II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar (pengertian) yang akan digunakan dalam pembahasan penelitian.

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $(\mathcal{V},+)$ grup komutatif dan $(\mathcal{F},\oplus,.)$ lapangan dengan elemen identitas 1. $\mathcal{V}$ disebut ruang vektor (*vector space*) atas $\mathcal{F}$ jika ada operasi luar * antara keduanya sehingga untuk setiap $x\in\mathcal{V}$dan $\alpha\in\mathcal{F}$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x\in\mathcal{V}$ yang memenuhi sifat – sifat :

(i) $\alpha*(x+y)=\alpha*x+\alpha*y$,

(ii) $(\alpha\oplus\beta)*x=\alpha*x+\beta*x$,

(iii) $(\alpha.\beta)*x=\alpha*(\beta*x)$,

(iv) $1*x=x$,

untuk setiap $x,y\in\mathcal{V}$ dan $\alpha,\beta\in\mathcal{F}$.

Teorema 2.1.2 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ suatu ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$, maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

(i) Untuk setiap $x,y\in\mathcal{V}$ terdapat tepat satu $z\in\mathcal{V}$ sehingga $x+z=y$.

(ii) Jika $z \in \mathcal{V}$ dan $z + z = z$, maka $z = \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol).

(iii) $\alpha\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$ untuk setiap skalar α.

(iv) $0x = \boldsymbol{\theta}$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$.

(v) $(-1)x = -x$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$.

(vi) Jika α suatu scalar dan $x \in \mathcal{V}$ sehingga $\alpha x = \boldsymbol{\theta}$, maka $\alpha = 0$ atau $x = \boldsymbol{\theta}$.

2.2 Ruang Vektor Bagian dan Bebas Linear

Definisi 2.2.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. Jika himpunan $\mathcal{W}$ terhadap operasi – operasi yang sama dengan operasi – operasi di bagian $\mathcal{V}$ juga merupakan ruang vektor atas $\mathcal{F}$, maka $\mathcal{W}$ disebut ruang vektor bagian (*vector sub-space*) dari $\mathcal{V}$.

Teorema 2.2.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{W} \neq \theta$. Himpunan $\mathcal{W}$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{W}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ berlaku $\alpha x + \beta y \in \mathcal{W}$.

Teorema 2.2.3 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor terhadap lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y$ masing – masing ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ maka

$$\mathcal{X} + Y = \{m + n : \quad m \in \mathcal{X}, n \in Y\},$$

juga merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$ yang memuat $\mathcal{X}$ dan Y sebagai ruang vektor bagiannya.

Teorema 2.2.4 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor terhadap lapangan $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{X}, Y \subset \mathcal{V}$ masing – masing ruang vektor bagian dan $\mathcal{X} \cap Y = \{\theta\}$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{X} + Y$ terdapat dengan tunggal $m_1 \in \mathcal{X}$ dan $n_1 \in Y$ sehingga $x = m_1 + n_1$.

Teorema 2.2.5 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapanngan $\mathcal{F}$. Jika $x, x_k \in \mathcal{V}$ dan $\lambda, \alpha_k, \beta_k \in \mathcal{F}$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$ maka benar bahwa

(i) $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k$,

(ii) $\lambda(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k) x_k$,

(iii) $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k) x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x$, dan

(iv) $(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_k x_j$.

Teorema 2.2.6 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Jika $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{V}$, maka $\mathcal{W} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$.

Teorema 2.2.7 (Darmawijaya, 2007

Jika $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ dan $M \subset \mathcal{V}$, maka $[M]$ merupakan ruang vektor bagian $\mathcal{V}$. Lebih lanjut, $[M]$ merupakan ruang vektor terkecil yang memuat M.

Definisi 2.2.8 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ atau $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{V}$ dikatakan bebas linier (*liniearly independent*) jika $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ dan $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol)

berakibat $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teorema 2.2.9 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ tak bebas linier jika dan hanya jika terdapat k dengan $1 \leq k \leq n$ sehingga vektor x_k merupakan kombinasi linier $n-1$ vektor – vektor lainnya.

Akibat 2.2.10 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ bebas linier jika dan hanya jika untuk setiap k, $1 \leq k \leq n$.

Vektor x_k bukan merupakan kombinasi linier $n-1$ vektor – vektor lainnya.

Teorema 2.2.11 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$. Vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n$ bebas linier jika dan hanya jika setiap persamaan

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$$

berakibat $\alpha_k = \beta_k$ untuk setiap k.

2.3 Basis dan Dimensi

Definisi 2.3.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang vektor $\mathcal{V}$ dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ sehinggga $\mathcal{V} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor $\mathcal{V}$.

Definisi 2.3.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$. Himpunan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ dikatakan bebas linier jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linier.

Definisi 2.3.3 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor $\mathcal{V}$ atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ disebut basis (*base*) $\mathcal{V}$ jika $\mathcal{B}$ bebas linier dan $\mathcal{V} = \dim(\mathcal{B})$.

Teorema 2.3.4 (Darmawijaya, 2007)

Ruang vektor $\mathcal{V}$ terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika $\mathcal{V}$ mempunyai basis hingga.

Teorema 2.3.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ ruang vektor dan $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ basis. Banyaknya anggota $\mathcal{B}$ disebut dimensi ruang vektor $\mathcal{V}$,ditulis $\dim(\mathcal{V})$. Jika banyaknya anggota $\mathcal{B}$ hingga maka dikatakan $\mathcal{V}$ berdimensi hingga dan jika banyaknya anggota $\mathcal{B}$ tak hingga maka dikatakan $\mathcal{V}$ berdimensi tak hingga.

Teorema 2.3.6 (Darmawijaya, 2007)

Jika ruang vektor $\mathcal{V}$ berdimensi n, maka setiap $(n+1)$ vektor di dalam $\mathcal{V}$ tak bebas linier.

Akibat 2.3.7 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ masing – masing basis untuk ruang vektor $\mathcal{V}$, maka $m = n$.

2.4 Fungsi Linear

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu fungsi yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.4.1 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ disebut fungsi linear jika

(i) f fungsi aditif (*additive*)

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$, dan

(ii) f fungsi homogen (*homogeneous*)

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk setiap α dan vektor $x \in \mathcal{V}$.

Teorema 2.4.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ masing – masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama ($\mathcal{R}$ atau $\mathcal{C}$). Fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear jika dan hanya jika untuk sebarang skalar α, β dan vektor $x, y \in \mathcal{V}$, berlaku

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Teorema 2.4.3 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear maka

(i) $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$.

(ii) $f(x - y) = f(x) - f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$.

(iii) $f(\theta) = \bar{\theta}$, dengan $\theta \in \mathcal{V}$ dan $\bar{\theta} \in \mathcal{W}$ masing – masing menyatakan vektor nol.

(iv) $f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$ untuk setiap skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dan vektor – vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{V}$.

Teorema 2.4.4 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear dan $g: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ sehingga $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{V}$, maka g linear dan $g = f$.

Teorema 2.4.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor dan $S \subset \mathcal{V}$ *generator* untuk $\mathcal{V}$. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear dan $g: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ sehingga $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in S$, maka fungsi g linear dan $g = f$; lebih lanjut $f(S)$ merupakan *generator* $f(\mathcal{V})$.

Teorema 2.4.6 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka $R_f = f(\mathcal{V})$ merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{W}$. Himpunan R_f disebut ruang jelajah (*range space*) fungsi f.

Teorema 2.4.7 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka

$$N_f = \{x \in \mathcal{V}: \quad f(x) = \bar{\theta}\}$$

dan

$$S = \left(\mathcal{V} - N_f\right) \cup \{\bar{\theta}\}$$

masing – masing merupakan ruang bagian di dalam $\mathcal{V}$. Selanjutnya, himpunan N_f disebut ruang nol (*null space*) fungsi f.

Teorema 2.4.8 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $\mathcal{V}$ berdimensi n dan $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka $\dim(f(\mathcal{V})) \leq n$.

Teorema 2.4.9 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor. Jika $\mathcal{V}$ berdimensi n dan $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ merupakan fungsi linear, maka

$$\partial + p = n$$

2.5 Operator Linear

Definisi 2.5.1 (Kreyzig, 1978)

Suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathfrak{D}(T)$ dan daerah hasil $\mathfrak{R}(T)$ adalah suatu operator linear jika memenuhi:

1. $\mathfrak{D}(T)$ dan $\mathfrak{R}(T)$ berada pada ruang vektor atas lapangan yang sama.

2. Untuk semua $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ dan skalar α berlaku $T(x+y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

2.6 Fungsi Linear dan Metrik

Teorema 2.6.1 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ merupakan ruang vektor real (kompleks) berdimensi n, maka $\mathcal{V}$ isomorfis dengan $\mathcal{R}^n(\mathcal{C}^n)$, yaitu terdapat fungsi linear dan bijektif dari $\mathcal{V}$ ke $\mathcal{R}^n(\mathcal{C}^n)$.

Akibat 2.6.2 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) \leq \dim(\mathcal{W})$, dan fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear dan injektif, maka $\mathcal{V}$ isomorfis dengan $R_f = f(\mathcal{V})$.

Teorema 2.6.3 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) = n$ dan $\dim(\mathcal{W}) = m$. Setiap fungsi linear $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ menentukan matriks *A* berukuran $m \times n$:

$$A = (\beta_{ik}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

sebaliknya juga berlaku.

Definisi 2.6.4 (Darmawijaya, 2007)

Dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ dikatakan isomorfik (*isomorphic*) jika ada fungsi linear bijektif $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Dalam hal ini, fungsi f tersebut dinamakan isomorfisma ruang vektor (*vector space isomorphism*) antara $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$.

Teorema 2.6.5 (Darmawijaya, 2007)

Jika $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$ masing – masing adalah ruang vektor – ruang vektor atas lapangan yang sama, maka pernyataan – pernyataan di bawah ini benar :

(i) Untuk setiap $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ dan $g \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, maka $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

(ii) $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ merupakan ruang vektor.

(iii) $\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ merupakan aljabar assosiatif yang mempunyai elemen satuan.

2.7 Ruang Bernorma

Definisi 2.7.1 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang linier $\mathcal{K}$. Fungsi $x \in \mathcal{K} \mapsto \|x\| \in \mathcal{R}$, yang mempunyai sifat-sifat:

(N1) $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{K}$

$\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \boldsymbol{\theta}$, ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol)

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$, untuk setiap skalar α dan $x \in \mathcal{K}$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{K}$,

disebut **norma** (*norm*) pada $\mathcal{K}$ dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut **norma vektor** x. Ruang linear $\mathcal{K}$ yang dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$ **disebut ruang bernorma** (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(\mathcal{K}, \|.\|)$ atau $\mathcal{K}$ saja asalkan normanya telah diketahui.

2.8 Ruang Banach

Definisi 2.8.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Banach (*Banach Space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap).

2.9 Ruang Hilbert

Definisi 2.9.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Hilbert (*Hilbert Space*) adalah ruang *pre*-Hilbert yang lengkap.

Definisi 2.9.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ ruang linier

(i) Fungsi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan rumus

$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$

yang memenuhi sifat-sifat

(I1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(I2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(I3) $\langle x, y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

Untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{H}$ dan skalar α, dan

(I4) $\langle x, x \rangle > 0$ jika dan hanya jika $x \neq \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol),

disebut ***inner-product*** atau ***dot product***, atau ***scalar product*** pada $\mathcal{H}$.

(ii) Ruang linier $\mathcal{H}$ yang dilengkapi dengan suatu *inner-product* disebut **ruang *pre*-Hilbert** *(pre-Hilbert space)* atau **ruang *inner-product*** *(inner-product space).*

2.10 Basis Orthonormal

Definisi 2.10.1 (Darmawijaya, 2007)

(i) Basis ortogonal (*ortogonal basis*) di dalam ruang pre-Hilbert adalah basis yang setiap dua vektornya saling tegak lurus.

(ii) Basis ortonormal (*orthonormal basis*) di dalam suatu ruang pre-Hilbert adalah basis ortogonal dan setiap anggotanya merupakan vektor satuan (normanya sama dengan 1).

Teorema 2.10.2 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui ruang Hilbert $\mathcal{H}$ mempunyai basis orthonormal $\{x_n\}$. Diperoleh pernyataan $x \in \mathcal{H}$ jika dan hanya jika ada $\{\alpha_n\} \in \ell^2$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

2.11 Operator pada Ruang Hilbert

Teorema 2.11.1 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. Untuk setiap $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K},\mathcal{H})$ terdapat $T^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K},\mathcal{H})$ tunggal sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$ berakibat

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Definisi 2.11.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan dua ruang Hilbert $\mathcal{H}$dan $\mathcal{K}$. Menurut teorema 2.11.1, untuk setiap operator $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K},\mathcal{H})$ terdapat $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K},\mathcal{H})$ sehingga

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ dan $y \in \mathcal{K}$. Operator T^* disebut ***operator adjoint*** atau operator pendamping terhadap operator T.

Teorema 2.11.3 (Darmawijaya, 2007)

Ini adalah sifat – sifat operator pedamping. Diberikan dua ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$. Jika $T, \mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan α sebarang skalar maka

(i) $(T + \mathcal{S})^* = T^* + S^*$

(ii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(iii) $T^{**} = (T^*)^* = T$

(iv) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$

(v) $TT^* = O \Leftrightarrow T = O$ (O operator nol).

Teorema 2.11.4 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ dan $\mathcal{X}$ masing – masing ruang Hilbert. Jika $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan $\mathcal{S} \in \mathcal{L}_c(\mathcal{K}, \mathcal{X})$ maka $(\mathcal{S}T)^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ dan

$$(\mathcal{S}T)^* = T^* \mathcal{S}^*$$

Teorema 2.11.5 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ dan $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$. Jika $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, maka $T^*(\mathcal{B}^\perp) \subset \mathcal{A}^\perp$.

Teorema 2.11.6 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui M dan N berturut-turut merupakan ruang bagian yang tertutup di dalam ruang Hilbert $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$. Untuk setiap $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ diperoleh $T(M) \subset N$ jika dan hanya jika $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$.

Teorema 2.11.7 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}\ dan\ \mathcal{K}$ masing – masing ruang Hilbert. Jika $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ maka

(i) $\{x: x \in \mathcal{H}\ dan\ Tx = \bar{\theta}\} = \{T^*(\mathcal{K})\}^\perp$

(ii) $\{x: x \in \mathcal{H}\ dan\ Tx = \bar{\theta}\}^\perp = \overline{T^*(\mathcal{K})}$

(iii) $\{y: y \in \mathcal{K}\ dan\ T^*y = \theta\} = \{T(\mathcal{H})\}^\perp$

(iv) $\{y: y \in \mathcal{K}\ dan\ T^*y = \theta\}^\perp = \overline{T(\mathcal{H})}$

Definisi 2.11.8 (Darmawijaya, 2007)

Diketahui $\mathcal{H}$ suatu ruang Hilbert $T \in \mathcal{L}_c(\mathcal{H})$ disebut :

1. Operator isometrik (*isometric operator*) jika $T^*T = I$;
2. Operator uniter (*unitary operator*) jika $T^*T = TT^* = I$;
3. Operator mandiri (*self adjoint operator*) jika $T^* = T$;
4. Operator proyeksi (*projection operator*) jika$T^* = T$ dan $TT = T$;
5. Operator normal (*normal operator*) jika $T^*T = TT^*$.

2.12 Operator Hilbert Schmidt

Ruang Hilbert H dimaksudkan sebagai ruang Hilbert yang mempunyai basis dan elemen-elemen di dalam H yang dinamakan vektor.

Definisi 2.12.1

Suatu operator linier $A: H \to H$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt disingkat operator-HS jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Pendefinisian tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis ortonormal di H.

2.13 Barisan

Definisi 2.13.1 (Darmawijaya, 2006)

Barisan (*sequence*) bilangan nyata adalah fungsi dari $\mathcal{N}$ ke $\mathcal{R}$. Menurut definisi tersebut, jika f suatu barisan bilangan nyata, nilai f di n biasa ditulis dengan a_n; jadi

$$a_n = f(n)$$

Barisan biasa dituliskan dengan

$$\{a_n\} \text{ atau } \{a_1, a_2, \dots\}$$

Dengan $a_n = f(n)$ disebut unsur (*element*) ke- n barisan itu. Barisan juga dapat dipandang sebagai himpunan terurut.

Misalkan $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ adalah barisan bilangan nyata dengan unsur ke- n adalah

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Jadi barisan itu adalah fungsi $f: \mathcal{N} \to \mathcal{R}$ dengan rumus $f(n) = a_n = \frac{n}{n+1}$.

Aljabar barisan disusun sebagai berikut.

Definisi 2.13.2 (Darmawijaya, 2006)

Jika $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dua barisan bilangan nyata, didefinisikan

(i) Jumlah *(addition,sum*) dua barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah suatu barisan dengan $a_n + b_n$ sebagai unsur ke- n. Jadi

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}.$$

(ii) Perkalian skalar (*scalar multiplication*). Jika k suatu konstanta, maka $k\{a_n\}$ adalah suatu barisan bilangan nyata dengan ka_n sebagai unsur ke- n. Jadi

$$k\{a_n\} = \{ka_n\}.$$

(iii) Hasil ganda (*product*) dua barisan bilangan nyata $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah suatu barisan dengan $a_n b_n$ sebagai unsur ke- n. Jadi

$$\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}.$$

(iv) Hasil bagi (*division*) barisan bilangan nyata $\{a_n\}$ dengan barisan bilangan nyata $\{b_n\}$ adalah suatu barisan bilangan nyata dengan $\frac{a_n}{b_n}$ sebagai suku ke- n, asalkan $b_n \neq 0$ untuk setiap n. Jadi

$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}.$$