II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Geometri Euclid

Untuk menyusun geometrinya, Euclid membuat pernyataan-pernyataan seperti aksioma, postulat dan unsur-unsur tak terdefinisi. Unsur-unsur yang tidak didefinisikan dalam geometri adalah titik, garis dan bidang:

Definisi 2.1.1

Titik adalah unsur yang tidak memiliki panjang, lebar maupun ketebalan.

Definisi 2.1.2

Garis, dilambangkan dengan $\overleftrightarrow{AB}$ adalah panjang yang tidak mempunyai lebar maupun ketebalan. Suatu garis bisa lurus, melengkung maupun kombinasi keduanya . *Garis lurus* terbentuk oleh suatu titik yang selalu bergerak ke arah yang sama. Suatu garis lurus dapat dperpanjang ke segala arah secara tidak terbatas. *Sinar* ,ditulis dengan $\overrightarrow{AB}$ adalah bagian dari garis lurus yang dimulai pada suatu titik tertentu dan diperpanjang secara tidak terbatas ke suatu arah. *Garis lengkung* terbentuk oleh suatu titik yang bergerak dengan arah yang selalu berubah-ubah (Barneth Rich,2005).

Definisi 2.1.3

Bidang adalah unsur yang memiliki panjang dan lebar, tapi tidak mempunyai ketebalan. Bidang adalah suatu permukaan dimana suatu garis yang menghubungkan dua titik pada permukaan tersebut secara keseluruhan akan terletak pada permukaan tersebut (Barneth Rich,2005).

Aksioma yang diungkapkan Euclid adalah:

Aksioma 1

Semua benda-benda yang sama dengan suatu benda lainnya adalah sama.

Aksioma 2

Jika kepada yang sama diberikan tambahan yang sama maka hasilnya akan sama.

Aksioma 3

Jika dari yang sama dikurangi bagian yang sama maka sisanya akan sama.

Aksioma 4

Tiap-tiap benda yang berimpit dengan suatu benda tentunya satu sama lain sama.

Aksioma 5

Keseluruhan itu lebih besar dari bagiannya.

Kelima Postulat Euclid adalah sebagai berikut:

Postulat 1

Sebuah garis lurus dapat ditarik melalui dua buah titik.

Postulat 2

Setiap garis terbatas dapat diperpanjang sampai tak hingga.

Postulat 3

Melalui sebuah titik sebagai pusat, dapat digambar sebuah lingkaran dengan jari-jari sembarang.

Postulat 4

Semua sudut siku-siku adalah sama.

Postulat 5

Melalui sebuah titik di luar sebuah garis dapat ditarik hanya sebuah garis lurus lain yang sejajar dengan garis pertama.

(Ruseffendi,1985)

Teorema 2.1.1

Dua garis yang berbeda berpotongan paling banyak hanya pada satu titik.

Teorema 2.1.2

Jika suatu garis memotong suatu bidang yang tak memuat garis itu maka perpotongannya adalah sebuah titik.

Teorema 2.1.3

Diketahui suatu garis dan sebuah titik yang tidak terletak pada garis itu, maka terdapat tepat satu bidang yang memuat garis dan titik itu.

Teorema 2.1.4

Jika dua garis berpotongan, maka kedua garis itu terletak pada satu bidang.

Definisi 2.1.4 (Sudut)

Sudut adalah suatu gambar yang terbentuk oleh dua sinar yang mepunyai titik akhir yang sama. Sinar-sinar tersebut merupakan *sisi-sisi* sudut sementara akhirnya merupakan *titik sudut*-nya. Ukuran sudut disebut *derajat.* Ukuran sudut $\angle ABC$ ditulis $u(\angle ABC)$ (Barneth Rich,2005).

Berikut adalah macam-macam sudut :

Definisi 2.1.5

Sudut lancip, adalah sudut yang besarnya antara 0^0 dan 90^0.

Definisi 2.1.6

Sudut siku-siku, adalah sudut yang besarnya samadengan 90^0.

Definisi 2.1.5

Sudut tumpul, adalah sudut yang besarnya antara 90^0 dan 180^0

Definisi 2.1.6

Sudut lurus, adalah sudut yang besarnya sama dengan 180^0.

Definisi 2.1.7

Dua sudut dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua sudut tersebut sama besar.

Definisi 2.1.7 (Segitiga)

Segitiga adalah segi yang terbentuk oleh tiga segmen yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak segaris, ketiga segmen tersebut disebut sisi, dan ketiga titik sudut tersebut disebut titik sudut (Barneth Rich,2005).

Definisi 2.1.8

Segitiga-segitiga kongruen adalah segitiga-segitiga yang mempunyai ukuran dan bentuk yang sama. Jika dua segitiga kongruen, sisi-sisinya dan sudut-sudutnya yang bersesuaian haruslah kongruen (Barnett Rich, 2005).

Prinsip 2.1.1

Jika dua segitiga kongruen, maka bagian-bagiannya yang bersesuaian juga kongruen (Barnett Rich, 2005).

Prinsip 2.1.2 (S, Sd, S)

Jika dua sisi dan sudut yang dibentuknya pada suatu segitiga kongruen dengan bagian-bagian yang bersesuaian pada segitiga yang lain, maka segitiga-segitiga tersebut kongruen (Barnett Rich, 2005).

Prinsip 2.1.3 (Sd, S, Sd)

Jika dua sudut dan sisi diantaranya pada suatu segitiga kongruen dengan bagian-bagian yang bersesuaian pada segitiga yang lain, maka segitiga-segitiga tersebut kongruen (Barnett Rich, 2005).

Prinsip 2.1.4 (S, S, S)

Jika tiga sisi pada suatu segitiga kongruen dengan tiga sisi pada segitiga yang lain, maka segitiga-segitiga tersebut kongruen (Barnett Rich, 2005).

Teorema 2.1.5

Jumlah ukuran sudut dalam sebuah segitiga sama dengan 180^0.

Teorema 2.1.8 mengakibatkan tiga corollary mengenai jumlah sudut pada segiempat , yaitu:

Corollary 2.1.1

Jumlah ukuran sudut suatu segiempat sama dengan 360^0 .

Corollary 2.1.2

Sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri adalah sama dan siku-siku.

Corollary 2.1.3

Adanya persegi panjang/bujur sangkar

Karena postulat kelima (postulat kesejajaran) Euclid dianggap lemah, maka beberapa ilmuwan mencoba membuktikan kebenarannya, dan akhirnya menimbulkan pemikiran menciptakan geometri non-Euclid, dengan mengganti postulat kesejajaran Euclid dengan postulat yang berarti sama namun lebih sederhana. Secara khusus, ada dua geometri yang tidak menganut konsep kesejajaran Euclid yaitu geometri Lobachevsky dan geometri Riemann.

2.2 Geometri Lobachevsky

Geometri Lobachevsky berbeda dengan geometri Euclid hanya pada postulat kesejajarannya. Postulat kesejajaran Lobachevsky berbunyi :

"jika sebuah titik terletak tidak pada suatu garis, maka terdapat paling sedikit dua garis yang dapat ditarik melalui titik itu serta sejajar dengan garis tadi"

Pada kajian Geometri Lobachevsky ini objek-objek kajiannya yang berupa titik, garis, bidang dan segmen tidak sama dengan titik, garis, bidang dan segmen pada Geometri Parabolik. Pada Geometri Hiperbolik Ini bidang direpresentasikan oleh sebuah lingkaran O.

Geometri Lobachevsky	**Representasi Geometri Euclid**
Titik	Titik dalam lingkaran
Garis	Penghubung terbuka dalam lingkaran
Bidang	Bagian dalam lingkaran
Segmen	Segmen: penghubung dua titik

Tabel 1. Representasi dari Model Geometri Lobachevsky

Teorema non-metrical

Teorema pertama geometri Lobachevsky merupakan teorema dasar yang tidak melibatkan ide-ide metrikal (sistim perhitungan dengan dasar angka 10) seperti jarak, ketegak-lurusan, atau luas. Teorema tersebut mengenai kedudukan atau sifat garis.

Teorema 2.2.1

Sebarang garis dimuat secara keseluruhan didalam interior sudut tertentu.

Teorema 2.2.2

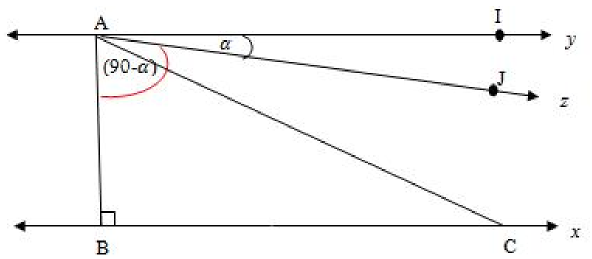
Berlaku pada segitiga dengan jumlah derajat sudut kurang dari 180°.

Teorema 2.2.3

Jumlah sudut dari suatu segitiga kurang dari 180°.

Bukti:

Misal titik A terletak tidak pada garis x , maka dapat ditarik garis y yang melalui A dan sejajar garis x .Misalkan garis x melaui titik B dan C dengan $\overleftrightarrow{AB}$ tegak lurus garis x



Gambar 1. Segitiga dengan Jumlah Sudut Kurang dari 180°

Maka berdasarkan postulat kesejajaran Lobachevsky dapat ditarik satu garis lain yang sejajar dengan garis x dan melalui titik A yaitu garis z. Dengan ini akan dibuktikan bahwa besar ukuran sudut dalam segitiga ABC kurang dari 180°.

$u(\angle ABC) = 90°$

$u(\angle BCA) < \alpha$

$u(\angle CAB) < u(\angle JAB) < 90° - \alpha$

Untuk jumlah ketiga sudut dalam segitiga ABC diperoleh :

$$u(\angle ABC) + u(\angle BCA) + u(\angle CAB) < 90° + \alpha + (90° - \alpha) < 180°$$

Terbukti bahwa jumlah ukuran sudut dalam segitiga pada Geometri Lobachevsky adalah kurang dari 180°.

Corollary 2.2.1

Jumlah besar sudut-sudut dari segiempat kurang dari 360°.

Corollary 2.2.2

Sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri adalah sama dan lancip.

Corollary 2.2.3

Tidak ada bujur sangkar.

2.3 Geometri Riemann

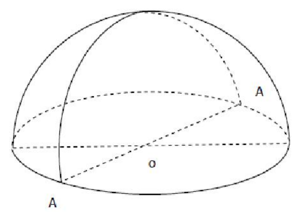
Sama hal-nya dengan geometri Lobachevsky, geometri Riemann juga berbeda dengan geometri Euclid hanya pada postulat , yaitu:

"tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain".

Dengan kata lain, pada geometri ini dua garis selalu berpotongan dan tidak ada garis yang sejajar. Pada geometri Riemann terdapat dua macam pengkhususan, yaitu geometri "*single elliptic*" dan geometri "*double elliptic*".

- Geometri *Single Elliptic*

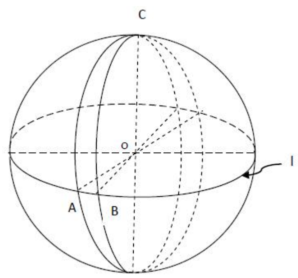
  Sebarang dua garis yang berpotongan tepat pada satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang tersebut.



Gambar 2. Model Geometri *Single Elliptic*

• Geometri *Double Elliptic*

Dua garis berpotongan tepat pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang.



Gambar 3. Model Geometri *Double Elliptic*

Representasi dari model geometri *double elliptic :*

Geometri *double elliptic*	**Representasi pada Euclid**
Titik	Titik pada bola
Garis	Lingkaran besar bola
Bidang	Bola
Segmen	Busur dari suatu lingkaran bola
Jarak antara dua titik	Panjang busur terpendek dari lingkaran besar yang melalui kedua titik itu
Sudut yang dibentuk oleh dua garis	Sudut pada bola yang dibentuk oleh dua lingkaran besar

Tabel 2. Representasi dari model geometri *double elliptic*

Geometri Riemann memiliki sifat kutub, yaitu misalnya ***l*** suatu garis, maka ada suatu titik K, yang disebut kutub dari ***l*** sedemikian sehingga :

1. Setiap segmen yang menghubungkan K dengan suatu titik ***l*** tegaklurus pada ***l***
2. K berjarak sama dari setiap titik pada ***l***.

Jarak K sampai sebarang titik pada ***l*** disebut jarak polar. Jarak polar suatu kutub sampai garisnya adalah konstan, demikian juga panjang suatu garis juga konstan.

Berikut ini adalah teorema-teorema yang berlaku pada Geometri Riemann:

Teorema 2.3.1

Dua garis yang tegak lurus pada suatu garis bertemu pada suatu titik ujungnya.

Teorema 2.3.2

Semua garis tegaklurus pada suatu garis berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegaklurus pada garis itu.

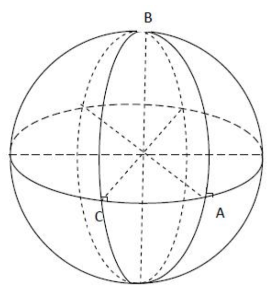
Teorema 2.3.3

Dalam sebarang segitiga ABC dengan sudut C = 90^{o}, sudut A kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari 90^{o} tergantung dari segmen BC kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari jarak polar q.

Bukti:

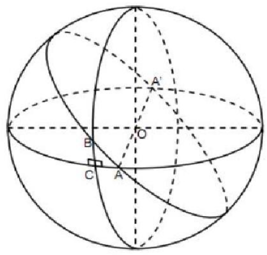
Diketahui : segitiga ABC dengan $\angle$C = 90^{o}

a. Ditunjukkan $\angle$A < 90°, bila jarak B ke C < dari jarak polar



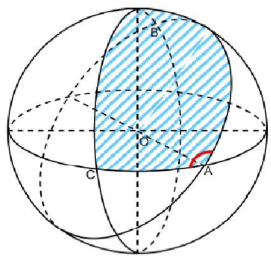
Gambar 4. Ilustrasi Dalil 2.3.1
dengan $\angle$A < 90°

b. Ditunjukkan $\angle$A = 90°, bila jarak B ke C = dari jarak polar



Gambar 5. Ilustrasi Dalil 2.3.1
dengan ∠A = 90°

c. Ditunjukkan ∠A > 90°, bila jarak B ke C > dari jarak polar



Gambar 6. Ilustrasi dalil 2.3.1
dengan ∠A > 90°

Teorema 2.3.4

Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga lebih besar dari 180°.

Bukti:

Pada gambar 5, terlihat bahwa ∠A = 90°,∠C = 90° dan ∠B pastilah positif. Sehingga jumlah sudut segitiga ABC adalah lebih besar dari 180°.

Teorema 2.3.5

Jumlah besar sudut-sudut suatu segiempat lebih besar dari 360°.

Teorema 2.3.6

Sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri adalah sama dan tumpul.

Teorema 2.3.6

Tidak ada bujur sangkar.