II. LANDASAN TEORI

Kajian tentang perhitungan nilai aktuaria yang akan dibayarkan n-kali pertahun untuk berbagai produk asuransi jiwa, dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mengetahui beberapa teori-teori dasar terkait asuransi.

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup (*Survival Function*)

Misalkan X adalah usia seseorang dan x adalah usia seseorang yang hidup pada saat menutup polis asuransi, sehingga X merupakan peubah acak waktu meninggal (Bowers, 1997).

Fungsi distribusi X dinyatakan dengan

$F_x(x) = Pr(X \leq x)\ ,\ x \geq 0$

Untuk selanjutnya fungsi kelangsungan hidup (*Survival Function*) akan disingkat dengan istilah fungsi hidup dinyatakan dengan :

$s(x) = 1 - F_x(x) = Pr(X > x)\ ,\ x \geq 0$

$s(x)$ adalah peluang orang yang berusia 0 tahun yang akan hidup mencapai usia x tahun.

2.2 Peluang Waktu Sisa Hidup

Satu notasi yang digunakan untuk menyatakan seseorang masih hidup pada usia tertentu adalah (x). Jika meninggal pada usia X (X>x) maka *T(x)=X– x* menyatakan waktu hidup yang tersisa dari (x). *T(x)* merupakan fungsi peubah acak kontinu X, oleh sebab itu *T(x)* merupakan suatu peubah acak kontinu, dengan fungsi distribusinya didefinisikan sebagai berikut :

$F(t) = \Pr(T(x) \leq t) \qquad \Pr(T(x) \leq t) =_t q_x \quad untuk\ t \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= \Pr(T(x) \leq t | X > x) \\ &= \Pr(X - x \leq t \mid X > x) \\ &= \Pr(x < X \leq x + t | X > x) \\ &= \frac{F_X(x+t) - F_X(X)}{1 - F_X(X)} \\ &= \frac{(1 - s(x+t)) - (1 - s(x))}{s(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_t q_x \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Dalam ilmu aktuaria simbol ${}_t q_x$ menyatakan peluang seseorang berusia *x* akan meninggal *t* tahun lagi atau akan meninggal sebelum usia (x+t) tahun. Sedangkan fungsi hidupnya :

$$\begin{aligned} \Pr(T(x) > t) &= 1 - \Pr(T(x) \leq t) \\ &= 1 - {}_t q_x \\ &= 1 - \left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right] \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_t p_x \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Simbol ${}_tp_x$ menyatakan sebagai peluang seseorang yang berusia x akan hidup sampai dengan usia t tahun lagi atau akan hidup sampai usia (x+t) tahun, sehingga untuk seseorang yang baru lahir (*new born*) ${}_xp_0$ merupakan *survival function* dan dituliskan dengan

${}_xp_0 = s(x)$

Kondisi lainnya adalah bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun dan meninggal dalam u tahun, dengan demikian x akan meninggal antara x+t dan x+t+u. Kondisi ini disebut sebagai peluang meninggal yang ditangguhkan dan didefinisikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) \leq t+u) \\
&= P(T(x) \leq t+u) - P(T(x) < t) \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\
&= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= \left(\frac{s(x+t)}{s(x)} . \frac{s(x+t)}{s(x+t)}\right) - \left(\frac{s(x+t)}{s(x+t)} . \frac{s(x+t+u)}{s(x)}\right) \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left(1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}\right) \\
&= {}_tp_x - (1 - {}_up_{x+t}) \\
&= {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}
\end{aligned}
$$

Jika u=1, maka peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan ${}_{t|}q_x$, sehingga:

$${}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t}$$

Dalam kasus diskrit sering disebut dengan *Curtate-Future-Lifetime,* dengan simbol K(x). K(x) adalah bilangan integer terbesar dari T(X). Fungsi distribusinya adalah:

$$\Pr[K(x) = k] = \Pr[k \le T(x) < k+1]$$
$$= \Pr[k < T(x) \le k+1]$$
$$= {}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x$$
$$= {}_{k}p_x \cdot q_{x+k}$$
$$= {}_{k|}q_x \text{ , k= 0,1,2,3,…..}$$

Diketahui sebelumnya ${}_{t|}q_x$ adalah fungsi distribusi dari T(x), sehingga fungsi densitas T(x) adalah:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\,{}_{t}q_x$$
$$= \frac{d}{dt}(1 - {}_{t}p_x)$$
$$= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right]$$
$$= \frac{d}{dt}\left[- \frac{s(x+t)}{s(x)}\right]$$
$$= \frac{-s\prime(x+t)}{s(x)}$$
$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{-s\prime(x+t)}{s(x+t)} \qquad (2.2.3)$$

2.3 *Life Table*

Misal pada suatu kelompok masing-masing anggota diobservasi mengenai tingkat kematiannya berdasarkan kelompok umur. Tabel yang diperoleh dari hasil observasi ini berupa *life table*, tabel mortalita dan tabel penyusutan.

Tabel 2.1 Tabel Mortalita

x	l_x	d_x	p_x	q_x	e_x^0
0	l_0	d_0	p_0	q_0	e_0^0
1	l_1	d_1	p_1	q_1	e_1^0
2	l_2	d_2	p_2	q_2	e_2^0
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
50	l_{50}	d_{50}	p_{50}	q_{50}	e_{50}^0
51	l_{51}	d_{51}	p_{51}	q_{51}	e_{51}^0
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
.	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
105	l_{105}	d_{105}	p_{105}	q_{105}	e_{105}^0
106	l_{106}				

Keterangan :

x : usia

l_x : jumlah yang hidup

d_x : jumlah yang meninggal

p_x : peluang hidup

q_x : peluang meninggal

e_x^0 : nilai harapan hidup

Pada anggota kelompok yang diamati di atas dimisalkan dilahirkan pada saat yang sama dan jumlahnya l_0, selama satu tahun berikutnya jumlah yang meninggal adalah d_0 sehingga yang bisa mencapai umur satu tahun sebanyak l_1. Satu tahun berikutnya jumlah yang meninggal adalah d_1 sehingga yang mencapai umur dua tahun sebanyak l_2. Untuk usia 50 tahun terdapat sebanyak l_{50}. Satu tahun kemudian jumlah yang meninggal sebanyak d_{50} sehingga yang mencapai usia 51 sebanyak l_{51}. Proses tersebut terus berlangsung, sampai terdapat keadaan $l_\omega = 0$ (ω adalah umur terakhir dari tabel mortalita).

Dari keterangan tersebut didapatkan hubungan sebagai berikut :

$l_{x+1} = l_x - d_x$

dan juga hubungan di bawah ini n ≥1, maka

$l_x = l_{x+1} + d_x$

Perhitungan nilai peluang hidup p_x dan peluang meninggal q_x ditentukan dengan

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (2.3.1)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \qquad (2.3.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.3.1) dan (2.3.2) diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut :

$l_{x+1} = l_x \cdot p_x$
$d_x = l_x \cdot q_x$
$p_x + q_x = 1$
$p_x = 1 - q_x$

2.4 Laju Kematian (*the force of mortality*)

Laju kematian dari seseorang yang baru lahir dan akan meninggal antara usia x dan x + Δx dengan syarat hidup pada usia x dapat dinyatakan dengan :

$$P(x < X < x + \Delta\text{x}|X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Karena F(x + Δx) – F(x) dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) - F(x)\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} . \Delta x}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{F^{'}(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian dari seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan :

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x | X > x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} . \frac{F^{'}(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\mu(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.4.1)$$

atau

$$\mu(x + t) = \frac{f(x + t)}{1 - F(x + t)}$$

dengan $\mu(x + t)$ adalah probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia *x* tahun antara *t* dan $t + \Delta t$ tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia *x* sampai *x* + *t* tahun.

karena s(x) = 1- F(x) atau F(x) = 1 – s(x), maka :

F’(x) = f(x) = -s’(x)

Sehingga diperoleh nilai laju kematian pada usia x adalah :

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{ds(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)dx = -d \ln s(x)$$

Dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh :

$$\mu(y)dy = -d \ln s(y)$$

dan dengan menggunakan intergral tertentu pada batas x sampai x+t maka diperoleh :

$$\int_{x}^{x+t} \mu(y)dy = -\int_{x}^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y)|_{x}^{x+t}$$

$$= -\{\ln s(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -\ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln\ {}_{t}p_{x}$$

$${}_{t}p_{x} = e^{-\int_{x}^{x+t} \mu(y)dy}$$

Jika nilai laju kematiannya konstan ($\mu(x) = \mu$) untuk semua x $\geq$ 0, artinya besarnya nilai dari *force of mortality* (laju kematian) adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh :

$$s(x) = {}_{x}p_{0} = e^{-\int_{0}^{x} \mu(y)dy} = e^{-\mu x}$$

Diketahui sebelumya bahwa ${}_tq_x$ adalah fungsi distribusi dari T(x), sehingga fungsi densitas dari T(x) adalah :

$$f(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_x$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{d}{dt}\ {}_tp_x\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}$$

$$f(t) = {}_tp_x \cdot \mu(x+t)$$

2.5 Distribusi Gompertz

Terdapat beberapa hukum yang dapat digunakan untuk menghitung mortalita dan fungsi survival yaitu Hukum De Moivre, Gompertz, Makeham, dan Weibull. Dalam tulisan ini hanya digunakan Hukum Gompertz sebagai perhitungan simulasi data. Menurut Wai Sum Chan dan Yui Kuen Tse, dengan SDF (*Survival Distribution Function*) atau fungsi distribusi tahan hidupnya dari distribusi Gompertz

$$S_x(x) = exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right], R > 0, a > 0, x > 0.$$

Dari SDF maka didapatkan CDF sebagai berikut :

$F_x(x) = 1 - exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]$

Sehingga dari fungsi tersebut didapatkan juga *pdf* sebagai berikut :

$$f_x(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]\right)$$

$$= -exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]\frac{d}{dx}\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]$$

$$= -exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right](-Re^{ax})$$

$$= Re^{ax}exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]$$

Sehingga diperoleh *Force Mortality*-nya sebagai berikut

$$\mu_x = \frac{f_x(x)}{S_x(x)} = \frac{Re^{ax}exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]}{exp\left[\frac{R}{a}(1 - e^{ax})\right]} = Re^{ax}, R > 0\ dan\ a > 0$$

R merupakan tingkat kematian umum dan a adalah laju pertumbuhan umur yang spesifik dari *force mortality*.

Benyamin Gompertz (1825) mengumumkan bahwa *force mortality* akan semakin meningkat secara eksponensial. Menurut Jordan, C.W fungsi *Force Mortality*-nya didapatkan sebagai berikut

$$\mu_x = Bc^x \qquad (2.5.1)$$

dan *pdf* adalah

$$f(x, c, B) = Bc^x e^{\frac{-b(c^{x-1})}{\log(c)}}, x \geq 0, B > 0, c \geq 1$$

di mana B dan c adalah parameter.

sehingga diperoleh *survival function* bagi (x) sebagai

$$s(x) = {}_xp_0 = \exp(-\int_0^x \mu_s\, ds) = \exp(-\int_0^x Bc^s ds)$$

$$= \exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) = \exp(-m(c^x - 1)) \qquad (2.5.2)$$

$$m = -\frac{B}{\ln c} \qquad (2.5.3)$$

Berdasarkan persamaan (2.2.2) dan (2.2.3) diperoleh :

$$f(x) = \ {}_tp_x \cdot \mu_{(x+t)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\mu(x+t)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.5.1) dan (2.5.2) diperoleh :

$$f(x) = \frac{\exp[-m(c^{x+t} - 1)]}{\exp[-m(c^x - 1)]}.Bc^{x+t}$$

$$f(x) = \exp[-m(c^{x+t} - c^x)].Bc^{x+t} \qquad (2.5.4)$$

2.6 Bunga (*Interest*)

Bunga atau bunga bank merupakan pembayaran yang dilakukan oleh peminjam sebagai balas jasa atas pemakaian uang yang dipinjam (Sudarto, 1976). Secara umum cara perhitungan bunga dibagi menjadi dua yaitu :

2.6.1. Bunga Sederhana

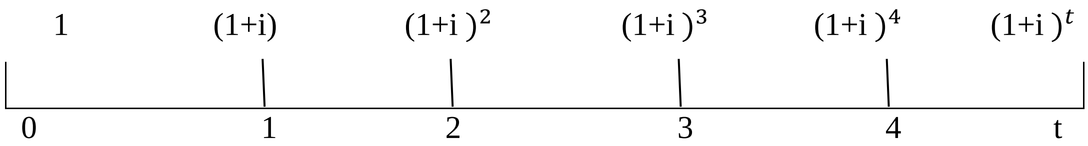
Cara perhitungan bunga yang hanya berdasarkan pada perbandingan pokok dan jangka investasinya dinamakan bunga sederhana (Takasi, 1993). Misal *P* besar pokok, *i* tingkat bunga, *t* jangka waktu investasi (dalam tahun), maka total pokok beserta bunga (S) adalah : S = P (1 + i.t).

Gambar 2.1 Sistem Bunga Sederhana

Gambar 2.1 menggambarkan modal (pokok investasi) dengan bunga sebesar I pertahun dan waktu t= 0,1,2,…,n.

2.6.2 Bunga Majemuk

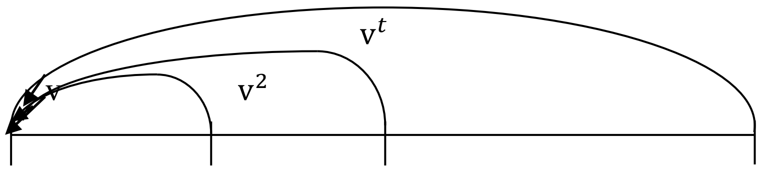
Bunga majemuk adalah suatu perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan besar bunga yang diperoleh (Takasi, 1993). Misal *P* besar pokok , *i* tingkat bunga, *t* jangka tahun investasi (dalam tahun), maka total pokok beserta bunga (S) adalah : $S = P(1 + i)^t$.



Gambar 2.2 Sistem Bunga Majemuk

Fungsi *v* dalam bunga majemuk didefinisikan sebagai faktor diskonto :

$$v = \frac{1}{(1+i)}$$



Gambar 2.3 Nilai sekarang dalam bunga majemuk

v adalah nilai sekarang (*Present Value*) dari pembayaran sebesar 1 yang dilakukan 1 tahun kemudian. Sedangkan untuk tingkat diskonto didefinisikan *d*, sebagai berikut :

$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})} = \mathrm{iv} = 1 - \mathrm{v}$ maka $1 - \mathrm{d} = \mathrm{v}$

Karena v adalah *Present Value* untuk pembayaran sebesar 1 yang akan dibayarkan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat maka besarnya bunga yang hilang adalah $d = 1 - v$. Dalam perhitungan asuransi, terdapat dua jenis suku bunga majemuk yaitu suku bunga nominal dan suku bunga efektif. Perbedaan kedua suku bunga tersebut terletak pada periode pembayaran (perhitungan) bunga yang biasa disebut periode konversi. Apabila periode pembayaran bunganya adalah tahunan, maka suku bunganya disebut suku bunga efektif. Selain dari itu, suku bunganya disebut suku bunga nominal. Suku bunga nominal dan suku bunga efektif dinyatakan dalam bentuk persen per tahun serta dinotasikan dalam *i* untuk suku bunga efektif dan $i^{(j)}$ untuk suku bunga nominal, dimana *j* menyatakan frekuensi bunga yang dibayarkan dalam setahun.

Sehingga secara akumulasi terdapat hubungan antara tingkat suku bunga nominal dengan tingkat suku bunga efektif sebagai berikut :

$1+\mathrm{i}=\left[1 + \frac{i^{(j)}}{j}\right]^j$

Sehingga diperoleh : $1 + \frac{i^{(j)}}{j} = (1+i)^{1/j}$

$$i^{(j)}=j\left[(1+i)^{\frac{1}{j}} - 1\right]$$

$$i^{(j)}=j\left[(1+i)^{\frac{1}{j}}-(1+i)^{0}\right]$$

$$i^{(j)}=\frac{(1+i)^{\frac{1}{j}}-(1+i)^{0}}{1/j} \qquad (2.6.1)$$

Sedangkan hubungannya dengan tingkat diskon

1- d= $\left[1+\frac{d^{(j)}}{j}\right]^{j}$

Sehingga diperoleh : $d^{(j)}=j\left[1-(1-d)^{\frac{1}{j}}\right]=\left[1-v^{\frac{1}{j}}\right]$

dan terdapat hubungan antara tingkat suku bunga nominal dengan tingkat diskon :

$$d^{(j)}=1-v^{j}=1-\frac{1}{1+i^{(j)}}=\frac{i^{(j)}}{1+i^{(j)}}=\frac{i^{(j)}}{(1+i)^{1/j}}$$

Jika frekuensi perhitungan bunga nominal semakin besar dalam satu satuan waktu bunga efektif, maka akan terjadi perhitungan bunga secara kontinu :

$$\lim_{j\to\bowtie} i^{(j)}=\delta$$

konvergen pada suatu nilai yang dikatakan sebagai percepatan pembungaan (*force of interest*) dan ekivalen dengan tingkat suku bunga efektif, *i*.

perhatikan persamaan (2.6.1) :

$$i^{(j)}=\frac{(1+i)^{\frac{1}{j}}-(1+i)^{0}}{1/j}$$

maka dapat dilihat bahwa δ merupakan derivative dari fungsi $(1+i)^{x}$ pada titik x=0.

Misal $y=(1+i)^{x}$

$$\frac{dy}{dx}y=\frac{d}{dx}(1+i)^{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\ln y=\ln(1+i)\frac{d}{dx}x$$

$$\frac{1}{y}y' = \ln(1+i)$$

$$y' = y \cdot \ln(1+i)$$

$$y' = (1+i)^x \cdot \ln(1+i)$$

Untul x=0, maka

$$y' = \ln(1+i)$$

Karena $y = f(x) \to y = (1+i)^x = f(x) \to\ f(x+\Delta x) = (1+i)^{x+\Delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+i)^{x+\Delta x} - (1+i)^x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+i)^{\Delta x} - (1+i)^0}{\Delta x}$$

Ambil $\Delta x = \frac{1}{j}$

$$\lim_{1/j \to 0} \frac{(1+i)^{\frac{1}{j}} - (1+i)^0}{\frac{1}{j}} = \frac{dy}{dx}|_{x=0} = \ln(1+i)$$

$$\lim_{j \to \bowtie} i^{(j)} = \ln(1+i)$$

Sehingga diperoleh

δ = ln(1+ i)

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t} = v^t \qquad (2.6.2)$$

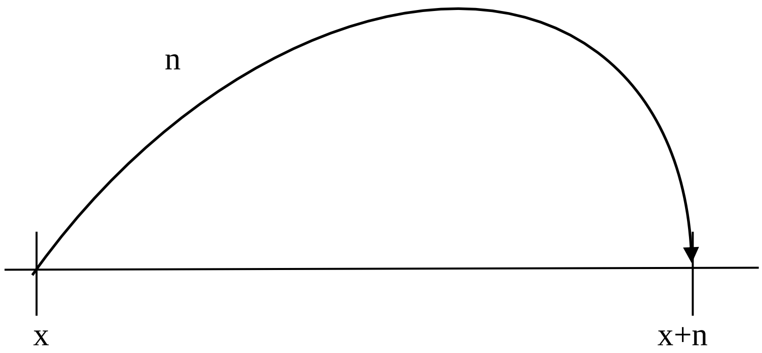
2.7 Asuransi

Asuransi berasal dari kata *assurance* atau *insurance* yang artinya jaminan atau pertanggungan. Sedangkan asuransi jiwa adalah asuransi yang bertujuan menanggung orang terhadap kerugian finansial tak terduga yang disebabkan karena meninggalnya terlalu cepat atau hidupnya terlalu lama (Salim, 1993). Risiko yang timbul pada asuransi jiwa terutama terletak pada "unsur waktu (*time*)", oleh karena itu sulit untuk menentukan kapan seseorang meninggal dunia. Sehingga untuk memperkecil risiko tersebut maka sebaiknya diadakan pertanggungan jiwa. Dalam dunia yang makin maju, bidang asuransi terlibat dalam banyak segi kehidupan manusia. Perusahaan asuransi telah tumbuh menjadi perusahaan besar di dunia dan bersamaan dengan itu permintaan akan tenaga ahli asuransi seperti aktuaris makin meningkat pula. Menurut keputusan Menteri Keuangan No. 1250/KMK. 013/1998, "Aktuaris adalah seseorang yang berdasarkan latar belakang pendidikannya memiliki keahlian untuk melakukan perhitungan matematis asuransi jiwa". Oleh karena itu perusahaan asuransi mempekerjakan aktuaris adalah untuk menyusun perhitungan secara matematis produk-produk asuransi.

Jumlah dan waktu pembayaran benefit pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai tertanggung (nasabah meninggal), sehingga untuk menghitung nilai APV (*Actuarial Present Value*) dari suatu produk asuransi jiwa dipengaruhi oleh v^t = faktor diskon (fungsi dari t) dan b_t = benefit (manfaat) yang akan diterima. Dan keduanya membentuk suatu random variable yang dilambangkan dengan Z_t. Dengan nilai Z_t didefinisikan sebagai $Z_t = v^t \cdot b_t$. Diketahui T(x) adalah random variabel dari waktu sisa hidup nasabah atau waktu dari dikeluarkannya polis sampai waktu meninggalnya nasabah, maka Z_t adalah fungsi peubah acak atau *Present Value* pembayaran benefit pada saat polis asuransi dikeluarkan.

2.7.1 Asuransi Seumur Hidup (*Whole Life Insurance*)

Asuransi jiwa seumur hidup adalah asuransi yang menjamin seumur hidup tertanggung dan akan mendapatkan uang pertanggungan bila tertanggung tersebut meninggal.



Gambar 2.4 Sistem Pembayaran pada Asuransi seumur Hidup

Diilustrasikan bahwa besarnya manfaat (b_t) sebesar 1 satuan dibayarkan segera pada saat meninggal, maka :

Untuk $b_t = 1$, $t \geq 0$, dan $v_t = v^t$ diperoleh nilai $Z_t = v^t$, $t \geq 0$. Sehingga untuk menentukan nilai dari *Net Single Premium* (Premi Tunggal) atau disebut juga nilai sekarang {*Actuarial Present Value* (APV)} dengan simbol $\bar{A}_x$adalah :

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \cdot f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \cdot \ {}_tp_x \cdot \mu_x dt$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.5.4) dan (2.6.2) diperoleh nilai APV dengan distribusi Gompertz :

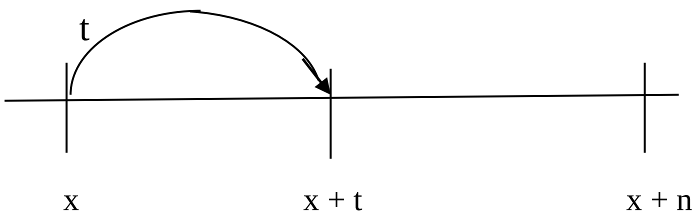
$$\overline{A}_x = \int_0^\infty \exp(-\delta t) \cdot \exp[-m(c^{x+t} - c^x)] \cdot Bc^{x+t} dt$$

$$= \int_0^\infty \exp(-\delta t + [(-m(c^{x+t} - c^x)]) \cdot Bc^{x+t} dt \qquad (2.7.1)$$

Persamaan 2.7.1 adalah nilai APV untuk Asuransi Seumur Hidup.

2.7.2 Asuransi Berjangka (*Term Insurance*)

Asuransi berjangka adalah suatu asuransi yang apabila tertanggung sampai dengan jangka waktu tertentu meninggal, maka akan mendapatkan uang pertanggungan (manfaat).



Gambar 2.5 Sistem Pembayaran Benefit pada Asuransi Berjangka

Besarnya manfaat (b_t) sebesar satu satuan diberikan segera setelah meninggal, maka :

$b_t = 1 \qquad t \leq n \qquad b_t = 0 \qquad t > n$

dengan Z=$e^{-\delta t} = v^t$ untk $t \leq n$ dan Z=0 untuk $t > n$

Maka APV dari asuransi ini adalah :

$$E[Z_t]=E[V^t]= \bar{A}'_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t . f(t)\, dt + \int_n^\infty 0. f(t) dt$$

$$\bar{A}'_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \ \mu_{(x+t)}\, dt$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.5.4) dan (2.6.2) diperoleh nilai APV dengan distribusi Gompertz :

$$\bar{A}'_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \exp(-\delta t) \cdot \exp[-m(c^{x+t} - c^x)] \cdot Bc^{x+t} dt$$

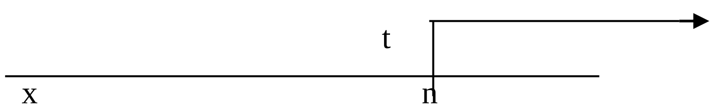
$$= \int_0^n \exp(-\delta t + [(-m(c^{x+t} - c^x)] \cdot Bc^{x+t}\, dt$$

$$= \int_0^n \exp(-\delta t - m(c^{x+t} - c^x)) \cdot Bc^{x+t} dt \qquad (2.7.2)$$

Persamaan 2.7.2 adalah nilai APV untuk Asuransi Berjangka.

2.7.3 Asuransi *Endowment* Murni (*Pure Endowment Insurance*)

Asuransi *endowment* murni adalah suatu asuransi yang apabila tertanggung sampai dengan jangka waktu tertentu masih hidup, maka akan mendapatkan sejumlah uang pertanggungan. Untuk *endowment* murni, t dapat lebih besar atau sama dengan interval waktu dari diterbitkannya polis sampai pembayaran *benefit* / manfaat.



Gambar 2.6 Sistem Pembayaran Manfaat pada Asuransi Endowment Murni

Besarnya manfaat (b_t) sebesar 1 satuan diberikan sesaat setelah meninggal, maka :

$b_t = 1 \quad t > n \qquad v_t = v^n \qquad t > n$

$b_t = 0 \quad t \leq n \qquad v_t = v^n \qquad t \leq n$

Dengan $Z_t = v^t$ $t > n$ dan $Z_t = 0$ $t \leq n$

Maka nilai APV dari asuransi ini adalah :

$E[Z_t]=E[V^t]= \bar{A}_{x:\overline{n|}} = \int_n^\infty v^n . f(t)\, dt = v^t \int_n^\infty f(t) dt$

Catatan ${}_t q_x$ = $p(t(x) \leq t) = \int_0^1 f(t) dt$

${}_t p_x = p(t(x) > t) = \int_1^\infty f(t) dt$

Dari persamaan (2.5.4) dan persamaan (2.6.2) diperoleh nilai APV dengan distribusi Gompertz :

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = v_n \cdot {}_n p_x$$

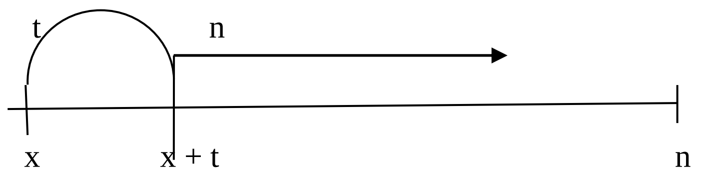
$$= \exp(-\delta n) \cdot \exp[-m(c^{x+n} - c^x)]$$

$$= \exp(-\delta n - m(c^{x+n} - c^x)) \qquad (2.7.3)$$

Persamaan (2.7.3) adalah nilai APV untuk Asuransi Endowment Murni.

2.7.4 Asuransi Dwiguna

Asuransi dwiguna adalah suatu asuransi yang apabila tertanggung meninggal dunia atau masih hidup dalam jangka waktu asuransi maka tetap akan mendapatkan sejumlah uang pertanggungan.



Gambar 2.7 Sistem Pembayaran Santunan pada Asuransi Dwiguna

Besarnya manfaat (b_t) sebesar 1 satuan diberikan sesaaat setelah meninggal atau diberikan sesaat setelah masa kontrak habis dan tertanggung masih hidup, maka :

$b_t = 1 \quad t < n \qquad v_t = v^t \qquad t < n$

$b_t = 1 \quad t > n \qquad v_t = v^t \qquad t > n$

Dengan $Z_t = V^t \quad t < n$ dan $Z_t = V^n \quad t \leq n$

Maka besarnya APV untuk asuransi ini adalah :

$E[Z_t] = E[V^t] = \bar{A}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t . f(t)\, dt + \int_n^\infty v^n . f(t)\, dt$

Dari persamaan (2.5.4) dan (2.6.2) diperoleh nilai APV dengan distribusi Gompertz :

$$\bar{A}_{\overline{x:n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \; \mu_{(x)}\, dt + v^n \cdot {}_n p_x$$

$$= \int_0^n exp(-\delta t - mc^{x+t} + mc^x) \cdot Bc^{x+t} dt + \exp(-\delta n - m(c^{x+n} - c^x))$$

(2.7.4)

Persamaan (2.7.4) adalah nilai APV untuk Asuransi Dwiguna.

2.8 Anuitas (*Annuity*)

Anuitas didefinisikan sebagai suatu rangkaian pembayaran dengan jumlah tertentu dalam selang dan periode waktu tertentu (Sembiring, 1986).

2.8.1 Anuitas Tentu

Anuitas tentu adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan selama jangka waktu tertentu dilakukan dengan syarat dan besarnya pembayaran berkala tidak perlu sama. Anuitas tentu dibagi menjadi dua yaitu anuitas yang dibayarkan di awal jangka waktu pembayaran disebut anuitas awal (*due-annuity*) dan anuitas yang dibayarkan di akhir jangka waktu pembayaran disebut anuitas akhir (*immediate annuity*). Total nilai sekarang dari anuitas akhir yang dinotasikan dengan $a_{\overline{n|}}$ adalah :

PV = $a_{\overline{n|}}$= v + v ^{2} + v^3 +… + v^{n-1} +v^n

Dengan menggunakan rumus deret geometri, maka :

$a_{\overline{n|}}$= v(1+v + v ^{2} + v^3 +… + v^{n-2} +v^{n-1})

$$= v\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)$$

$$= v\left(\frac{1-v^n}{iv}\right)$$

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i}$$

Sedangkan anuitas awal dinotasikan sebagai $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ adalah :

$\ddot{a}_{\overline{n|}}$ =1+v + v ^{2} + v^3 +… + v^{n-2} +v^{n-1}

$$= \frac{1-v^n}{1-v}$$

$$= \frac{1-v^n}{d}$$

Nilai akumulasi dari anuitas tentu akhir dengan n pembayaran diberi notasi $s_{\overline{n|}}$. Nilai akumulasi dari anuitas ini adalah jumlah nilai akumulasi dari tiap pembayaran sehingga :

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1$$

Ruas kanan juga merupakan deret ukur dengan suku pertama $(1+i)^{n-1}$ dengan pembanding $(1+i)^{-1}$ dan banyaknya suku n, sehingga jumlahnya adalah :

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)}\right)$$

$$s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

$$s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Untuk anuitas tertentu awal dengan n pembayaran, nilai akumulasinya diberi notasi $s_{\overline{n|}}$, maka :

$$s_{\overline{n|}} \quad = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)$$

$$v \cdot s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1$$

$$v \cdot s_{\overline{n|}} = s_n$$

2.8.2 Anuitas Tentu (Pembayaran j-kali Setahun)

Suatu anuitas tentu yang pembayarannya dilakukan m-kali dalam setahun dengan selang pembayaran setiap 1/m tahun dan total pembayaran dalam setahun sebesar 1. Maka total nilai sekarang dari anuitas akhir yang dinotasikan $a_{\overline{n|}}{}^{(j)}$ adalah :

$$a_{\overline{n|}}{}^{(j)} = \frac{1}{j}\left(v^{1/j} + v^{2/j} + v^{3/j} + \ldots + v^{n-1/j} + v^{n}\right)$$

$$= \frac{1}{j}\left(\frac{v^{1/j} - v^{n-1/j}}{1-v^{1.j}}\right) = \frac{1-v^n}{j[(1+i)^{1.j}-1]}$$

$$= \frac{1-v^n}{i^{(j)}}$$

Sedangkan untuk anuitas awal

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}{}^{(j)} = \frac{1}{j}\left(1 + v^{1/j} + v^{2/j} + v^{3/j} + \ldots + v^{n-1/j} + v^{n-1/j}\right)$$

$$= \frac{1}{j}\left(\frac{1-v^n}{1-v^{1.j}}\right) = \frac{1-v^n}{j[1-(1-d)^{1.j}]}$$

$$= \frac{1-v^n}{d^{(j)}}$$

2.8.3 Anuitas Tentu (Untuk Pembayaran Kontinu)

Suatu anuitas tentu yang pembayarannya dilakukan sebanyak j kali dalam setahun dengan j→∞, dengan pembayaran yang dapat dilakukan setiap saat. Anuitas ini dinotasikan dengan :

$$a_{\overline{n|}} = \int_0^n v^t dt$$

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

2.8.4 Anuitas Hidup (*Life Annuity*)

Anuitas hidup deretan pembayaran yang sifatnya periodik di mana masih hidup pada saat pembayaran jatuh tempo. Seperti halnya anuitas tentu, anuitas hidup juga dibagi menjadi dua, yaitu : anuitas hidup awal dan anuitas hidup akhir. Perbedaan antara anuitas hidup awal dan anuitas hidup akhir adalah terletak pada pembayaran pertama sedangkan pembayaran berikutnya bersamaan waktunya. Karena dianggap bahwa akhir tahun berimpit dengan awal tahun berikutnya, sehingga didapat hubungan : $\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n|}}$ (Sudarto, 1976).

Sedangkan anuitas hidup sebesar satu per akhir tahun yang pembayarannya dilakukan secara kontinu atau setiap saat disebut anuitas hidup kontinu. Dengan nilai sekarang (*Present Value*) dari pembayarannya anuitas tersebut dinotasikan dengan variabel acak Y adalah $Y = \bar{a}_T$ dengan T ≥0.

Dimana $\bar{a}_T = \frac{1-v^T}{\delta}$

Actuarial Present Value (APV) dari anuitasnya adalah :

$$\bar{a}_x = E[Y] = E[\bar{a}_T] = \int_0^{\infty} \bar{a}_T \cdot f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1-v^t}{\delta} \cdot f(t)dt$$

Dengan menggunakan integral parsial tertentu diperoleh

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Misalkan,

$$u = \bar{a}_T \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-v^t}{\delta}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v^t}{\delta}\right) = -\frac{1}{\delta} \cdot \frac{dv^t}{dt}$$

$$= -\frac{1}{\delta} \cdot v^t \cdot \ln v = -\frac{1}{\delta} \cdot v^t \cdot ln(1+i)^{-1} = \frac{1}{\delta} \cdot v^t \cdot \delta$$

$$= v^t \rightarrow du = v^t dt$$

$$dv = f(t)dt$$

diketahui dari persamaan (2.2.3), maka

$$dv = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \rightarrow v = - {}_tp_x$$

Sehingga,

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} \bar{a}_T \cdot f(t)dt$$

$$= \bar{a}_T \cdot \left(- {}_tp_x\right)_0^{\infty} - \int_0^{\infty} - {}_tp_x \cdot v^t dt$$

Jika, $t = \infty \rightarrow {}_tp_x = 0 \; dan \; \bar{a}_T = \frac{1-v^t}{\delta} = \frac{1}{\delta}$

$t = 0 \rightarrow {}_tp_x = 1 \; dan \; \bar{a}_T = \frac{1-v^0}{\delta} = 0$

Maka,

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_T] = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x dt$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.5.4) dan persamaan (2.6.2) diperoleh nilai anuitas dengan distribusi Gompertz :

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_T] = \int_0^{\infty} \exp(-\delta t) \cdot \exp[-m(c^{x+t} - c^x)]dt$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(-\delta t - mc^{x+t} + mc^x)dt \qquad (2.8.1)$$

Persamaan (2.8.1) adalah nilai dari anuitas kontinu dari asuransi seumur hidup.

Selain anuitas untuk asuransi seumur hidup terdapat juga anuitas untuk asuransi berjangka yaitu pada asuransi berjangka n tahun, asuransi pure endowment dan asuransi dwiguna. Perbedaannya adalah pada jangka waktu asuransinya karena besarnya pembayaran akan dipengaruhi oleh tingkat bunga, peluang hidup dan lamanya pembayaran. Dengan menggunakan cara yang sama pada anuitas seumur hidup, didapatkan :

$$\bar{a}'_{x:\bar{n}|} = E[\bar{a}_T] = \int_0^{n} \exp(-\delta t) \cdot \exp[-m(c^{x+t} - c^x)]dt$$

$$= \int_0^{n} \exp(-\delta t - mc^{x+t} + mc^x)dt \qquad (2.8.2)$$

Persamaan (2.8.2) adalah nilai dari anuitas kontinu untuk asuransi berjangka.

2.9 Premi

Salah satu hal yang sangat mendasar dalam asuransi adalah penentuan besarnya nilai premi. Premi adalah biaya asuransi yang harus ditanggung oleh pihak nasabah kepada pihak perusahaan asuransi. Premi yang sesungguhnya untuk asuransi jiwa ada 2 macam, yaitu premi bersih dan premi kotor. Premi bersih adalah premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya, hanya memperhatikan peluang meninggal dan tingkat bunga. Di dalam premi bersih belum diperhitungkan biaya-biaya yang dikeluarkan untuk pengelolaan, antara lain : biaya administrasi, biaya penutupan, komisi dan lain-lain. Biaya-biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi sebenarnya dibebankan kepada pemegang polis. Biaya-biaya tersebut sudah termasuk di dalam premi yang dibayar dan umumnya disebut sebagai premi bruto atau *gross premium*. Sehingga untuk memperoleh premi bruto harus ditambah biaya pada premi netto atau dapat ditulis sebagai berikut :

Premi Bruto (*gross premium*) = Premi netto + Biaya

Salah satu prinsip yang digunakan untuk menentukan nilai premi adalah prinsip ekivalensi yaitu nilai tunai premi yang dibayarkan oleh pihak nasabah harus sama dengan nilai tunai asuransi atau santunan yang akan dibayarkan oleh pihak perusahaan asuransi. Nilai tunai adalah sejumlah uang yang dijamin oleh perusahaan asuransi untuk dibayarkan kepada pemegang polis membatalkan pertanggungan asuransi dan menyerahkan polis kepada perusahaan. Berikut akan dibahas mengenai beberapa hal yang mendasari perhitungan nilai premi.

2.9.1 Fungsi Kerugian

Terdapat dua jenis kewajiban di dalam asuransi yaitu :

1. Kewajiban pihak perusahaan asuransi adalah membayar santunan yang besarnya sesuai perjanjian yang telah ditetapkan diawal kontrak manakala sewaktu-waktu terjadi klaim.

2. Kewajiban pihak nasabah adalah membayar premi langsung sekaligus diawal kontrak atau secara berkala pada setiap periode yang telah ditentukan.

Kedua jenis kewajiban di atas membentuk suatu fungsi total kerugian untuk menghitung seberapa besar kerugian yang akan ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi dan dihitung dengan

$$L = Z - P \cdot Y$$

Dimana, L : nilai dari fungsi kerugian Z : nilai tunai asuransi jiwa

P : premi Y: nilai tunai anuitas hidup

$$E(L) = E(Z) - P \cdot E(\bar{a}_x)$$

Apabila diberikan santunan sebesar Rp. 1,- untuk asuransi jiwa berjangka yang dibayarkan pada akhir tahun kematian, maka fungsi kerugian yang diperoleh sebagai berikut :

$$L = v^{k(x)+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{k(x)+1|}}$$

Resiko kerugian perusahaan terjadi ketika nilai kerugiannya memberikan nilai positif, dimana nilai santunan yang dibayarkan kepada pihak nasabah lebih besar dari premi yang diterima oleh pihak perusahaan asuransi. Secara teoritis nilai kerugian yang positif terjadi ketika pihak nasabah meninggal dunia pada awal kontrak asuransi.

2.9.2 Prinsip Ekivalensi

Prinsip perhitungan ini adalah ekspektasi dari fungsi kerugian bernilai sama dengan nol untuk asumsi nilai santunan Rp. 1,- dan secara matematis dapat didefinisikan sebagai :

$$E[L] = 0$$

$$E[Z - P \cdot Y] = 0$$

$$E[Z] - P \cdot E[Y] = 0$$

$$P \cdot E[Y] = E[Z]$$

$$P = \frac{E[Z]}{E[Y]} \qquad (2.9.1)$$

2.9.3 Penentuan Nilai Premi

Berikut ini akan dikemukakan beberapa persamaan untuk menentukan besarnya nilai premi, khusus untuk produk asuransi jiwa berjangka n tahun untuk usia tertanggung x tahun dimana santunan dibayarkan seketika pada saat nasabah meninggal dunia dan pembayaran premi dilakukan secara kontinu selama masih hidup.

Berdasarkan persamaan (2.9.1) maka diperoleh persamaan baru yang akan digunakan untuk menghitung nilai premi kontinu sebagai berikut :

$$P = \frac{E[Z]}{E[Y]}$$

$$P = \frac{\bar{A}'_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}'_{x:\overline{n}|}} = \frac{B\int_0^n e^{-\delta t} \cdot \ {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt}{\int_0^n e^{-\delta t} \cdot \ {}_tp_x dt}$$

Dengan $\bar{A}'_{x:\overline{n}|}$ adalah premi tunggal netto asuransi berjangka dan $\bar{a}'_{x:\overline{n}|}$ merupakan anuitas berjangka.

Dengan demikian berdasarkan (2.9.1) didapatkan rumus nilai premi untuk beberapa jenis asuransi yang lain :

1. Asuransi seumur hidup

$$P = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \qquad (2.9.2)$$

2. Asuransi berjangka

$$P = \frac{\bar{A}'_{x:\bar{n}|}}{\bar{a}'_{x:\bar{n}|}} \qquad (2.9.3)$$

3. Asuransi E*ndowment* murni

$$P = \frac{\bar{A}_{x:'\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:'\overline{n}|}} \qquad (2.9.4)$$

4. Asuransi dwiguna

$$P = \frac{\bar{A}_{\overline{x:n}|}}{\bar{a}_{\overline{x:n}|}} \qquad (2.9.5)$$

2.10 Cadangan

Pada awal kontrak dimulai, pihak perusahaan asuransi telah memperhitungkan apakah ekspektasi nilai tunai dari perolehan premi di masa yang akan datang sama dengan ekspektasi nilai tunai dari santunan yang akan dibayarkan. Jika sama maka kerugian yang diperoleh pihak perusahaan asuransi sama dengan nol, berarti dalam keadaan seimbang. Namun pada kenyataannya keseimbangan yang diharapkan tidak selalu terjadi pada setiap saat. Oleh karena itu pihak perusahaan asuransi harus mencadangkan sejumlah dana untuk menutupi kerugian yang terjadi.

2.10.1 Fungsi Kerugian dan *Equal Principle*

Berkenaan dengan cadangan untuk sebuah pembayaran dalam batas waktu kelangsungan hidup t tahun maka cadangan didefinisikan sebagai sebuah nilai harapan dari kerugian masa mendatang pada waktu t oleh perusahaan asuransi, diberikan pada (x) yang sudah bertahan hidup sampai t tahun. Nilai kerugian yang dilambangkan dengan L merupakan variabel acak dari nilai sekarang santunan yang dibayarkan oleh penanggung lebih kecil dari premi anuitas yang dibayarkan oleh tertanggung. Prinsip ini dikenal dengan prinsip ekuivalen (*Equivalent Principle*) dan mempunyai syarat bahwa E[L] = 0, maka

E[nilai sekarang santunan – nilai sekarang premi] = 0

E[nilai sekarang santunan] = E[nilai sekarang premi]

Sehingga untuk variabel acak kerugiannya didefinisikan :

$L = l(T) = v^t - P\bar{a}_T$

Secara umum untuk T(x) > t, didapat :

${}_tL = V^{T(x)-t} - P(\bar{A}_x)\bar{a}_{T(x)-t}$

Dari persamaan (2.7.2) dengan cadangan asuransi berjangka n tahun yang dinotasikan ${}_t\bar{V}(\bar{A}'_{x:\bar{n}|})$ maka diperoleh :

${}_t\bar{V}\left(\bar{A}'_{x:\bar{n}|}\right) = E(\ {}_tL|T(x) > \ t)$

$$= E\left(V^{T(x)-t} | T(x) > t\right) - P(\bar{A}'_{x:\bar{n}|}) E(\bar{a}_{T(x)-t} | T(x) > t)$$

$$= \bar{A}_{x+t:\bar{n}|} - P(\bar{A}'_{x:\bar{n}|}) \cdot \bar{a}_{x+t:\bar{n}|} \qquad (2.10.1)$$

Persamaan (2.10.1) merupakan cadangan untuk asuransi berjangka n tahun. Dengan mengunakan prinsip ekuivalen tersebut maka akan diperoleh persamaan untuk cadangan netto untuk asuransi yang lainnya.

2.10.2 Cadangan Netto

Cadangan adalah sejumlah uang yang harus disediakan oleh pihak perusahaan asuransi dalam waktu pertanggungan dan digunakan untuk membayar santunan sesuai dengan kesepakatan pada awal kontrak. Jadi, cadangan bukanlah milik perusahaan tetapi milik pemegang polis. Cadangan diperlukan semata-mata agar perusahaan asuransi dapat berjalan sesuai dengan dasar-dasar yang sudah ditentukan. Cadangan didefinisikan sebagai selisih antara nilai sekarang (*Present Value*) dari manfaat yang akan diterima dengan nilai sekarang (*Present Value*) dari premi bersih yang akan datang sesuai dengan anuitas yang telah ditentukan. Besarnya cadangan tergantung kepada perkembangan premi, artinya semakin banyak jumlah pemegang polis semakin besar jumlah cadangan yang dibutuhkan.

Berdasarkan bab sebelumnya, dalam tulisan ini akan dibahas cadangan untuk pembayaran klaim pada asuransi yang pembayarannya dilakukan satu kali pertahun. Ada 2 cara untuk menghitung besarnya cadangan yaitu cadangan retrospektif dan prospektif.

1. Cadangan Retrospektif

Cadangan retrospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan jumlah total pendapatan di waktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan dikurangi dengan jumlah pengeluaran di waktu yang lampau, untuk tiap pemegang polis (Takasi, 1993).

Past

Outflow	$d_x \cdot 1$	……..		$d_{x+t-2} \cdot 1$	$d_{x+t-1} \cdot 1$
	x	x+1	………	x+t-1	x+t
Inflow	$l_x \cdot P_x$	$l_{x+1} \cdot P_x$		$l_{x+t-1} \cdot P_x$	

Gambar 2.8. Cadangan Retrospektif

Dengan Benefit Rp.1,-, dari Gambar 2.8 akan diperoleh cadangan retrospektif akhir tahun t sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{}_tV = {} & (l_x \cdot P_x(1+i)^t + l_{x+1} \cdot P_x(1+i)^{t-1} + \cdots + l_{x+t-1} \cdot P_x(1+i)) \\
& -(d_x \cdot 1(1+i)^{t-1} + d_{x+1} \cdot 1(1+i)^{t-2} + \cdots + d_{x+t-1} \cdot 1(1+i)^0)
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{\frac{P_x}{v^t}\left(l_x \cdot (1+i)^0 + \cdots + l_{x+t-1} \cdot (1+i)\right) - \frac{1}{v^t}(d_x \cdot (1+i)^{-1} + \cdots + d_x \cdot (1+i)^0)}{l_{x+t}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P_x}{v^t \cdot {}_tp_x}\left({}_0p_x \cdot v^0 + {}_1p_x \cdot v^1 + \ldots + {}_{t-1}p_x \cdot v^{t-1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{v^t \cdot {}_tp_x} \cdot 1\left({}_{0|}q_x \cdot v^1 + {}_{1|}q_x \cdot v^2 + \ldots + {}_{t-1|}q_x \cdot v^t\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}_tV = \frac{P_x \cdot \ddot{a}_{\overline{x+t|}}}{v^t \cdot {}_tp_x} - 1 \cdot \frac{A_{x:{}'\overline{t|}}}{v^t \cdot {}_tp_x} \qquad (2.10.2)
$$

2. Cadangan Prospektif

Cadangan prospektif adalah besar cadangan yang berorientasi pada pengeluaran diwaktu yang akan atau dengan pengertian lain yaitu perhitungan cadangan dengan berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran diwaktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang total pendapatan di waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis (Takasi, 1993).

Future

Outflow $d_{x+t}\cdot 1$ …….. $d_{\omega-2}\cdot 1$ $d_{\omega-1}\cdot 1$

x+t x+t+1 ……… ω-1 ω

Inflow $l_x\cdot P_x$ $l_{x++t1}\cdot P_x$ $l_{\omega-1}\cdot P_x$

Gambar 2.9 Cadangan Prospektif

Dengan Benefit Rp.1,-, dari Gambar 2.9 akan diperoleh cadangan prospektif akhir tahun t sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= (d_{x+t}\cdot 1\cdot v + \cdots + d_{\omega-1}\cdot 1\cdot v^{\omega-(x+t)}) - (l_{x+t}\cdot P_x + l_{x+t+1}\cdot P_x v \\
&\quad + \cdots + l_{\omega-1}\cdot P_x v^{\omega-(x+t)-1}) \\
&= 1\cdot\left(d_{x+t}\cdot v + \cdots + d_{\omega-1}\cdot v^{\omega-(x+t)}\right) - P_x(l_{x+t}\cdot v^0 + l_{x+t+1}\cdot v + \cdots \\
&\quad + l_{\omega-1}\cdot v^{\omega-(x+t)-1}) \\
&= 1\cdot\left(\frac{d_{x+t}}{l_x}\cdot v + \cdots + \frac{d_{\omega-1}}{l_x}\cdot v^{\omega-(x+t)}\right) - P_x\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\cdot v^0 + \frac{l_{x+t+1}}{l_x}\cdot v + \cdots + \frac{l_{\omega-1}}{l_\omega}\cdot\right. \\
&\quad \left. v^{\omega-(x+t)-1}\right) \\
&= 1({}_{t|}q_x\cdot v + \cdots + {}_{\omega-1|}q_\omega\cdot v^{\omega-(x+t)}) \\
&\quad - P_x({}_tp_x\cdot v^0 + {}_{t+1}p_x\cdot v + \cdots + {}_{\omega-1}p_\omega\cdot v^{\omega-(x+t)-1})
\end{aligned}
$$

$$
{}_tV = 1\cdot A_{x+t} - P_x\cdot \ddot{a}_{x+t} \qquad (2.10.3)
$$

Cadangan prospektif juga merupakan cadangan netto, dan pada tulisan kali ini cadangan yang dipakai adalah cadangan prospektif.

Berdasarkan persamaan (2.10.3) maka akan didapatkan formula untuk cadangan dengan berbagai jenis asuransi :

1. Asuransi Seumur Hidup

$$ {}_tV = 1 \cdot \bar{A}_x - P \cdot \bar{a}_x \qquad (2.10.4) $$

2. Asuransi Berjangka

$$ {}_tV = 1 \cdot \bar{A}'_{x:\bar{n}|} - P \cdot \bar{a}'_{x:\bar{n}|} \qquad (2.10.5) $$

3. Asuransi *Endowment* murni

$$ {}_tV = 1 \cdot \bar{A}_{x:\overline{'n|}} - P \cdot \bar{a}_{x:\overline{'n|}} \qquad (2.10.6) $$

4. Asuransi Dwiguna

$$ {}_tV = 1 \cdot \bar{A}_{\overline{x:n}|} - P \cdot \bar{a}_{\overline{x:n}|} \qquad (2.10.7) $$