II. LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan didiskusikan unsur tak terdefinisi, aksioma-aksioma, istilah-istilah, definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan penelitian ini.

2.1 Geometri Insidensi (Hilbert, 1971)

Geometri insidensi adalah geometri yang didasari oleh aksioma insidensi, geometri ini dapat dikatakan mendasari geometri Euclides yang telah dikenal sebelumnya. Geometri Euclides didasari pada lima aksioma berikut:

1. Kelompok aksioma insidensi
2. Kelompok aksioma urutan
3. Kelompok aksioma kekongruenan
4. Aksioma kesejajaran Euclides
5. Aksioma kekontinuan

Jadi dapat dikatakan bahwa geometri Euclides adalah suatu geometri insidensi yang dilengkapi dengan kelompok aksioma-aksioma 2, 3, 4 dan 5.

Suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri-geometri tersebut. Geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi .

2.1.1 Unsur Tidak Terdefinisi (Hilbert, 1971)

Dalam geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tidak terdefinisi, Untuk suatu geometri diperlukan unsur tidak terdefinisi sebagai berikut.

1. Titik
2. Himpunan titik-titik yang dinamakan garis
3. Himpunan titik-titik yang dinamakan bidang

2.1.2 Aksioma-Aksioma Insidensi (Rawuh, 2009)

Terdapat unsur tidak terdefinisi yaitu titik, garis dan bidang. Ketiga unsur ini dikaitkan satu sama lain dengan suatu aksioma pada geometri insidensi. Sistem aksioma yang digunakan adalah aksioma insidensi yang terdiri dari enam aksioma sebagai berikut:

1) Garis adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit dua titik.

2) Dua titik yang berlainan terkandung dalam tepat satu garis (satu dan tidak lebih dari satu garis).

3) Bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak terkandung dalam satu garis (tiga titik yang tak segaris atau tiga titik yang tak kolinier).

4) Tiga titik yang berlainan yang tak segaris terkandung dalam satu dan tidak lebih dari satu bidang.

5) Apabila suatu bidang memuat dua titik berlainan dari suatu garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terkandung dalam bidang itu atau garis terletak dalam bidang itu).

6) Apabila dua bidang bersekutu pada suatu titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain.

2.1.3 Definisi (Rawuh, 2009)

Suatu himpunan titik-titik bersama dengan himpunan bagian seperti garis dan bidang yang memenuhi aksioma 1 sampai 6 disebut suatu *geometri insidensi.*

2.1.4 Teorema (Rawuh, 2009)

Dua garis yang berbeda bersekutu paling banyak pada satu titik.

2.1.5 Definisi (Rawuh, 2009)

Suatu garis yang memuat titik A dan titik B yang berbeda disebut garis AB

2.1.6 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila titik A tidak pada garis BC maka titik A, B, dan C berlainan dan tidak kolinier.

Bukti :

Menurut ketentuan $B \neq C$. Andaikan $A = B$, oleh karena $B \in BC$ (B pada garis BC) maka $A \in BC$. Hal ini berlawanan dengan yang diketahui sehingga pengumpamaan $A = B$ adalah tidak benar, maka haruslah $A \neq B$. Begitu pula dengan cara yang sama dapat dibuktikan $A \neq C$, jadi A, B, C berlainan.

Untuk membuktikan titik A, B, C tak segaris dimisalkan A, B, C segaris maka akan ditunjukkan adanya krontradiksi. Andaikan titik A, B, C segaris maka ada garis g yang memuat A, B, dan C. Oleh karena g memuat b dan C dan $B \neq C$ maka $g = BC$, hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa A tidak pada garis BC. Sehingga pengandaian bahwa A, B, C segaris mengakibatkan kontradiksi. Ini berarti A, B, C tidak segaris (tidak kolinier).

2.1.7 Teorema (Rawuh, 2009)

Suatu garis dan suatu titik yang tidak pada garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti

Misalkan A titik dan g garis dengan $A \notin g$ (tidak pada g). Menurut aksioma insidensi yang pertama ada dua titik berlainan pada g, misalkan titik tersebut adalah B dan C, sehingga $g = BC$, jadi $A \notin BC$. Menurut aksioma (2) A, B dan C berlainan dan tidak segaris. Menurut aksioma (4) titik A, B dan C termuat dalam satu bidang, katakanlah bidang tersebut bidang V. Oleh karena $B \in V$dan $C \in V$ maka, menurut aksioma (5) $BC = g \subset V$ (V memuat g). Misalkan ada bidang lain

V' yang memuat garis g dan titik A jadi V' memuat pula B dan C. Ini berarti V' memuat A, B dan C, menurut aksioma (4) $V' = V$. Jadi adalah C satu-satunya bidang yang memuat g dan A karena jika ada bidang lain yang memuat A, B dan C bidang tersebut akan sama dengan bidang V.

2.1.8 Definisi (Rawuh, 2009)

1. Misalkan $A \notin g$ (titik A tidak pada garis g), bidang yang memuat garis g dan titik A kita tulis sebagai gA.
2. Misalkan titik A, B dan C berlainan dan tidak kolinier, bidang yang memuat A, B dan C kita tulis sebagai ABC.

2.1.9 Definisi (Rawuh, 2009)

Dua garis l dan m dinamakan sejajar (ditulis $l//m$) apabila

1. l dan m termuat dalam satu bidang dan
2. l dan m tidak memiliki titik sekutu

2.1.10 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila $l//m$ maka l dan m termuat dalam satu bidang.

Bukti

Menurut definisi kesejajaran garis, ada suatu bidang V yang memuat l dan m. Misalkan bidang V' juga memuat l dan m, apabila pula titik $A \in m$ maka V' dan V memuat l dan titik A. Menurut Teorema 2.1.7 haruslah $V' = V$, jadi hanya ada satu (unik) bidang yang memuat dua garis yang sejajar.

2.1.11 Teorema (Rawuh, 2009)

Jika dua garis yang berbeda berpotongan, maka garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti

Misalkan l dan m garis yang berbeda yang berpotongan, misalkan pula $A \in l$ dan $A \in m$ (sebab l dan m berpotongan). Menurut Teorema 2.1.4 ada $B \in m$ dan $B \neq A$; $B \notin l$. Maka ada sebuah bidang V yang memuat l dan B. Oleh karena V memuat l maka V memuat A Sehingga V juga memuat m. Jadi V memuat l dan m (bukti selesai).

2.1.12 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila dua bidang yang berlainan berpotongan maka himpunan titik potongnya adalah suatu garis.

Bukti

Misalkan P dan Q dua bidang berbeda yang berpotongan, misalkan juga A salah satu titik temunya (potongnya). Jadi $A \in P$ dan $A \in Q$, maka ada titik kedua B dengan $B \in P$ dan $B \in Q$ (aksioma 6), jadi juga $AB \subseteq P$ dan $AB \subseteq Q$ (aksioma 5). Ini berarti tiap titik AB termuat di P dan di Q atau $AB \subset P \cap Q$, akan dibuktikan $P \cap Q = AB$. Telah dibuktikan di atas bahwa $AB \subset P \cap Q$ selanjutnya membuktikan bahwa $P \cap Q \subset AB$. Misalkan $C \in P \cap Q$ dan misalkan $C \notin AB$. Oleh karena AB dan C termuat dalam P dan dalam Q, maka $P = Q$ (teorema 2.1.7). Hal ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi pemisalan bahwa $C \notin AB$ menimbulkan kontradiksi, sehingga haruslah $C \in AB$ ini berarti bahwa $P \cap Q \subset AB$. Oleh karena telah terbukti bahwa $AB \subset P \cap Q$ maka $P \cap Q = AB$.

Akibatnya

Apabila ada garis g dengan $g \subset V$ dan $g \subset W$ maka $g = V \cap W$.

2.1.13 Definisi (Rawuh, 2009)

Dua bidang V dan W disebut sejajar (ditulis $V \ // \ W$) apabila V dan W tidak memiliki titik temu (titik temu).

2.1.14 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila bidang P sejajar dengan bidang Q dan bidang R memotong bidang P dan bidang Q, maka himpunan $P \cap R$ dan himpunan $Q \cap R$ adalah garis-garis yang sejajar.

Bukti

Pertama akan dibuktikan bahwa $P \cap R$ dan $Q \cap R$ adalah garis-garis. Untuk ini dibuktikan bahwa P dan R berlainan serta Q dan R juga berlainan. Misalkan $P = R$, oleh karena R memotong Q maka ini berarti bahwa P memotong Q. Ini tak mungkin (karena $P//Q$), jadi haruslah $P \neq R$. Ini berarti bahwa $P \cap R$ adalah sebuah garis katakan garis tersebut garis l, begitu pula $Q \cap R$ adalah sebuah garis katakan garis tersebut garis m. Garis l dan garis m termuat dalam satu bidang, yaitu bidang R. Misalkan l dan m berpotongan, misalnya $l \cap m = A$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$ (karena $l \in P \cap R$ dan $m \in Q \cap R$ maka $l \cap m = P \cap Q$, jika $A \in l \cap m$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$). Jadi P dan Q bertemu di A, ini tidak mungkin (karena P sejajar Q). Jadi l dan m terletak pada satu bidang dan tidak memiliki titik temu, berarti l // m. (bukti selesai)

2.1.15 Definisi (Rawuh, 2009)

1. Apabila garis-garis $g_1, g_2, \ldots, g_n$bertemu pada satu titik dinamakan garis-garis $g_1, g_2, \ldots, g_n$ kongruen.

2. Apabila bangun geometri $B_1, B_2, \dots, B_n$ terletak pada satu bidang, dinamakan bangun-bangun itu sebidang atau koplanar.

2.1.16 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila setiap dua garis dari sekelompok tiga garis koplanar, akan tetapi tidak bertiga koplanar maka bertiga garis itu kongruen atau tiap dua garis diantaranya sejajar.

Bukti

Diketahui tiga garis l, m dan n; misalkan l dan m di bidang P, m dan n di bidang Q, l dan n di bidang R. Akan dibuktikan P, Q dan R berlainan. Misalkan $P = Q$ maka l, m, n sebidang (karena pengandaian l dan m di bidang P, m dan n di bidang Q), ini tidak mungkin (karena ketiga garis tidak bertiga koplanar). Jadi haruslah $P \neq Q$ begitu pula $Q \neq R$ dan $P \neq R$. Oleh karena itu maka $P \cap Q = m$, dan $Q \cap R = n$ serta $R \cap P = l$. Misalkan $l \cap m = A$, karena $A \in l$ maka $A \in P$ dan $A \in R$ dan $A \in m$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$. Jadi $A \in Q$ dan $A \in R$, sehingga $A \in n$. Apabila dua garis diantara l, m dan n berpotongan maka tiga garis itu kongruen. Apabila setiap dua garis diantara l, m dan n tidak berpotongan, maka setiap dua garis itu sebidang sehingga setiap dua garis tersebut sejajar.

2.1.17 Teorema (Rawuh, 2009)

Apabila l // m dan titik A tidak terletak pada bidang yang memuat l dan m, maka ada garis tunggal n yang memuat A sehingga n // l dan n // m.

Bukti

Ada bidang yang memuat l dan A dan ada bidang Q yang memuat m dan A (Teorema 2.1.7), jelas $P \neq Q$ sebab A tidak terletak pada bidang yang memuat l dan m (l dan m sejajar). Misalkan $P \cap Q = n$ maka n // l dan n // m, akan dibuktikan n tunggal. Misalkan n' garis lain yang memuat A dan n' // l dan n' // m, maka n' dan l sebidang misalkan bidang itu adalah bidang R, maka R harus memuat l dan A. Jadi $R = P$ dan $n' \subset P$ begitu juga $n' \subset Q$ sehingga $n' = n$.

2.1.18 Teorema (Rawuh, 2009)

Tiap bidang memuat paling sedikit 3 garis yang tidak kongruen.

2.1.19 Teorema (Rawuh, 2009)

Di dalam suatu bidang V, tiap titik A termuat dalam paling sedikit dua garis (yang berlainan).

2.1.20 Definisi (Rawuh, 2009)

Apabila dua garis tidak sebidang dikatakan bahwa dua garis itu bersilangan.

2.1.21 Teorema (Rawuh, 2009)

Misalkan diketahui 4 titik A, B, C dan D yang berlainan, tidak kolinier dan tidak sebidang maka berlaku:

1. Apabila diketahui suatu bidang, maka ada suatu titik yang tidak terletak pada bidang itu.
2. Apabila diketahui suatu garis, maka ada garis yang menyilangnya.
3. Apabila diketahui suatu titik, maka ada suatu bidang yang tidak memuat titik tersebut.
4. Ada paling sedikit enam garis dan paling sedikit empat bidang.

2.1.22 Definisi (Rawuh, 2009)

Suatu model geometri insidensi adalah sistem (S_1, S_2, S_3) yang terdiri atas tiga himpunan tertentu S_1, S_2, S_3. Anggota-anggota himpunan tersebut masing-masing dinamakan titik, garis dan bidang yang memenuhi aksioma-aksioma (1) sampai dengan (6), dengan sendirinya teorema-teorema insidensi akan berlaku pada model tersebut.

Geometri insidensi disebut planar atau berdimensi dua apabila S_3 terdiri hanya atas satu bidang. Disebut berdimensi tiga, apabila S_3 terdiri lebih dari satu bidang.

2.2 Definisi Grup (Roman, 2005)

Misalkan G adalah suatu himpunan tidak kosong dengan operasi biner. Maka G disebut suatu grup jika tiga aksioma berikut terpenuhi:

1) Hukum asosiatif, yakni untuk sembarang a, b, c pada G, berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2) Elemen identitas, yakni terdapat suatu elemen e pada G sedemikian sehingga

$$e * a = a * e = a$$

untuk sembarang elemen a pada G

3) Invers, yakni untuk masing-masing a pada G, terdapat suatu elemen a^{-1} (invers dari a) pada G sedemikian sehingga berlaku

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

2.2.1 Grup Komutatif (Roman, 2005)

Suatu grup G dikatakan *grup Abelian* atau grup komutatif,

jika hukum komutatif berlaku yakni jika

$$a * b = b * a$$

untuk setiap $a, b \in G$

2.2.2 Homomorfisma (Connell, 1999)

2.2.2.1 Definisi homomorfisma

Diketahui $(G,*)$ dan $(G',*')$ merupakan grup. Pemetaan $f : G \to G'$ disebut homomorfisma jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku

$$f(a * b) = f(a) *' f(b).$$

2.2.2.2 Definisi fungsi pada grup

a) Fungsi f dari G ke G' didefinisikan $(\forall\, a, b \in G)\; a = b \implies f(a) = f(b)$.
b) Fungsi f disebut onto/pada/surjektif jika $f(G) = G'$ atau dengan kata lain: $(\forall\, a' \in G', \exists\, a \in G)$ sehingga $a' = f(a)$.
c) Fungsi f disebut injektif $(1 - 1)$ jika $(\forall a, b \in G)\; f(a) = f(b) \implies a = b$.
d) Fungsi f disebut bijektif (korespondensi $1-1$) jika f injektif dan surjektif.

2.2.2.3 Sifat-sifat homomorfisma

1. Suatu homomorfisma dari G ke G' yang injektif $(1 - 1)$ disebut monomorfisma.
2. Suatu homomorfisma dari G ke G' yang surjektif (pada/onto) disebut epimorfisma.
3. Suatu homomorfisma dari G ke G' yang bijektif (injektif dan surjektif) disebut isomorfisma.
4. Suatu homomorfisma dari G ke G' dan $\boldsymbol{G = G'}$ disebut endomorfisma (suatu homomorfisma dari suatu grup G ke grup G itu sendiri).
5. Endomorfisma yang bijektif disebut automorfisma.