II. LANDASAN TEORI

Pada bab II ini, akan dibahas pengertian-pengertian (definisi) dan teorema-teorema yang medukung untuk pembahasan pada bab IV. Pengertian (definisi) dan teorema tersebut dituliskan sebagai berikut.

2.1. Teorema Proyeksi

Teorema proyeksi merupakan prinsip dasar dalam penyelesaian masalah optimisasi. Sebelum ke Teorema proyeksi, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep ortogonalitas.

Definisi 2.1.1 (Luenberger, 1969)

Dalam suatu ruang pre-Hilbert X, vektor $x, y \in X$ *dikatakan ortogonal jika* $\langle x, y \rangle = 0$, *dinotasikan dengan* $x \perp y$. *Suatu vektor x dikatakan ortogonal dengan himpunan S, dinotasikan* $x \perp S$ *jika* $x \perp s$ *untuk setiap* $s \in S$.

Lemma berikut menunjukkan bahwa Teorema Phytagorean dalam geometri bidang merupakan akibat dari konsep ortogonalitas.

Lemma 2.1.1

Misalkan X suatu ruang Hilbert dan $x, y \in X$. Jika $x \perp y$, maka $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Bukti :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \quad \blacksquare$$

Selanjutnya akan dibahas suatu masalah optimisasi yang berhubungan dengan Teorema proyeksi. Misalkan X suatu ruang Pre-Hilbert, diberikan suatu vektor $x \in X$ dan M ruang bagian dari X, maka akan ditentukan vektor $m \in M$ yang terdekat ke x, yaitu vektor yang meminimalkan $\|x - m\|$.

Jika x berada di M maka penyelesaiannya trivial, yaitu vektor x sendiri. Secara umum ada empat pernyataan penting dalam penyelesaian masalah tersebut yaitu :

1. Adakah vektor $m \in M$ yang meminimalkan $\|x - m\|$?
2. Apakah penyelesaiannya tunggal ?
3. Kondisi apa yang harus dipenuhi agar ada penyelesaian optimal ?
4. Bagaimana menentukan penyelesaian optimal ?

Pernyataan nomor 1, 2 dan 3 akan dijawab dengan Teorema proyeksi. Ada dua versi Teorema proyeksi, satu versi pada ruang Pre-Hilbert dan satu versi yang lain pada ruang Hilbert dengan hipotesis dan kesimpulan yang lebih kuat.

Teorema 2.1.2 (*Teorema Proyeksi di Ruang pre-Hilbert*)

Misalkan *X* suatu ruang Pre-Hilbert, *M* suatu ruang bagian dari *X* dan *x* sebarang vektor di *X*. Jika ada vektor $m_0 \in M$, sedemikian hingga $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$, maka m_0 tunggal. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal di *M* adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap *M*.

Bukti :

Akan di tunjukkan jika m_0 adalah vektor minimal, maka $x - m_0$ ortogonal terhadap *M*. Andaikan kondisi sebalinya, terdapat $m \in M$ yang tidak ortogonal terhadap $x - m_0$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, dimisalkan $\|m\| = 1$ dan $<x - m_0 , m> = \partial \neq 0$.

Didefinisikan vektor $m_1 \in M$, sebagai $m_1 = m_0 + \partial m$ maka

$$\|x-m_1\|^2 = \|x-m_0-\partial m\|^2$$

$$\begin{aligned}
&=< x-m_0-\partial m, x-m_0-\partial m >\\
&=< x-m_0, x-m_0 > + < x-m_0, -\partial m > + < -\partial m, x-m_0 > + < -\partial m, -\partial m >\\
&= \|x-m_0\|^2 - < x-m_0, \partial m > - < \partial m, x-m_0 > + |\partial|^2 \|m\|^2\\
&= \|x-m_0\|^2 - < \overline{\partial m, x-m_0} > - < \partial m, x-m_0 > + |\partial|^2\\
&= \|x-m_0\|^2 - \bar{\partial} < x-m_0, m > - \partial < m, x-m_0 > + |\partial|^2\\
&= \|x-m_0\|^2 - 2|\partial|^2 + |\partial|^2\\
&= \|x-m_0\|^2 - |\partial|^2\\
&\le \|x-m_0\|^2
\end{aligned}$$

Ini berarti $\exists$ m_1 dengan $m_1 = m_0 + \partial m$ sehingga $\|x-m_1\|^2 \le \|x-m_0\|^2$, ini berarti m_1 bukan vektor minimal. Jadi m_0 vektor minimal maka $x - m_0$ ortogonal terhadap M atau $(x - m_0) \perp m, \forall m \in M$.

Dengan demikian jika $x - m_0$ tidak ortogonal terhadap M maka m_0 bukan vektor minimal.

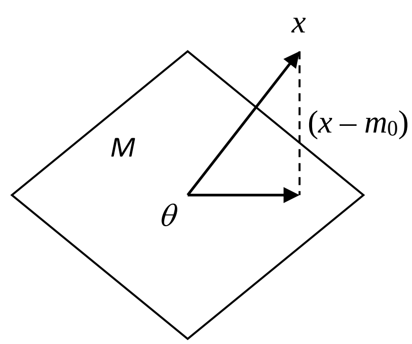
Selanjutnya akan ditunjukkan jika vektor $x - m_0$ ortogonal terhadap M, diambil sebarang $m \in M$, berdasarkan Teorema Phytagorea :

$$\|x-m\|^2 = \|x-m_0+m_0+m\|^2 = \|x-m_0\|^2 + \|m_0+m\|^2$$

sehingga $\|x-m\|^2 > \|x-m_0\|^2$ untuk $m \neq m_0$. ■

Dalam dimensi tiga, teorema proyeksi ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

Ruang bagian M adalah bidang yang melalui titik asal dan x di ruang dimensi tiga X. Jika ada vektor minimal $m_0 \in M$ maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ tegak lurus terhadap bidang M, seperti digambarkan dalam gambar dibawah ini :



Gambar 2.1

Teorema di atas belum menjamin keberadaan vektor minimal, tetapi jika ada vektor minimal m_0 , maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian M. Dengan hipotesis yang lebih kuat didapatkan kesimpulan yang lebih kuat, yaitu terjaminnya keberadaan vektor minimal. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1.3 (*Teorema Proyeksi Klasik*)

Misalkan H ruang Hilbert dan M ruang bagian tertutup dari H, maka untuk sebarang vektor $x \in H$, terdapat tunggal vektor $m_0 \in M$ sedemikian hingga

$\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$,suatu vektor minimal tunggal adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian *M*.

Bukti :

Ketunggalan dan ortogonalitasnya telah dibuktikan pada Teorema 3.3.2, sehingga tinggal membuktikan keberadaan vektor minimal. Jika $x \in M$ dan $m_0 = x$ maka bukti selesai.

Misalkan $x \notin M$ dan didefinisikan $\partial = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ akan ditentukan $m_0 \in M$ dengan $\|x - m_0\| = \partial$. Misalkan $\{m_i\}$ suatu barisan vektor dalam *M* dan $\|x - m_i\| \to \partial$.

Menurut hukum jajaran genjang (*parallelogram)*,

$$\|(m_j - x) + (x - m_i)\|^2 + \|(m_j - x) - (x - m_i)\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2$$

dengan menyusun kembali persamaan di atas didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\|^2 \text{ untuk setiap i, j .}$$

Dan vektor $\frac{m_i + m_j}{2}$ berada di *M*.

Karena *M* ruang bagian linier sehingga dari definisi ∂ , $\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\| \geq \partial$

dan didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 \leq 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\partial^2$$

karena

$$\{\ \|m_i - x\|^2\ \} \to \partial^2\ ,\ \mathrm{i} \to \infty$$

Maka $\{\ \|m_j - m_i\|^2\ \} \to 0$, i, j $\to \infty$.

Dengan demikian {m_{i}} adalah barisan Cauchy dan karena *M* ruang bagian tertutup dari ruang lengkap, maka barisan {m_{i}} mempunyai limit m_0 di dalam *M*.

Dengan kekontinuan norm maka $\|x - m_0\| = \partial$. ■

Jadi dalam penulisan ini, Teorema proyeksi klasik menjamin keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal serta kondisi yang harus dipenuhi agar keberadaan vector minimal ada penyelesaian optimalnya, penyelesaian optimalnya sendiri belum dapat ditentukan.

Selanjutnya Teorema proyeksi di atas akan ditetapkan untuk membangun sifat struktural tambahan dari suatu ruang Hilbert, antara lain adalah dalam sebarang ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert, sebarang vektor dapat ditulis sebagai jumlahan dua vektor, satu vektor di ruang bagian tertutup dan vektor yang lain ortogonal terhadapnya.

\Definisi 2.1.2 (Luenberger, 1969)

Misalkan S suatu himpunan bagian dari ruang Pre-Hilbert. Himpunan semua vektor yang ortogonal terhadap S disebut komplemen ortogonal dari S dan dinotasikan dengan $S^{\perp}$.

Teorema 2.1.4

Misalkan S dan T himpunan bagian dari ruang Hilbert dan $S^{\perp}$, $T^{\perp}$ berturut-turut menyatakan komplemen ortogonal dari S dan T maka :

1. $S^{\perp}$ adalah ruang bagian tertutup
2. $S \subset S^{\perp\perp}$
3. Jika $S \subset T$ maka $T^{\perp} \subset S^{\perp}$
4. $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$

Bukti :

1. Himpunan $S^{\perp}$ merupakan ruang bagian. Ruang $S^{\perp}$ tertutup karena jika $\{x_n\}$ suatu barisan konvergen dari $S^{\perp}$, katakan $x_n \rightarrow x$; Kekontinuan perkalian dalam menyatakan $0 = \langle x_n, s\rangle \rightarrow \langle x, s\rangle$ untuk semua $s \in S$, sehingga $x \in S^{\perp}$. ■
2. Diambil $x \in S$. Hal ini berarti $x \perp y$ untuk semua $y \in S^{\perp}$. Sehingga diperoleh $y \perp z$. Untuk setiap $z \in S^{\perp\perp}$ termasuk $z = x$.

   Jadi untuk $x \in S \rightarrow z \in S^{\perp\perp}$. ■

3. Ambil x $\in T^{\perp}$. Oleh karena itu maka $y \perp x$ untuk semua $y \in T$.

Karena $S \subset T$, maka $x \perp z$ untuk setiap z $\in S$. Dengan kata lain $x \in S^{\perp}$. ■

4. $(S^{\perp\perp})^{\perp} = S^{\perp}$

Harus dibuktikan :

(a) $(S^{\perp\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$

(b) $S^{\perp} \subset (S^{\perp\perp})^{\perp}$

Bukti :

(a) Dari Teorema 3.3.4 (bagian 3).

Jika S $\subset S^{\perp\perp}$, maka $(S^{\perp\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$. ■

(b) Dari Teorema 3.3.4 (bagian 1)

Karena S $\subset S^{\perp\perp}$, maka $S^{\perp} \subset (S^{\perp\perp})^{\perp}$. ■

Definisi 2.1.3 (Luenberger, 1969)

Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari ruang bagian M dan N, jika setiap vektor $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal, dalam bentuk $x = m + n$ dengan $m \in M$ dan $n \in N$, dinotasikan dengan $X = M \oplus N$.

Teorema 2.1.5

Jika M ruang bagian linear tertutup dari suatu ruang Hilbert H maka $H = M \oplus M^{\perp}$ dan $M = M^{\perp\perp}$

Bukti :

Misalkan $x \in H$. Karena M ruang bagian tertutup, maka menurut Teorema proyeksi ada vektor tunggal $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_0\| < \|x - m\|$ untuk semua

$m \in M$ dan $n_0 = x - m_0 \in M^{\perp}$.

Dengan demikian $x = m_0 + n_0$, dengan $m_0 \in$ M dan $n_0 \in M^{\perp}$. Jadi x merupakan jumlahan dari $m_0 \in M$ dan $n_0 \in M^{\perp}$. Untuk membuktikan ketunggalannya, misalkan $x = m_1 + n_1$, dengan $m_1 \in M$ dan $n_1 \in M^{\perp}$ maka :

$\mathbf{0} = (m_1 + n_1) - (m_0 + n_0) = m_1 - m_0 + n_1 - n_0$, tetapi $m_1 - m_0$ dan $n_1 - n_0$ ortogonal, sehingga menurut teorema *phytagorean* $\|\mathbf{0}\|^2 = \|m_1 - m_0\|^2 + \|n_1 - n_0\|^2$.

Hal ini menyatakan $m_0 = m_1$ dan $n_0 = n_1$. Jadi untuk setiap vektor di H dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai jumlahan dari suatu vektor di M dan suatu vektor di $M^{\perp}$. Dengan kata lain $H = M \oplus M^{\perp}$.

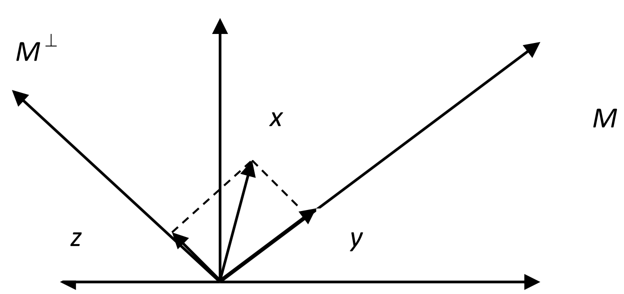
Untuk membuktikan $M = M^{\perp\perp}$ tinggal menunjuKkan $M^{\perp\perp} \subset M$. Karena $M \subset M^{\perp\perp}$ sudah di buktikan dengan Teorema 2.3.4.

Diambil $x \in M^{\perp\perp}$ dan akan ditunjukkan $x \in M$. Menurut bagian teorema ini,

$x = m_1 + n_1$ dengan $m_1 \in M$ dan $n_1 \in M^{\perp}$, karena $x \in M^{\perp\perp}$ dan $m \in M^{\perp\perp}$.

Maka $x - m \in M^{\perp\perp}$, yaitu $n_1 \in M^{\perp\perp}$. Tetapi $n_1 \in M^{\perp}$, sehingga $n_1 \perp n_1$ yang menyatakan $n_1 = \mathbf{0}$, sehingga $x - m \in M$ dan $M^{\perp\perp} \subset M$. Terbukti $M = M^{\perp\perp}$. ■

Dalam dimensi dua bagian pertama teorema di atas dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika H suatu bidang dan m suatu garis lurus yang melalui titik asal maka untuk setiap $x \in H$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai $x = y + z$, dengan $y \in M$ dan $z \in M^{\perp}$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2

Gambar diatas, jika M ruang bagian tetutup dari H maka $H = M \oplus M^{\perp}$.

Misalkan M ruang bagian tertutup dari suatu ruang Hilbert H dan vektor x di H.

Vektor $m_0 \in M$ dengan $x - m_0 \in M^{\perp}$ disebut proyeksi ortogonal x pada M.

Jadi sampai disini keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal masalah optimisasi sudah terjawab, namun penyelesaian optimalnya sendiri belum ditentukan. Ada dua cara untuk menentukan penyelesaian optimal, yaitu dengan menyelesaikan persamaan normal dan dengan prosedur ortogonalisasi Gram-Schmidt bersama deret Fourier. Pada penelitian ini akan dibicarakan dengan menyelesaikan persamaan normal dan matriks Gram.

Definisi 2.1.4 (Luenberger, 1969)

Misalkan $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ *basis dari M. Diberikan sebarang vektor* $x \in H$ *dan akan dicari vektor* m_0 *di M yang terdekat ke x. Jika vektor* m_0 *dinyatakan dalam suku-suku dalam vektor* y_i *sebagai :*

$$m_o = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$$

Maka masalah tersebut ekuivalen dengan menemukan skalar β_i, $i = 1, 2, \ldots.., n$ *yang meminimalkan* $\left\| x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \ldots\ldots. - \beta_n y_n \right\|$.

Menurut Teorema proyeksi, vektor minimal tunggal m_0 *adalah proyeksi ortogonal x pada M, atau vektor selisih* $x - m_0$ *ortogonal terhadap setiap vektor* y_i .

Dengan demikian : $< x-\beta_1 y_1-\beta_2 y_2-..........-\beta_n y_n, y_i >= 0$ *untuk i* = 1, 2, ..., *n.*

Atau

$<x, y_1> - <\beta_1 y_1, y_1> - <\beta_2 y_2, y_1> - ....- <\beta_n y_n, y_1> = 0$

$<x, y_2> - <\beta_1 y_1, y_2> - <\beta_2 y_2, y_2> - ....- <\beta_n y_n, y_2> = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$<x, y_n> - <\beta_1 y_1, y_n> - <\beta_2 y_2, y_n> - ....- <\beta_n y_n, y_n> = 0$

Atau

$<y_1, y_1> \beta_1 + <y_2, y_1> \beta_2 + ...+ <y_n, y_1> \beta_n = <x, y_1>$

$<y_1,y_2> \beta_1 + <y_2,y_2> \beta_2 + ...+ <y_n, y_2> \beta_n = <x, y_2>$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$<y_1,y_n> \beta_1 + <y_2,y_n> \beta_2 + ...+ <y_n, y_n> \beta_n = <x, y_n>$

Persamaan dalam koefisien β_i *sebanyak n kali ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah minimalisasi.*

Matriks n x *n yang berhubungan dengan vektor* $y_1, y_2,...,y_n$ *yaitu :*

$$G = G(y_1, y_2,......, y_n) = \begin{vmatrix} < y_1, y_1 > < y_1, y_2 > .... < y_1, y_n > \\ < y_2, y_1 > < y_2, y_2 > .... < y_2, y_n > \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ < y_n, y_1 > < y_n, y_2 > .... < y_n, y_n > \end{vmatrix}$$

disebut matriks Gram dari $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$. *Matriks ini adalah tranpose dari matriks koefisien normal.*

Teorema 2.1.6

Determinan Gram $g = g(y_1, y_2,\ldots, y_n) \neq 0$ jika dan hanya jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bebas linear.

Bukti :

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan vektor–vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bergantung linear jika dan hanya jika $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$.

Misalkan y_i bergantung linier, berarti terdapat α_i yang tidak sama dengan nol sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$. Karena barisan-barisan pada determinan Gram bergantung pada y_i, maka determinannya nol.

Misalkan $g = g(y_1, y_2,\ldots, y_n) = 0$. Maka ada kebergantungan linier di antara barisan-barisannya sehingga terdapat konstanta α_I yang tidak semuanya nol sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < y_i, y_j >= 0$, untuk semua j. Dengan demikian $< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, y_j >= 0$ atau $\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\|^2 = 0$. Sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$ dan vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bergantung linier. ■

Walaupun persamaan normal tidak memiliki penyelesaian tunggal jika y_i bergantung linier, tetapi selalu ada paling sedikit satu penyelesaian. Jika $g = 0$ maka selalu dihasilkan penyelesaian yang tidak tunggal, bukan penyelesaian yang tidak konsisten.

Teorema berikut menyatakan jarak minimum suatu vektor ke ruang bagian dapat dicari dengan determinan matriks Gram.

Teorema 2.1.7

Misalkan $y_1, \ldots\ldots, y_n$ bebas linear dan ∂ jarak minimum vektor x ke ruang bagian M yang dibangun oleh y_i, yaitu :

$$\partial = \min \left\| x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots\ldots - \alpha_n y_n \right\| = \left\| x - \hat{x} \right\|$$

maka,

$$\partial^2 = \frac{g(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)}{g(y_1, y_2, \ldots., y_n)}$$

Bukti :

Menurut definisi $\partial^2 = \left\| x - \hat{x} \right\|^2 = < x - \hat{x}, x - \hat{x} > = < x - \hat{x}, x > - < x - \hat{x}, x >$

Menurut teorema proyeksi, x - $\hat{x}$ ortogonal terhadap M, sehingga secara khusus karena $\hat{x} \in M$ maka : $<x$ - $\hat{x}$, $\hat{x}> = 0$, sehingga

$$\partial^2 = < x - \hat{x}, x > = < x, x > - < \hat{x}, x > = < x, x > - \alpha_i < y_1, x > - ...... - \alpha_n < y_n, x >$$

atau

$$\partial^2 + \alpha_1 < y_1, x > + ... + \alpha_n < y_n, x > = < x, x >$$

persamaan ini bersama persamaan normal memberikan n + 1 persamaan linier dalam n + 1 variabel $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \partial^2$. Dengan aturan Cramer didapatkan

$$\partial^2 = \frac{\begin{vmatrix} < y_1, y_1 > & < y_2, y_1 > & .... & < y_n, y_1 > & < x, y_1 > \\ < y_1, y_2 > & < y_2, y_2 > & .... & < y_n, y_2 > & < x, y_1 > \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < y_1, y_n > & < y_2, y_n > & .... & < y_n, y_n > & < x, y_n > \\ < y_1, x > & < y_2, x > & .... & < y_n, x > & < x, x > \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} < y_1, y_1 > & < y_2, y_1 > & .... & < y_n, y_1 > & 0 \\ < y_1, y_2 > & < y_2, y_2 > & .... & < y_n, y_2 > & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ < y_1, y_n > & < y_2, y_n > & .... & < y_n, y_n > & 0 \\ < y_1, x > & < y_2, x > & .... & < y_n, x > & 1 \end{vmatrix}} = \frac{g(y_1, ..., y_n, x)}{g(y_1, ..., y_n)} \quad \blacksquare$$

2.2. Modifikasi Teorema Proyeksi

Teorema 2.2.1

Misalkan M ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert H, x suatu elemen tertentu di H dan variasi linier, $V = x + M$, maka terdapat tunggal vektor x_0 di V dengan norm minimum dan x_0 ortogonal dengan M.

Bukti :

Bagian pertama teorema ini menyatakan jika M ruang bagian tertutup maka terdapat dengan tunggal $x_0 \in V$ sedemikian hingga $\|x_0\| = \min_{y \in V} \|y\|$

Dibentuk dua pernyataan :

1. Terdapat $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_0\| = \min_{m \in M} \|x - m\|$

2. Terdapat $x_0 \in V$ sedemikian hingga $\|x_0\| = \min_{y \in V} \|y\|$

Pernyataan 1, sudah terbukti pada Teorema proyeksi, sehingga jika dapat ditunjukkan kedua pernyataan di atas ekuivalen maka teorema di atas terbukti.

Misalkan pernyataan 1 terpenuhi, maka akan ditunjukkan pernyataan 2 dipenuhi. Didefinisikan $x_0 = x - m_0 = x + (-m_0)$. Karena $-m \in M$, maka $x_0 \in V$. Diambil $y \in V$, maka $y = x + (-m)$ untuk semua $-m \in M$.

Dengan demikian $\|x_0\| = \|x - m_0\| = \min_{y \in V} \|x - m\| = \min_{y \in V} \|y\|$.

Misalkan pernyataan 2 terpenuhi, akan ditunjukan bahwa pernyatan 1 dipenuhi. Didefinisikan $m_0 = x - x_0$ atau $x_0 = x - m_0$. Karena $x_0 \in V$ maka ada suatu $m_1 \in M$ sedemikian hingga $x_0 = x + m_1$. Diambil $-m_0 = m_1$, sehingga karena M ruang bagian maka $-m_0 \in M$.

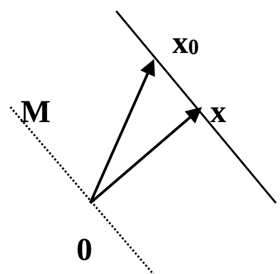
Diambil $m \in M$ maka $y = x - m \in V$.

Dan $\|x - m_0\| = \|x_0\| = \|x - m_0\| = \min_{y \in V} \|x - m\| = \min_{y \in V} \|y\|$.

Menurut Teorema proyeksi ada vektor minimal tunggal $m_0 \in M$ dan vektor selisih

$x - m_0$ *or*togonal terhadap *M*. Diambil $x_0 = x - m_0 \in V$ sehingga x_o ortogonal terhadap *M*.

V = x + M



Gambar 2.3

Ada dua jenis variasi linear yang membawa ke masalah berdimensi berhingga. Yang pertama adalah variasi linear berdimensi *n* yang terdiri dari vektor - vektor berbentuk

$x + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ dengan $\{x_1, \ldots, x_n\}$ himpunan bebas linear di *H* dan *x* vektor tertentu di *H*. Masalah norma minimum di sini direduksi menjadi penyelesaian himpunan persamaan normal berdimensi *n*.

Jenis yang kedua adalah variasi linear yang terdiri dari semua vektor x di ruang Hilbert H yang memenuhi :

$$<x, y_1> = c_1$$

$$<x, y_2> = c_2$$

$$\vdots$$

$$<x, y_n> = c_n$$

dengan $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah vektor - vektor bebas linear di H dan $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ tertentu.

Jika M adalah ruang bagian yang dibangun oleh $y_1, y_2, ..., y_n$ maka variasi linearnya adalah ruang bagian $M^{\perp}$ jika $c_i = 0$. Untuk $c_i \neq 0$ variasi linear yang dihasilkan merupakan translasi dari $M^{\perp}$. Variasi linear yang berbentuk seperti ini disebut *codimension n.* ■

Teorema 2.2.2

Misalkan H ruang Hilbert dan $\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ vektor-vektor bebas linear di H. Di antara semua vektor $x \in N$ yang memenuhi :

$$<x_1, y_1> = c_1$$

$$<x_1, y_2> = c_2$$

$\vdots$

$\langle x_1, y_n\rangle = c_n$.

Misalkan x_o mempunyai norm minimum, maka :

$x_o = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$ dengan koefisien β_i memenuhi persamaan :

$$\langle y_1, y_1\rangle\ \beta_1 + \langle y_2, y_1\rangle\ \beta_2 + \ldots\ldots + \langle y_n, y_1\rangle\ \beta_n = c_1$$

$$\langle y_1, y_2\rangle\ \beta_1 + \langle y_2, y_2\rangle\ \beta_2 + \ldots\ldots + \langle y_n, y_2\rangle\ \beta_n = c_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\langle y_1, y_n\rangle\ \beta_1 + \langle y_2, y_n\rangle\ \beta_2 + \ldots\ldots + \langle y_n, y_n\rangle\ \beta_n = c_n$$

Bukti :

Misalkan M ruang bagian berdimensi n yang dibangun oleh vektor-vektor y_i. Variasi linear yang didefinisikan dengan kendala masalah minimalisasi adalah translasi dari bagian $M^{\perp}$. Karena $M^{\perp}$ tertutup, keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal dijamin oleh teorema proyeksi, sehingga penyelesaiaan optimal x_o ortogonal terhadap $M^{\perp}$ atau $x_o \in M^{\perp\perp}$. Karena M tertutup maka $M^{\perp\perp} = M$. Jadi $x_0 \in M$ atau

$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$. Koefisien β_i dipilih sedemikian sehingga x_0 memenuhi n kendala. Hal ini berarti koefisien β_i memenuhi n persamaan tersebut. ■