ menyatakan banyaknya orang yang berusia *x* tahun yang meninggal sebelum mencapai usia *x*+*n* tahun.

Berdasarkan persamaan (2.4.4) dan (2.4.8) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$ l_x = l_0\,.\,s(x) \Rightarrow s(x) = \frac{l_x}{l_0} $$

$$ {}_{x}p_0 = \frac{l_x}{l_0} \qquad (2.4.9) $$

dan

$$ {}_{x}q_0 = 1 - {}_{x}p_0 = 1 - \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 - l_x}{l_0} = \frac{d_x}{l_0} \qquad (2.4.10) $$

Sehingga peluang *(x)* akan meninggal sebelum mencapai usia *x*+*t* tahun dapat dinyatakan dengan :

$$ {}_{t}q_x = 1 - {}_{t}p_x $$

$$ = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

$$ = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} $$

$$ = \frac{{}_{t}d_x}{l_x} \qquad (2.4.11) $$

dan sebuah peluang meninggal yang ditangguhkan atau kondisi yang menyatakan bahwa *x* akan berlangsung hidup sampai *t* tahun dan meninggal dalam *u* tahun, didefinisakan sebagai berikut :

$$ {}_{t|u}q_x = 1 - {}_{t|u}p_x $$

Jika u = 1, maka berdasarkan (2.2.5) diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_{t|}q_x &= {}_tp_x \cdot q_{x+t} \\
&= \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} \\
&= \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad (2.4.12)
\end{aligned}
$$

2.5 Distribusi Gompertz

Terdapat beberapa bentuk distribusi yang dapat digunakan untuk menghitung mortalita dan fungsi *survival*, yaitu distribusi De Moivre (1729), Gompertz (1825), Makeham (1860) dan Weibull (1939). Dalam tulisan ini hanya digunakan distribusi Gompertz sebagai perhitungan untuk simulasi data. *Survival Distribution Function* (SDF) untuk distribusi Gompertz didefinisikan sebagai berikut (London, 1997) :

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \exp\left[-\int_0^x \mu(x)\,dx\right] \\
&= \exp\,[-\frac{B}{\ln c}(\,c^x - 1)] \\
&= \exp\,[-m(\,c^x - 1)] \qquad (2.5.1)
\end{aligned}
$$

dengan *B > 0, c > 1, x ≥ 0,* dan $m = -\frac{B}{\ln c}$. Dari SDF tersebut didapatkan *Cumulative Distribution Function* (CDF) sebagai berikut :

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\,[-\frac{B}{\ln c}(\,c^x - 1)]$$

dan dari CDF tersebut diperoleh *probability distribution function* (pdf) sebagai berikut :

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \exp\,[-\frac{B}{\ln c}(\,c^x - 1)]\right)$$

$$= \left\{-\exp\,[-\frac{B}{\ln c}(\,c^x - 1)]\right\}\frac{d}{dx}[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1])]$$

$$= \left\{- \exp\left[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right]\right\}(-Bc^x)$$

$$= (Bc^x) \exp\left[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right]$$

$$f(x) = (Bc^x) \exp\left[m(c^x - 1)\right] \qquad (2.5.2)$$

Sehingga diperoleh *Force of Mortality*-nya sebagai berikut :

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{(Bc^x) \exp\left[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right]}{\exp\left[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right]}$$

$$= Bc^x \text{ , } B > 0, c > 1, \text{ dan } x \geq 0$$

2.6 Bunga *(Interest)*

Bunga merupakan pembayaran yang dilakukan oleh peminjam sebagai balas jasa atas pemakaian uang yang dipinjam. Secara umum perhitungan bunga dibagi menjadi dua, yaitu :

2.6.1 Bunga Sederhana *(Simple Interest)*

Bunga tunggal atau bunga sederhana adalah besarnya bunga dihitung dari nilai pokok awal dikalikan dengan tingkat bunga dan waktu (Frensidy, 2010). Besarnya bunga sederhana dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$I = P_0 . i . n \qquad (2.6.1)$$

dengan :

I : *Interest value* (nilai bunga)

P_0 : Pokok investasi

i : *rate of interest annually,* tingkat suku bunga

n : *time,* jangka waktu (lama) investasi (tahun)

Sehingga setelah *n* tahun nilai total investasi menjadi :

$$P_n = P_0 + I = P_0 + P_0 . i . n = P_0(1 + i . n) \qquad (2.6.2)$$

2.6.2 Bunga Majemuk *(Compound Interest)*

Bunga majemuk adalah pehitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya di tambah dengan besar bunga yang diperoleh (Futami, 1993). Besar bunga majemuk dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$I = P_0 . i^n \qquad (2.6.3)$$

dengan :

I : *Interest value* (nilai bunga)

P_0 : Pokok investasi

i : *rate of interest annually,* tingkat suku bunga

n : *time,* jangka waktu (lama) investasi (tahun)

Setelah *n* tahun nilai total investasinya menjadi :

$$P_n = P_0(1 + i)^n \qquad (2.6.4)$$

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi *v* sebagai berikut :

$$v = \frac{1}{(1+i)} \qquad (2.6.5)$$

Persamaan (2.6.4) dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$$P_0 = \frac{P_n}{(1 + i)^n} = v^n . P_n \qquad (2.6.6)$$

Jika n = 1 dan P_1 = 1, maka $P_0 = v$, *v* adalah nilai sekarang *(present value)* dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan 1 tahun kemudian.

Didefinisikan fungsi tingkat diskon *d* sebagai berikut :

$$d = \frac{i}{(1+i)} = i.v = 1 - v \tag{2.6.7}$$

Karena *v* adalah nilai sekarang (present value) untuk pembayaran sebesar 1 satuan yang akan dibayarkan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat, maka besarnya bunga yang hilang adalah $d = 1 - v$ (Futami, 1993).

Tingkat suku bunga selalu dinyatakan pertahun atau per *annum* (p.a). tingkat bunga tahunan yang dinyatakan itu apakah diakhiri dengan p.a atau tidak, disebut tingkat bunga nominal (Frensidy, 2010). Simbol untuk tingkat bunga nominal adalah $i^{(k)}$. Untuk suku bunga nominal dan suku bunga diskonto nominal dengan *k* kali pembayaran dalam satu tahun dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \tag{2.6.8}$$

$$i^{(k)} = k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right] \tag{2.6.9}$$

$$1 - d = \left(1 + \frac{d^{(k)}}{k}\right)^k \tag{2.6.10}$$

$$d^{(k)} = k\left[1 - (1-d)^{\frac{1}{k}}\right] = k[1 - v^{\frac{1}{k}}] \tag{2.6.11}$$

dengan *k* adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun.

2.6.3 Laju Tingkat Suku Bunga *(Force of Interest)*

Dengan menggunakan persamaan (2.6.8) dan menambahkan fungsi *ln* dikedua ruas dari persamaan tersebut diperoleh :

$$\ln(1+i) = \ln\left(1 + \frac{i^{(\mathrm{k})}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}} \text{ dengan } i^{(k)} = k\left[e^{\ln(1+i)^{1/k}} - 1\right]$$

Untuk $k \to \infty$, dengan kata lain pembungaannya dapat dilakukan setiap saat, diperoleh nilai δ dan dinyatakan sebagai berikut :

$$\lim_{k \to \infty} i^{(k)} = \ln\ (1 + i) = \delta$$

$$\delta = \ln\ (1 + i)$$

$$e^{-\delta t} = (1 + i)^{-t} = v^t$$

dan δ disebut dengan laju tingkat suku bunga *(force of Interest)*.

2.7 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah usaha kerjasama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya (R.K Sembiring, 1986).

2.7.1 Jenis-jenis Asuransi Jiwa

Pada Asuransi dengan perhitungan kontinu, pembayaran benefit kepada ahli waris nasabah dilakukan sesaat setelah nasabah meninggal dunia. Jumlah dan waktu pembayaran benefit pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai tertanggung meninggal dunia. Berdasarkan uraian tersebut, asuransi jiwa terdiri dari fungsi benefit atau santunan (b_t) dan v_t. Fungsi v_t adalah nilai sekarang dari pembayaran b_t dan t adalah panjang interval pada saat polis dikeluarkan sampai dengan (x) meninggal dunia. Keduanya membentuk suatu peubah acak yang dilambangkan dengan Z_t yang didefinisikan sebagai berikut :

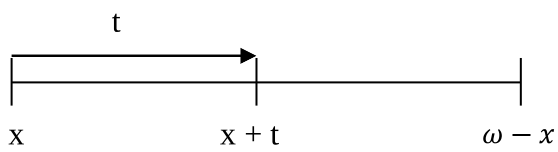
$$Z_t = b_t \cdot v_t$$

Karena T(x) adalah peubah acak dari sisa waktu hidup nasabah atau waktu dari dikeluarkannya polis sampai waktu meninggalnya nasabah, maka Z_t adalah fungsi peubah acak *(Actuarial Present Value)* pembayaran benefit pada saat polis asuransi dikeluarkan.

Adapun jenis-jenis jiwa asuransi yang umum digunakan adalah sebagai berikut :

2.7.1.1 Asuransi Jiwa Berjangka *(Term Life Insurance)*

Asuransi jiwa berjangka adalah suatu asuransi yang membayarkan benefit atau santunan kepada ahli waris nasabah apabila si nasabah meninggal dunia selama dalam jangka waktu polis asuransi yang telah ditentukan.



Gambar 1. Sistem pembayaran benefit pada asuransi jiwa berjangka

Besarnya manfaat (b_t) sebesar satu satuan diberikan sesaat setelah meninggal, maka :

$b_t = 1 \quad ; t \leq n$

$b_t = 0 \quad ; t > n$

dengan

$$Z_t = \begin{cases} e^{-\delta t} = v^t, & t \leq n \\ 0, & x > n \end{cases}$$

Sehingga nilai APV dari asuransi berjangka adalah :

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}'_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \,.\, f(t)\, dt$$

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}'_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \,.\, {}_tp_x \,.\, \mu(x+t) dt \qquad (2.7.1)$$

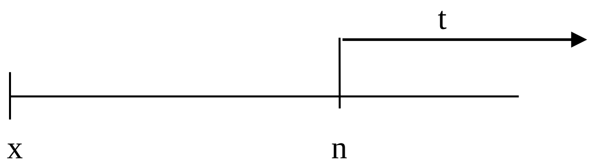
Berdasarkan (2.5.2), persamaan (2.7.1) menjadi seperti berikut :

$$\bar{A}'_{x:\bar{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \,.\, e^{-m(c^{x+t}-c^x)} \,.\, B.\, c^{x+t} dt \qquad (2.7.2)$$

Persamaan (2.7.2) adalah nilai APV dari asuransi jiwa berjangka n tahun dengan benefit sebesar 1 satuan.

2.7.1.2 Asuransi Jiwa *Endowment* Murni *(Pure Life Endowent Insurance)*

Asuransi jiwa *endowment* murni yaitu suatu asuransi yang apabila tertanggung (nasabah) masih hidup sampai masa polis asuransinya berakhir maka tertanggung (nasabah) akan mendapatkan sejumlah uang santunan. Tetapi, jika nasabah meninggal dunia dalam jangka waktu tertentu (dalam periode polis asuransi), maka ahli waris nasabah tidak adakan mendapatkan benefit/santunan.



Gambar 2. Sistem pembayaran benefit pada asuransi jiwa *endowment* murni

Besarnya manfaat (b_t) sebesar satu satuan diberikan sesaat setelah masa kontrak habis dan tertanggung masih hidup, maka :

$$b_t = \begin{cases} 1, & t > n \\ 0, & x \leq n \end{cases}$$

$$v_t = \begin{cases} v^n, & t > n \\ 0, & x \leq n \end{cases}$$

dengan

$$Z_t = \begin{cases} v^n, & t > n \\ 0, & x \leq n \end{cases}$$

Sehingga nilai APV dari asuransi *endowment* murni ini adalah :

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}_{x:\bar{n}|}^{\;\;\prime} = \int_n^\infty v^n \,.\, f(t)\, dt$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\prime} = v^{n} \int_{n}^{\infty} f(t)\, dt$$

Catatan :

$${}_{t}p_{x} = P(T(x) > t) = \int_{t}^{\infty} f(t)\, dt$$

$${}_{t}q_{x} = P(T(x) \leq t) = \int_{0}^{t} f(t)\, dt$$

Dari keterangan tersebut nilai APV dari asuransi *endowment* murni menjadi :

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\prime} = v^{n} .\ {}_{n}p_{x} \qquad (2.7.3)$$

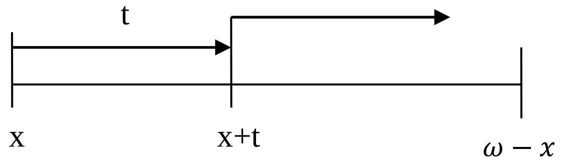
Berdasarkan (2.5.2), dari persamaan (2.7.3) diperoleh persamaan baru seperti berikut :

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\prime} = e^{-n.t} \int_{n}^{\infty} e^{-m(c^{x+t}-c^{x})} .B.\, c^{x+t}\, dt \qquad (2.7.4)$$

Persamaan (2.7.4) adalah nilai APV untuk asuransi *endowment* murni *n* tahun dengan benefit sebesar 1 satuan.

2.7.1.3 Asuransi Jiwa Dwiguna

Asuransi jiwa dwiguna adalah suatu asuransi yang apabila tertanggung meninggal dunia dalam jangka waktu polis asuransi yang telah ditanda tangani atau masih tetap hidup sampai masa polis asuransinya berakhir, maka ahli waris nasabah akan tetap mendapatkan uang santunan.



Gambar 3. Sistem pembayaran benefit pada asuransi jiwa dwiguna

Besarnya manfaat/benefit sebesar satu satuan diberikan sesaat setelah meninggal atau diberikan sesaat setelah masa kontrak habis dan tertanggung masih hidup, maka :

$$\mathrm{b_t} = \begin{cases} 1, & t > n \\ 1, & t < n \end{cases}$$

$$\mathrm{v_t} = \begin{cases} v^n, & t > n \\ v^t, & t < n \end{cases}$$

dengan

$$\mathrm{Z_t} = \begin{cases} v^n, & t > n \\ v^t, & t < n \end{cases}$$

Maka besarnya APV untuk asuransi ini adalah :

$$\mathrm{E[Z_t]} = \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{n}|}} = \int_0^n v^t . f(t)\, dt + \int_n^\infty v^n . f(t)\, dt \qquad (2.7.5)$$

Berdasarkan (2.5.2), persamaan (2.7.5) dapat diubah menjadi seperti berikut :

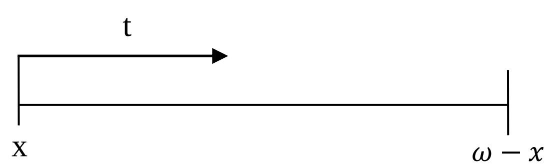
$$\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{n}|}} = \int_0^n e^{-\delta t} . e^{-m(c^{x+t} - c^x)} . B . c^{x+t}\, dt + v^{-n.t} \int_n^\infty e^{-m(c^{x+t} - c^x)} . B . c^{x+t}\, dt$$

$$\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{n}|}} = \bar{\mathrm{A}}'_{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{n}|}} + \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{x}:\overline{\mathrm{n}|}}^{\;\;\prime} \qquad (2.7.6)$$

Persamaan (2.7.6) adalah nilai APV dari asuransi jiwa dwiguna *n* tahun dengan benefit atau santunan sebesar 1 satuan

2.7.1.4 Asuransi Jiwa Seumur Hidup *(Whole Life Insurance)*

Asuransi jiwa seumur hidup adalah asuransi yang menjamin seumur hidup tertanggung dan akan mendapatkan uang pertanggungan apabila tertanggung tersebut meninggal dunia.



Gambar 4. Sistem pembayaran benefit pada asuransi jiwa seumur hidup

Diilustrasikan bahwa besarnya benefit (b_t) sebesar satu satuan dibayarkan sesaat setelah nasabah meninggal dunia, maka :

$$\mathrm{b_t} = 1, \quad \mathrm{t} \geq 0$$

dan

$$\mathrm{v_t} = 1, \quad \mathrm{t} \geq 0$$

sehingga diperoleh :

$$\mathrm{Z_t} = v^t, \quad \mathrm{t} \geq 0$$

Dan untuk nilai dari APV dari asuransi sumur hidup ini adalah :

$$\mathrm{E[Z_t]} = \mathrm{E}[v^t] = \bar{\mathrm{A}}_\mathrm{x} = \int_0^\infty v^t . f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty v^t . \ {}_t p_x\, dt \qquad (2.7.7)$$

Berdasarkan (2.5.2), persamaan (2.7.7) dapat diubah menjadi seperti berikut :

$$\bar{\mathrm{A}}_\mathrm{x} = \int_0^\infty e^{-\delta t} . e^{-m(c^{x+t} - c^x)} . B . c^{x+t}\, dt \qquad (2.7.8)$$

Persamaan (2.7.8) adalah nilai APV dari asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan atau benefit sebesar 1 satuan.

2.8 Anuitas *(Annuity)*

Anuitas didefinisikan sebagai suatu rangkaian pembayaran dengan jumlah tertentu dalam selang dan periode waktu tertentu (R.K. Sembiring, 1997)

2.8.1 Anuitas Tentu (Pembayaran Tahunan)

Anuitas tentu adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan selama jangka waktu tertentu dengan syarat dan besarnya pembayaran berkala tidak perlu sama. Anuitas tentu dibagi menjadi dua, yaitu : anuitas tentu yang dibayarkan di awal waktu pembayaran disebut anuitas awal *(due annuity)* dan anuitas yang dibayarkan di akhir waktu pembayaran disebut anuitas akhir *(immediate annuity)*.

Total nilai sekarang dari anuitas akhir diberi notasi $a_{\overline{n}|}$ *(immediate annuity)* adalah :

$$PV = a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n \qquad (2.8.1)$$

Dengan menggunakan rumus geometri, maka diperoleh :

$$a_{\overline{n}|} = v.\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

$$= v.\left(\frac{1 - v^n}{i.v}\right), \qquad \text{dengan} \quad d = \frac{i}{1 + i} = i.v = 1 - v$$

$$= \frac{1 - v^n}{i} \qquad (2.8.2)$$

Sedangkan total nilai sekarang dari anuitas awal *(due annuity)* yang diberi notasi $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ adalah :

$$PV = \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} \qquad (2.8.3)$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh :

$$a_{\overline{n}|} = 1.\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

$$= \frac{1 - v^n}{d}$$

$$= \frac{1 - v^n}{i.v} \qquad (2.8.4)$$

2.8.2 Anuitas Tentu (Pembayaran Kontinu)

Suatu anuitas tentu yang pembayarannya dilakukan k kali dalam satu tahun dengan $k \to \infty$, atau dengan kata lain pembayarannya dilakukan setiap saat, dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n|}}$.

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\overline{n|}}^{(k)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1 - v^n}{i^{(k)}}$$

$$= \frac{1 - v^n}{\delta} \qquad (2.8.5)$$

2.8.3 Anuitas Hidup Kontinu *(Continous Life Annuity)*

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang sifatnya periodik dan pembayarannya hanya akan dilakukan apabila orang yang ditunjuk masih hidup pada saat pembayaran jatuh tempo.

Anuitas hidup sebesar satu satuan per akhir tahun yang pembayarannya dilakukan secara kontinu atau setiap saat disebut anuitas hidup kontinu. Dengan nilai sekarang *(Present Value)* dari pembayaran anuitas tersebut dinotasikan dengan peubah acak Y, yaitu : $Y = \bar{a}_T$ dengan T ≥ 0.

Dari persamaan (2.8.5) diperoleh :

$$\bar{a}_T = \frac{1 - v^T}{\delta} \qquad (2.8.6)$$

Actuarial Present Value (APV) dari anuitas tersebut adalah :

$$\bar{a}_x = \mathrm{E}[\mathrm{Y}] = \mathrm{E}[\bar{a}_T] = \int_0^\infty \bar{a}_T \,.\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1 - v^T}{\delta} \,.\, f(t)\, dt \qquad (2.8.7)$$

Dengan menggunakan pengintegralan parsial tentu :

$$\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$$

Misalkan :

- $u = \bar{a}_T$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - v^t}{\delta}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-v^t}{\delta}\right)$$

$$= -\frac{1}{\delta}\frac{dv^t}{dt}$$

$$= -\frac{1}{\delta}.v^t.\ln v = \frac{1}{\delta}.v^t.\ln(1+i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\delta}.v^t.\delta$$

$$= v^t$$

$$du = v^t\, dt$$

- $dv = f(t)\, dt$

$$dv = {}_tp_x \mu(x+t)dt$$

$$v = -\, {}_tp_x$$

Sehingga :

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_T\, .f(t)\, dt$$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_T. -\, {}_tp_x\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -\, {}_tp_x\, .v^t\, dt$$

maka :

$$\bar{a}_x = \mathrm{E}[\bar{a}_T] = \int_0^\infty v^t \, . \ {}_tp_x \ dt \qquad (2.8.8)$$

Berdasarkan (2.5.1), persamaan (2.8.8) menjadi seperti berikut :

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, . \, e^{-m(c^{x+t}-c^x)} \, dt \qquad (2.8.9)$$

Persamaan (2.8.9) adalah nilai APV dari anuitas seumur hidup. Dengan cara yang sama, akan diperoleh nilai anuitas berjangka *n*-tahun sebagai berikut :

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E}[\bar{a}_T] = \int_0^n v^t \, . \ {}_tp_x \ dt \qquad (2.8.10)$$

atau

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \mathrm{E}\left[\frac{1-v^t}{\delta}\right] = \int_0^n \frac{1-v^t}{\delta} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \int_0^n v^t \, f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \bar{A}'_{x:\overline{n|}}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - \bar{A}'_{x:\overline{n|}}}{\delta}$$

Berdasarkan (2.5.1), persamaan (2.8.10) menjadi seperti berikut :

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t} \, . \, e^{-m(c^{x+t}-c^x)} \, dt \qquad (2.8.11)$$

Persamaan (2.8.11) adalah nilai APV dari anuitas berjangka *n* tahun.

2.8.4 Anuitas Hidup Diskrit *(Discrete Life Annuity)*

Anuitas hidup diskrit menggunakan anuitas awal *(due annuity)* yang pembayarannya dilakukan setiap awal tahun. Nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut yang merupakan peubah acak dari Y adalah :

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \qquad , K \geq 0$$

dari persamaan (2.8.4) akan diperoleh :

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} \qquad (2.8.12)$$

dari (2.8.12) akan didapat nilai *Actuarial Present Value* (APV) untuk anuitas seumur hidup sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\, P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \cdot {}_kp_x . q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \qquad (2.8.13) \end{aligned}$$

dengan cara yang sama, akan didapat nilai *Actuarial Present Value* (APV) untuk anuitas berjangka sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\, P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \cdot {}_kp_x . q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x \qquad (2.8.14) \end{aligned}$$

2.9 Premi Asuransi Jiwa

Premi adalah uang yang harus dibayarkan oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi sebagai imbalan persetujuan penanggung untuk membayar benefit atau santunan yang telah disepakati dalam polis asuransi jika orang yang ditanggung meninggal dunia. Ada tiga unsur utama yang menentukan perhitungan premi asuransi jiwa, yaitu :

a. Mortalitas (Harapan Hidup)

b. Suku Bunga

c. Loading, yaitu biaya yang dikeluarkan untuk operasional perusahaan asuransi

(R.K Sembiring, 1986)

Premi asuransi dapat dibayarkan sekaligus atau secara tetap berkala. Premi yang dibayarkan sekaligus disebut premi tunggal *(Net Single Premium)*, sedangkan premi tetap berkala dapat dibayarkan per tahun, per tri wulan dan per bulan serta dilakukan pada permulaan tiap selang waktu.

Premi asuransi terbagi menjadi dua macam, yaitu premi *netto* dan premi *bruto*. Premi *netto* adalah premi yang dibayarkan pemegang polis atau konsumen berdasarkan perkiraan tingkat mortalita dan perkiraan tingkat suku bunga, sedangkan tingkat biaya tidak dipergunakan. Premi *netto* dihitung atas dasar prinsip keseimbangan antara pemasukan dan pengeluaran, yaitu nilai tunai dari premi *netto* yang akan diterima oleh perusahaan asuransi di waktu yang akan datang harus sama dengan nilai tunai dari benefit atau santunan yang akan dibayarkan oleh perusahaan asuransi. Premi *netto* tidak mencakup nilai biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi, adapun biaya tersebut seperti : biaya administrasi, biaya penutupan, komisi dan lain-lain.

Akan tetapi, pada umumnya biaya-biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi dibebankan kepada pemegang polis (nasabah). Biaya-biaya tersebut sudah dimasukkan kedalam premi yang dibayarkan oleh pemegang polis. Premi yang mengandung nilai biaya tersebut disebut sebagai premi *brutto* atau *gross premium*. Premi *brutto* diperoleh dari nilai premi *netto* ditambah biaya atau dapat ditulis sebagai berikut :

Premi *Brutto (Gross Premium)* = Premi *Netto* + Biaya

2.9.1 Fungsi Kerugian

Pada saat polis asuransi ditandatangani terdapat dua jenis kewajiban di dalamnya, yaitu :

1. Kewajiban pihak perusahaan asuransi adalah membayar santunan yang besarnya sesuai perjanjian yang telah ditetapkan diawal kontrak manakala sewaktu-waktu terjadi klaim.
2. Kewajiban pihak nasabah adalah membayar premi langsung sekaligus diawal kontrak atau secara berkala pada setiap periode yang telah ditentukan.

Kedua jenis kewajiban tersebut membentuk suatu fungsi total kerugian polis asuransi yang disimbolkan dengan L. Untuk penanggung, L adalah perbedaan antara nilai sekarang dari santunan dan nilai sekarang dari pembayaran premi (Bowers, 1997). Nilai kerugian (L) ini merupakan peubah acak dari nilai sekarang dari santunan yang dibayarkan oleh penanggung tak sebanyak premi anuitas yang dibayarkan oleh tertanggung. Besarnya kerugian yang akan ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi dihitung dengan :

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_T$$

atau

$$L = M - P.Q$$

dengan L = nilai dari fungsi kerugian, M = premi tungal asuransi jiwa, P = premi datar asuransi jiwa, dan Q = nilai APV dari anuitas hidup.

Resiko kerugian perusahaan terjadi ketika nilai kerugiannya memberikan nilai positif, dimana nilai santunan yang dibayarkan kepada pihak nasabah lebih besar dari premi yang diterima oleh pihak perusahaan asuransi. Secara teoritis nilai kerugian yang positif terjadi ketika pihak nasabah meninggal dunia pada awal kontrak asuransi.

2.9.2 Prinsip Ekuivalen *(Equivalence Principle)*

Prinsip ekuivalen menyatakan bahwa ekspektasi dari fungsi kerugian adalah sama dengan nol. Prinsip ekuivalen ini digunakan untuk mengantisipasi kerugian yang akan diterima oleh perusahaan asuransi pada periode tertentu, sehingga jumlah benefit/santunan yang akan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi akan sebanding dengan besarnya nilai premi yang harus dibayarkan oleh nasabah kepada perusahaan asuransi.

Prinsip ekuivalen mempunya syarat bahwa :

$$E[L] = 0$$

maka :

E[Nilai sekarang santunan – Nilai sekarang premi] = 0

E[Nilai sekarang santunan] = E[nilai sekarang premi]

Berdasarkan fungsi kerugian dan prinsip ekuivalen, maka untuk Premi yang dibayarkan kontinu ($\bar{P}$), nilai sekarang dari kerugian untuk penanggung jika meninggal terjadi pada saat *t* dan jumlah santunan yang harus diberikan kepada nasabah sebesar *B* satuan adalah :

$$l(T) = B.v^T - \bar{P}\bar{a}_T \qquad (2.9.1)$$

Karena T(x) merupakan peubah acak, maka dengan prinsip ekuivalen diperoleh :

$$E[L] = E[B.v^T - \bar{P}\bar{a}_T] = 0$$

$$B.E[v^T] - \bar{P}.E[\bar{a}_T] = 0$$

$$\bar{P} = \frac{B.E[v^T]}{E[\bar{a}_T]} \qquad (2.9.2)$$

Berdasarkan (2.9.2), maka akan diperoleh nilai premi bersih *(net single premium)* dari produk atau jenis asuransi jiwa sebagaimana berikut :

a. Premi Bersih *(net single premium)* Asuransi Jiwa Berjangka *n* tahun :

$$\bar{P}\left(\bar{A}'_{x:\overline{n}|}\right) = \frac{B.\bar{A}'_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (2.9.3)$$

Persamaan (2.9.3) adalah nilai premi bersih dari asuransi jiwa berjangka *n* tahun yang dibayarkan satu kali per tahunnya.

b. Premi Bersih *(net single premium)* Asuransi Jiwa *Endowment* Murni *n* tahun :

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overset{\prime}{\overline{n}|}}\right) = \frac{B.\bar{A}_{x:\overset{\prime}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (2.9.4)$$

Persamaan (2.9.4) adalah nilai premi bersih dari asuransi jiwa *Endowment* Murni *n* tahun yang dibayarkan satu kali per tahunnya.

c. Premi Bersih *(net single premium)* Asuransi Jiwa Dwiguna *n* tahun :

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \frac{B.\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \quad (2.9.5)$$

Persamaan (2.9.5) adalah nilai premi bersih dari asuransi jiwa Dwiguna *n* tahun yang dibayarkan satu kali per tahunnya.

d. Premi Bersih *(net single premium)* Asuransi Jiwa Seumur Hidup :

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{B.\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \quad (2.9.6)$$

Persamaan (2.9.6) adalah nilai premi bersih dari asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan satu kali per tahunnya.

2.10 Cadangan Asuransi Jiwa

Cadangan dalam asuransi jiwa merupakan liabilitas (kewajiban) perusahaan asuransi terhadap pemegang polis yang berupa sejumlah dana yang harus disiapkan oleh perusahaan asuransi untuk membayar klaim yang akan terjadi di kemudian hari atas polis-polis yang diterbitkan perusahaan asuransi (R.K Sembiring, 1986). Jadi, cadangan bukanlah milik perusahaan tapi milik pemegang polis. Cadangan diperlukan semata-mata agar perusahaan asuransi dapat berjalan sesuai dengan dasar-dasar yang sudah ditemukan. Besarnya cadangan tergantung kepada perkembangan premi, artinya semakin banyak jumlah pemegang polis, semakin besar jumlah cadangan yang dibutuhkan.

Pada awal kontrak (polis asuransi ditandatangani), perusahaan asuransi akan mengalami resiko klaim lebih kecil dari premi tetap tahunan yang dibayarkan oleh nasabah. Dengan kata lain premi tetap tahunan yang diperoleh oleh perusahaan asuransi akan melampaui biaya asuransi tahunannya, sedangkan di akhir kontrak, klaim semakin besar dari premi yang diterima oleh perusahaan asuransi. Hal tersebut dikarenakan laju mortalita yang semakin meningkat (semakin bertambah usia seseorang, maka peluang meninggalnya semakin besar). Sehingga kelebihan dana premi yang diterima oleh perusahaan asuransi pada awal penanggungan tersebut dapat disimpan untuk membayar santunan bagi pemegang polis sampai dibutuhkan kelak.

Oleh karena itu, penting bagi perusahaan asuransi untuk mendapatkan sebuah perkiraan jumlah premi yang akan diterima pada waktu tertentu guna menjamin pembayaran santunan apabila terjadi klaim dalam selang waktu yang telah ditentukan, dan konsep cadangan asuransi-pun muncul untuk mengukur kewajiban perusahaan asuransi atas polis yang dikelolanya.

Misalkan seorang yang berusia x menandatangani polis asuransi jiwa seumur hidup dengan P adalah premi tahunan dengan santunan/benefit sebesar 1 satuan. Maka perusahaan asuransi sebagai pihak penanggung harus menyiapkan dana sebesar 1 satuan di akhir tahun agar sewaktu-waktu terjadi klaim, benefit atau santunan dapat langsung diberikan kepada ahli waris nasabah. Sedangkan nasabah harus melakukan pembayaran premi setiap tahunnya sebesar P yang dilakukan setiap awal tahun. Perhatikan ilustrasi di bawah ini :

Outflow		$d_x .1$	$d_{x+1} .1$	...	$d_{\omega-2} .1$	$l_{\omega-1}.1$
	x	$x+1$	$x+2$	...	$\omega-1$	ω
Inflow	$l_x .P$	$l_{x+1} .P$	$l_{x+2} .\ P$		$l_{\omega-1} .\ P$	

Gambar 5. Ilustrasi dana yang akan diperoleh dan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi

Berdasarkan ilustrasi pada gambar (5), keseimbangan antara dana yang dikeluarkan dan yang diterima oleh perusahaan asuransi akan terjadi apabila jumlah dana yang akan dikeluarkan (benefit/santunan) oleh perusahaan asuransi sama dengan jumlah premi yang dibayarkan nasabah kepada perusahaan asuransi. Sehingga dari gambar (5) diperoleh persamaan sebagai berikut :

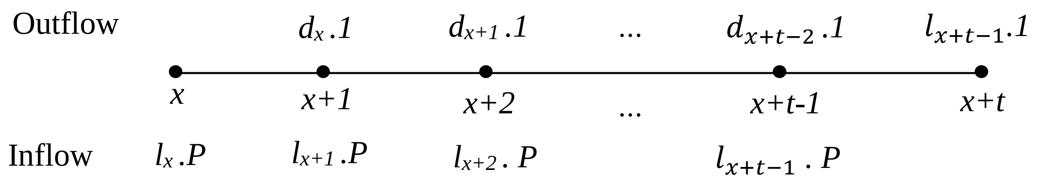
$$l_x.P + l_{x+1}.P.v + \cdots + l_{\omega-1}.P.v^{\omega-x-1} = d_x.1.v + d_{x+1}.1.v^2 + \cdots + d_x.1.v^{\omega-x}$$

Untuk mengetahui dana cadangan yang terkumpul pada saat usia nasabah mencapai $x+t$ tahun dengan santunan sebesar 1 satuan, dapat dilakukan melalui dua cara, yaitu :

2.10.1 Retrospektif

Cadangan retrospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan jumlah total pendapatan di waktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan dikurangi dengan jumlah pengeluaran di waktu lampau, untuk tiap pemegang polis (Futami, 1993).

Perhitungan cadangan retrospektif ini dimulai dengan mengambil titik tumpu perhitungan dananya dari usia $x+t$ tahun ke x tahun. Sehingga dana yang terkumpul pada usia $x+t$ tahun akan menjadi akumulasi. Perhatikan gambar berikut ini :



Gambar 6. Ilustrasi dari dana yang terkumpul dengan menggunakan metode retrospektif

Berdasarkan gambar (6), akan didapat persamaan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana\ Inflow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana\ Outflow \end{pmatrix} \qquad (2.10.1)$$

$$= \left(l_x.P.(1+i)^t + l_{x+1}.P.(1+i)^{t-1} + \cdots + l_{x+t-1}.P.(1+i)\right)$$

$$-\left(d_x.1.(1+i)^{t-1} + d_{x+1}.1.(1+i)^{t-2} + \cdots + d_{x+t-1}.1.(1+i)^0\right)$$

Nilai akumulasi dari dana yang terkumpul tersebut merupakan liabilitas (cadangan asuransi) pada saat nasabah berusia $x+t$ tahun. Berdasarkan (2.4.12) dan (2.4.9), dari (2.10.1) akan didapat nilai liabilitas (cadangan asuransi) pada saat $x+t$ sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \left[\frac{\left(l_x.P.(1+i)^t + l_{x+1}.P.(1+i)^{t-1} + \cdots + l_{x+t-1}.P.(1+i)\right)}{l_x.(1+i)^t}\right]$$

$$-\left[\frac{\left(d_x.1.(1+i)^{t-1} + d_{x+1}.1.(1+i)^{t-2} + \cdots + d_{x+t-1}.1.(1+i)^0\right)}{l_x.(1+i)^t}\right]$$

$$= \left[\frac{P}{v^t}\left({}_0p_x.v^0 + {}_1p_x.v^1 + \cdots + {}_{t-1}p_x.v^{t-1}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{\left({}_{0|}q_x.v^1 + {}_{1|}q_x.v^2 + \cdots + {}_{t-1|}q_x.v^t\right)}{v^t}\right]$$

$$= \frac{P}{v^t}.\sum_{k=0}^{t-1} v^k . {}_kp_x - \frac{1}{v^t}.\sum_{k=0}^{t-1} v^k . {}_{k|}q_x$$

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \frac{P.\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{v^t} - \frac{1.A'_{x:\overline{t}|}}{v^t} \qquad (2.10.2)$$

Selanjutnya jumlah seluruh dana liabilitas pada akhir tahun dibagi sama rata oleh tertanggung yang masih hidup pada saat $x+t$. Bagian untuk setiap nasabah ini disebut cadangan akhir tahun $x+t$ yang diberi simbol ${}_tV_x$. Sehingga persamaan (2.10.2) menjadi seperti berikut :

$$ {}_tV_x = \frac{P.\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{v^t.\ {}_tp_x} - \frac{1.A'_{x:\overline{t}|}}{v^t.\ {}_tp_x} \tag{2.10.3} $$

Jika benefit yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi adalah sebesar N satuan, maka dari (2.10.3) diperoleh persamaan sebagai berikut :

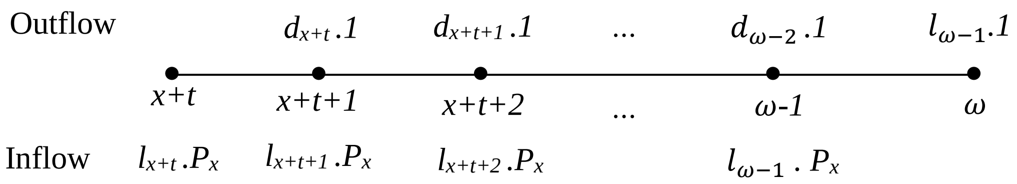
$$ {}_tV_x = \frac{P.\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{v^t.\ {}_tp_x} - \frac{N.A'_{x:\overline{t}|}}{v^t.\ {}_tp_x} \tag{2.10.4} $$

Persamaan (2.10.4) merupakan cadangan asuransi jiwa berjangka *t* tahun yang dihitung secara retrospektif. Selanjutnya, perhitungan cadangan asuransi jiwa lainnya dengan menggunakan metode retrospektif dapat menyesuaikan.

2.10.2 Prospektif

Perhitungan cadangan prospektif yang didefinisikan sebagai selisih antara nilai sekarang *(present value)* dari benefit atau manfaat yang akan diterima dengan nilai sekarang dari premi bersih yang akan datang sesuai dengan anuitas yang telah ditentukan (Futami, 1993).

Berdasarkan gambar (5), untuk mengetahui dana cadangan yang terkumpul pada saat usia nasabah mencapai $x+t$ tahun dengan santunan sebesar 1 satuan dengan metode prospektif, perhitungan dananya dimulai dengan mengambil titik tumpu dari usia $x+t$ tahun sampai $\omega - (x+t)$ tahun. Sehingga dana yang terkumpul pada usia $x+t$ tahun dapat dihitung dengan cara *present value,* yaitu total nilai sekarang dari dana yang akan dikeluarkan perusahaan asuransi (benefit) dikurangi dengan total nilai dana yang akan diterima oleh perusahaan asuransi (premi). Perhatikan gambar berikut :



Gambar 7. Ilustrasi dari dana yang terkumpul dengan menggunakan metode prospektif

Berdasarkan gambar (7), akan didapat persamaan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Total\ Nilai \\ Dana\ Sekarang \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nilai\ Sekarang \\ Dana\ Outflow \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Nilai\ Sekarang \\ Dana\ Inflow \end{pmatrix} \qquad (2.10.5)$$

$$= \left(d_{x+t}.1.v^1 + d_{x+t+1}.1.v^2 + \cdots + d_{\omega-1}.1.v^{\omega-(x+t)}\right)$$

$$-\left(l_{x+t}.P + l_{x+t+1}.P.v^1 + \cdots + l_{\omega-1}.1.v^{\omega-(x+t)-1}\right)$$

Total nilai sekarang dari dana yang terkumpul tersebut merupakan liabilitas (cadangan asuransi) pada saat nasabah berusia $x+t$ tahun. Berdasarkan (2.4.12) dan (2.4.9), dari (2.10.5) akan didapat nilai liabilitas (cadangan asuransi) pada saat $x+t$ sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = {}_{0|}q_{x+t}.v^1 + {}_{1|}q_{x+t}.v^2 + \cdots + {}_{\omega-(x+t)-1|}q_{x+t}.v^{\omega-(x+t)}$$

$$-P\left(1 + {}_1p_{x+t}.v^1 + {}_2p_{x+t}.v^2 + \cdots\right)$$

Berdasarkan (2.8.13), persamaan liabilitas tersebut menjadi :

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = 1.A_{x+t} - P.\ddot{a}_{x+t} \qquad (2.10.6)$$

karena jumlah seluruh dana liabilitas tersebut merupakan rata-rata dari dana untuk tertanggung yang masih hidup pada saat $x+t$, maka nilai dana liabilitas tersebut merupakan cadangan akhir tahun $x+t$ yang diberi simbol ${}_tV_x$. Jika benefit yang akan diberikan oleh perusahaan asuransi adalah sebesar N satuan, maka persamaan (2.10.6) menjadi seperti berikut ini :

$$ {}_tV_x = N.A_{x+t} - P.\ddot{a}_{x+t} \qquad (2.10.7)$$

Persamaan (2.10.7) merupakan persamaan cadangan asuransi jiwa seumur hidup yang dihitung secara prospektif ketika nasabah berusia $x+t$ tahun. Selanjutnya, perhitungan cadangan asuransi jiwa lainnya dengan menggunakan metode prospektif dapat menyesuaikan.

Selain itu, perhitungan cadangan asuransi dapat dilakukan dengan berdasarkan fungsi kerugian serta menggunakan prinsip ekuivalen yang mempunyai syarat :

E[L] = 0

Berdasarkan prinsip ekuivalen, maka diperoleh :

$$ {}_tV_x = E[\,{}_tL] = E[v^T] - \bar{P}E[\bar{a}_T] \qquad (2.10.8)$$

Dari persamaan (2.10.8) diperoleh beberapa konsep perhitungan Cadangan *Netto* asuransi sesuai dengan produk atau jenis asuransi jiwa yang digunakan, yaitu :

a. Cadangan Asuransi Jiwa Berjangka *n*-tahun

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}'_{x:\overline{n|}}\right) = \bar{A}'_{x+t:\overline{n-t|}} - P\left(\bar{A}'_{x:\overline{n|}}\right).\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

b. Cadangan Asuransi Jiwa *Endowment* Murni *n* tahun

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\;\;\prime}\right) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}^{\;\;\prime} - P\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\;\;\prime}\right).\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

c. Cadangan Asuransi Jiwa Dwiguna *n* tahun

$$ {}_{t}\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - P\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right).\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} $$

d. Cadangan Asuransi Jiwa Seumur Hidup

$$ {}_{t}\bar{V}\left(\bar{A}_{x}\right) = \bar{A}_{x+t} - P(\bar{A}_{x}).\bar{a}_{x+t} $$