II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Linear Umum

Menurut Usman dan Warsono (2000) bentuk model linear umum adalah :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan :

$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{n\,x\,1}}$ adalah vektor peubah acak yang teramati.

$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n\,x\,p}}$ adalah matriks nxp dengan unsur-unsurnya bilangan tertentu yang diketahui $(n > p)$.

$\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{p\,x\,1}}$ adalah vektor parameter yang tidak diketahui.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{n\,x\,1}}$ adalah vektor peubah acak yang tidak teramati,dengan E(ε) = 0 dan cov (ε) = ∑

Model di atas dinamakan model linear umum.

Kasus1. **ε** berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan kovarians matriks $\sigma^2 I$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui. Secara simbolik dilambangkan $\boldsymbol{\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)}$.

Kasus2. Distribusi ε tidak diketahui, tetapi mempunyai nilai tengah nol kovarians matriks $\sigma^2 I$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui. Diasumsikan ruang parameter untuk kasus-kasus di atas adalah Ω,dengan

$$\boldsymbol{\Omega} = \{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma^2}), \boldsymbol{\beta} \text{ dalam } \boldsymbol{\varepsilon_p}, \boldsymbol{\sigma^2} > 0$$

Untuk kasus pertama, yang sering disebut teori normal, seringkali digeneralisasikan dengan $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma^2 V})$, dengan $\sigma^2 > 0$ dan tidak diketahui serta V matriks yang diketahui nilainya. Untuk kasus kedua seringkali asumsi-asumsi yang kaku disyaratkan seperti misalnya Y_i adalah independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi komulatif yang kontinu (Usman dan Warsono,2000).

Misalkan L persamaan dengan kombinasi matriks :

$$[\boldsymbol{Y_1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{Y_2} \quad \boldsymbol{X_2} \ \dots \ \boldsymbol{Y_l} \quad \boldsymbol{X_l}]$$

Dimana matriks tersebut memiliki n baris dan L(K+1) kolom, sehingga dapat ditulis $\boldsymbol{Y_j} = \boldsymbol{X_j \beta_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j}$. Kombinasikan semua persamaan L dalam bentuk partisi berikut :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_l \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = X_1 \beta_1 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = X_2 \beta_2 + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$Y_l = X_l \beta_l + \varepsilon_l$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_l \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_l \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_l \end{bmatrix}$$

Jika masing-masing X_j, j = 1, …, L,terdiri dari unsur-unsur non stokastik dan memiliki peringkat penuh, X akan memiliki sifat yang sama. Jika masing-masing ε_j memiliki $E(\varepsilon_j) = 0$ sehingga memilki ε. Asumsikan bahwa galat dari masing-masing persamaan adalah homokedastisitas dan tidak berkorelasi, yang berarti $E(\varepsilon_j \varepsilon_j') = \sigma_{jj} I$, j = 1, …, L. Tetapi jika asumsi bahwa galat dari masing-masing persamaan menjadi $E(\varepsilon_j \varepsilon'_{L)=} \sigma_{jL}$ termasuk ke dalam kasus khusus (Graybill, 1983).

2.2 Pendugaan Parameter

2.2.1 Pengertian Pendugaan Parameter dan penduga

Pendugaan atau estimasi merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel random yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi, dengan pendugaan ini keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Penduga adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter. Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap dari suatu contoh disebut nilai duga (estimate) (Yitnosumarto, 1990).

2.2.2 Sifat-sifat Penduga

Menurut Andi Hakim Nasution Penduga Parameter mempunyai sifat-sifat antara lain :

1. Tak Bias

   Setiap fungsi peubah acak yang diamati merupakan penduga tak bias dari parameter θ, apabila nilai harapannya sama dengan parameter tersebut. Jadi, apabila t(X_1, …, X_n) atau dengan catatan vektor , t(X'), merupakan fungsi atau statistik yang menjadi penduga tak bias dari θ, haruslah

   $$\boldsymbol{E\big(t(X')\big) = \theta}$$

   Jika tidak terpenuhi maka t(X') dikatakan sebagi penduga yang berbias dari θ, dan besarnya bias ini, B(t,θ), sama dengan E(t(X'))-θ. Jika t(X') penduga tak bias dari θ maka $E(t(X') - \theta)^2$ sama dengan ragam t(X'). tetapi jika t(X') penduga berbias, maka nilai harapan ini disebut kuadrat tengah galat dari penduga t(X'). sedangkan $|t(X') - \theta|$disebut juga sebagai galat pendugaan

2. Ragam Minimum

   Apabila suatu parameter terdapat lebih dari satu macam penduga tak bias, maka penduga yang terpilih sebagai yang lebih baik atau yang terbaik adalah yang memiliki ragam yang sekecil-kecilnya. Hal ini disebabkan karena ragam penduga tersebut adalah ukuran penyebaran penduga di sekitar nilai tengah populasi. Jika misalnya $\hat{\theta}$ penduga tak bias dari θ maka sesuai dengan ketidaksamaan Chebyshev

   $$\boldsymbol{p\big(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\big) \geq 1 - \frac{\sigma_{\hat{\theta}}^2}{\varepsilon^2}, \varepsilon} > 0$$

   Dengan demikian, bertambah kecil $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ akan bertambah besar pula had bawah peluang memperoleh θ di dalam selang $\langle \theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon \rangle$

Suatu penduga tak bias yang memiliki ragam terkecil diantara semua penduga tak bias lainnya dan sifat ragam terkecil ini berlaku untuk semua kemungkinan nilai-nilai parameter dinamakan penduga tak bias dengan ragam minimum seragam

3. Konsisten

   Apabila $\hat{\theta}_n$ merupakan penduga parameter θ yang ditentukan berdasarkan contoh berukuran n, maka $\hat{\theta}_n$ disebut penduga yang konsisten apabila $\hat{\theta}_n$ konvergen dalam peluang ke θ untuk n →∞ atau untuk setiapn ε>0,

$$\lim_{n\to\infty} P\langle|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\rangle = 0$$

4. Statistik Cukup

   Sesuatu yang dijadikan sebagai penduga suatu parameter adalah statistik atau fungsi peubah acak. Misalnya salah satu penduga yang digunakan adalah hasil rata-rata dari contoh berukuran n. jika statistik ini dianggap telah cukup memberikan semua informasi yang diperlukan untuk pendugaan parameter populasi maka statistik ini secara wajar dapat disebut statistik cukup.

5. Kelengkapan Suatu sebaran

   Misalkan X peubah acak dengan fungsi peluang atau fungsi kepekatan f(x;θ), θ Є Θ sedangkan Θ adalah ruang parameter, yaitu gugus semua nilai yang mungkin diambil oleh θ. Sebaran peubah acak X disebut sebaran lengkap jika untuk suatu fungsi s(X) dan untuk setiap nilai θ dan X,

$$E\langle S(X)\rangle = 0$$

   Mengakibatkan s(X)=0.

   Pengertian kelengkapan sebaran ini penting peranannya di dalam usaha mencari penduga terbaik yang khas dari parameter sebaran tersebut.

Penduga yang baik adalah penduga yang memenuhi dua sifat pendugaan yaitu tak bias dan mempunyai varians minimum.

2.3 Generalized Least Square

Salah satu metode yang sangat populer untuk mengestimasi nilai rata-rata dari variabel random adalah Metode Estimasi Kuadrat Terkecil (*Least Square Estimation*). Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square*) merupakan salah satu metode untuk menganalisis regresi yang paling sering digunakan berdasarkan asumsi-asumsi tertentu yang merupakan bagian dari ilmu statistika.

Dalam perkembangannya Metode Estimasi Kuadrat Terkecil berkembang menjadi beberapa metode sesuai dengan kebutuhan, misalnya apabila terjadi penyimpangan asumsi pada kuadrat terkecil. Ada beberapa asumsi klasik yang harus dipenuhi oleh bentuk estimasi OLS (*Ordinary least Square*) agar hasil estimasinya dapat diandalkan. Salah satu asumsi penting yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah asumsi *homoskedastisitas*. Asumsi variansi galat homogen (asumsi *homoskedastisitas*) diperlukan oleh metode OLS untuk mendapatkan parameter regresi yang bersifat tak bias linear terbaik (*best linear unbiased estimation*). Tidak dipenuhinya asumsi variansi galat homogen atau terjadi heterokedastisitas akan dapat mengakibatkan :

a. Penduga OLS yang diperoleh tetap memenuhi persyaratan tidak bias.
b. Varian yang diperoleh menjadi tidan efisien, artinya cenderung membesar sehingga tidak lagi merupakan varian yang terkecil.

Dengan demikian model perlu diperbaiki dulu agar pengaruh dari heteroskedastisitasnya hilang (Muhammad Firdaus, 2004).

Penanganan kasus variansi galat tidak homogen (*heteroskedastisity*) diikuti munculnya penyimpangan asumsi lainnya. Pada kondisi adanya heteroskedastisitas estimasi atau pendugaan akan lebih efisien apabila menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS). Karena GLS sebagai salah satu bentuk *least square estimation,* merupakan bentuk estimasi yang dibuat untuk mengatasi sifat heteroskedastisitas yang memiliki kemampuan untuk mempertahankan sifat efisiensi estimatornya tanpa harus kehilangan sifat *unbiased* dan konsistensinya (Kariya dan Kurata, 2004).

2.4 Autokorelasi

Menurut Ananta (1987) bahwa galat ε_i berkorelasi satu sama lain disebut berautokorelasi, koefisien korelasi ini dinyatakan dengan ρ, jadi dapat ditulis

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + v_i$$

Dengan $|\rho| < 1$ dan $v_i$bebas satu sama lain dan $v_i \sim N(0, \sigma^2)$

Model $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + v_i$ dikenal sebagai model autoregresi tingkat satu. Nama autoregresi adalah sesuai karena dapat diinterpretasikan sebagai regresi v_i atas dirinya yang terlambat satu periode. Dinamakan tingkat satu karena hanya v_i dan nilai tepat sebelumnya yang terlibat.

$$\varepsilon_{i-1} = \rho\varepsilon_{i-2} + v_{i-1} \text{ dan}$$

$$\varepsilon_{i-2} = \rho\varepsilon_{i-3} + v_{i-2}$$

Sehingga diperoleh:

$$\varepsilon_i = \rho\{\rho\varepsilon_{i-2} + v_{i-1}\} + v_i$$

$$\varepsilon_i = v_i + \rho^2\varepsilon_{i-2} + \rho v_{i-1} \text{ dan}$$

$$\varepsilon_i = v_i + \rho^2\{\rho\varepsilon_{i-3} + v_{i-2}\} + \rho v_{i-1}$$

$$\varepsilon_i = v_i + \rho^3\varepsilon_{i-3} + \rho^2 v_{i-2} + \rho v_{i-1}$$

Persamaan tersebut dapat dilanjutkan terus hingga dampak ε hilang (karena ρ dipangkatkan dengan angka yang besar sekali) maka

$$\varepsilon_i = v_i + \rho v_{i-1} + \rho^2 v_{i-2} + \rho^3 v_{i-3+\cdots}.$$

Terlihat bahwa ε_i dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear v_i, v_{i-1}, v_{i-2},… yang semuanya memenuhi kondisi ideal. Karenanya,

$$var(\varepsilon_i) = var(v_i) + \rho^2 var(v_{i-1}) + (\rho^2)^2 var(v_{i-2}) + (\rho^3)^2 var(v_{i-3}) + \cdots$$

$$= \sigma_v^2\{1 + \rho^2 + (\rho^2)^2 + (\rho^3)^2 + \cdots\}$$

Karena $var(v_i) = \sigma_v^2$ untuk semua I dan $cov(v_i, v_j) = 0$ untuk semua i≠j

$$var(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_v}{1 - \rho^2}$$

Sementara itu,

$$E(\varepsilon_i) = E(v_i) + \rho E(v_{i-1}) + \rho^2 E(v_{i-2}) + \cdots$$

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

Karena per asumsi nilai harapan v_i(untuk tiap nilai i) sama dengan nol

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}) = E\{(\rho\varepsilon_{i-1} + v_i)\varepsilon_{i-1}\}$$

$$= \rho E(\varepsilon_{i-1})^2 + E(v_i \varepsilon_{i-1})$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_{i-1}) = \rho var(\varepsilon_i)$$

Karena per asumsi $var(\varepsilon_i)$ sama untuk setiap pengamatan dan tak ada korelasi antara v_i dan v_{i-1} sehingga tidak ada korelasi antara v_i dan ε_{i-1}. Maka matriks Δ dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Tampak terlihat bahwa kini hanya perlu menduga satu peubah ρ, untuk menduga matriks Δ.

2.5 Heterokedastisitas

Heterokedastisitas muncul apabila kesalahan atau residual dari model yang diamati tidak memiliki varians yang konstan dari suatu observasi ke observasi lainnya. Salah satu asumsi paling penting adalah bahwa varians tiap unsur *disturbance*, tergantung pada nilai yang dipilih dari variabel yang menjelaskan yaitu suatu angka konstan yang sama dengan σ^2. Ini merupakan asumsi homokedastisitas dengan *Homo* berarti sama, *scedastic* berarti sebaran yaitu varians yang sama. Gangguan (*disturbance*) yang muncul adalah homokedastik yaitu semua gangguan tadi mempunyai varians yang sama (Gujarati, 1997).

2.6 Uji Hipotesis

Dalam model linear umum $Y = X\beta + \varepsilon$ dengan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, Λ adalah statistik uji GLR untuk menguji hipotesis

$$H_0 : H\beta = h \text{ dengan alternatif } H_a : H\beta \neq h$$

Dengan statistik uji diberikan oleh

$$\Lambda = \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}_\omega^2 - \hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\Omega^2}\right) = \left[\frac{w'(I - TT^-)w - Y'(I - XX^-)Y}{Y'(I - XX^-)Y}\right](\frac{n-p}{q})$$

dan $\Lambda = \left[\frac{(H\hat{\beta}-h)'[H(X'X)^{-1}H'](H\hat{\beta}-h)}{Y'(I-XX^-)Y}\right]\left(\frac{n-p}{q}\right)$

Di samping itu Λ berdistribusi F(q, n-p, λ), dengan

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(H\hat{\beta} - h)'[H(X'X)^{-1}H'](H\hat{\beta} - h)$$

Uji GLR dengan taraf signifikan sebagai berikut :

Tolak H_0 jika dan hanya jika Λ memenuhi $\Lambda > F_{\alpha,q,n-p}$ dengan $F_{\alpha,q,n-p}$ adalah titik kritis dengan peluang α dari distribusi F dengan derajat bebas q dan n-p.