Bab II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Geometri Affin (Rawuh, 2009)

Aksioma-aksioma yang membentuk geometri Affin disebut dengan aksioma *playfair* yaitu aksioma yang menyatakan bahwa melalui suatu titik yang terletak di luar suatu garis dapat ditarik tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui. Sedangkan , aksioma-aksioma dalam geometri Affin antara lain:

1. Kesejajaran dua bidang dan garis
2. Ketransversalan garis
3. Terdapat perlintasan garis dan bidang
4. Relasi searah antara dua bidang

2.1.1 Kesejajaran Dua Bidang dan Garis

Definisi Kesejajaran Geometri Affin

Kesejajaran dalam geometri Affin adalah suatu relasi ekuivalensi yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

2. Refleksi, yaitu setiap garis *a*//*a*.
3. Simetrik, yaitu jika garis *a* //*b*, maka garis *b* //*a*.
4. Transitif, yaitu jika garis *a* //*b* dan garis *b* //*c*, maka garis *a* //*c*.

Teorema 2.1.1

Misalkan garis *a* sejajar dengan garis *b*, jika garis *c* memotong garis *a*, maka *c* juga memotong garis *b.*

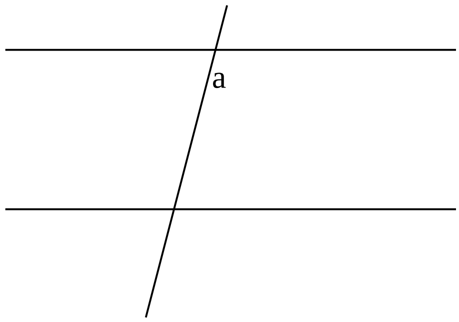
Bukti :

Andaikan c memotong a di titik P dan andaikan c\\b. Ini berarti bahwa melalui P ada dua garis yaitu a dan c yang sejajar dengan garis b. Hal ini berlawanan dengan aksioma kesejajaran. Jadi haruslah c memotong garis b.

c

P

b



Gambar 1.1 Suatu garis yang melintasi dua garis yang sejajar

Akibat 2.1.1

1. Jika garis *a* *b* dan *c\\a*, maka garis *c\\b.*

2. Jika garis a\\b, b\\c maka a=c atau a\\c.

Definisi pusat kesejajaran yang tak kolinier adalah sebagai berikut:

1. Empat titik *A,B,C,* dan *D* yang tidak segaris dikatakan membentuk suatu jajaran genjang jika *AB* sejajar *DC* dan *BC* sejajar *AD.*
2. *A,B,C,* dan *D* adalah titik sudut jajaran genjang tersebut. Segmen-segmen *AB*, *BC,CD,* dan *DA* adalah sisi-sisinya, sedangkan segmen-segmen *AC* dan *BD* adalah diagonal-diagonalnya. Karena *B* dan *D* pada pihak yang berlainan dari *AC*, maka diagonal-diagonal berpotongan di suatu titik yang disebut pusat jajaran genjang.

Definisi Kesejajaran Garis

1. Jika garis a // b , maka garis a searah dengan garis b.

2. Dua garis l dan m dinamakan sejajar (ditulis l//m) apabila

- l dan m termuat dalam satu bidang dan
- l dan m tidak memiliki titik sekutu

Akibatnya

Apabila l//m maka l dan m termuat dalam satu bidang.

Bukti

Menurut definisi kesejajaran garis, andaikan terdapat suatu bidang V yang memuat l dan m. Andaikan bidang V' juga memuat l dan m, dan titik $A \in m$, maka V' dan V memuat l dan titik A, maka V' = V. Jadi, hanya ada satu (unik) bidang yang memuat dua garis yang sejajar.

Teorema 1

Jika bidang V terdapat dua garis berpotongan yang sejajar dengan bidang W maka V\\W.

Teorema 2

Jika titik A pada bidang V dan A tidak pada bidang W dan jika pada V ada dua garis melalui A sejajar dengan garis-garis pada W, maka V\\W.

Bukti:

Andaikan l dan m garis pada V yang sejajar dengan garis-garis pada W, karena l tidak pada W, sehingga l\\W. Begitu pula karena m\\W, sehingga V\\W.

Teorema 3

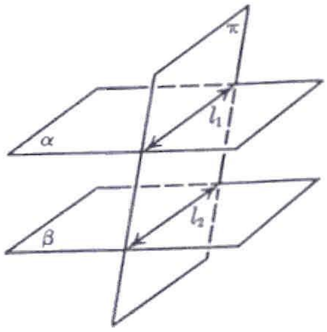
Jika dua garis berbeda saling sejajar, maka keduanya terletak pada tepat satu bidang.

Teorema4

Jika dua buah garis koplanar dan keduanya tegak lurus terhadap suatu garis yang sama, maka keduanya saling sejajar.

Teorema 5

Jika suatu bidang memotong dua buah bidang yang saling sejajar, maka perpotongannya adalah dua buah garis yang saling sejajar seperti gambar berikut ini



Gambar 1.2 Suatu bidang yang melintasi dua bidang yang sejajar

Teorema 6

Jika suatu garis tegak lurus terhadap salah satu bidang dari dua bidang yang saling sejajar, maka garis tersebut tegak lurus terhadap bidang yang kedua.

Teorema7

Jika dua bidang yang setiap bidangnya tegak lurus terhadap suatu garis yang sama, maka kedua bidang tersebut saling sejajar.

Teorema 8

Jika dua garis tegak lurus terhadap suatu bidang yang sama, maka kedua garis tersebut saling sejajar.

Teorema 9

Dua bidang yang saling sejajar, maka keduanya berjarak sama.

Definisi Garis Searah

Apabila garis a dan b bersifat bahwa a\\b atau a=b maka dikatakan bahwa garis a searah garis b.

Kesearahan garis merupakan perluasan kesejajaran dan juga merupakan relasi ekuivalensi, maka berlaku :

i. Jika a searah b maka b searah a
ii. Jika a searah b dan b searah c, maka garis a searah c.

Definisi Relasi Equivalensi Geometri

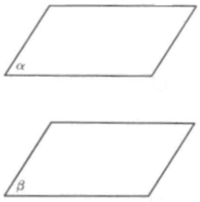
Andaikan S suatu himpunan dan R suatu relasi dalam S x S yang ditulis sebagai

a R b untuk a ∈ S dan b ∈ S relasi R, maka berlaku:

i. aRa (sifat refleksif) untuk setiap a∈S
ii. Apabila aRb maka bRa (sifat simetri) untuk setiap a, b ∈ S.
iii. Apabila aRb dan bRa maka aRc untuk setiap a, b, c ∈ S.

Definisi Kesejajaran Dua Bidang

Dua bidang yang berbeda pada suatu bidang dan juga suatu garis, dikatakan saling sejajar, jika keduanya tidak berpotongan.



Gambar 1.3 Bentuk bidang yang sejajar

2.1.2 Ketransversalan Garis

Definisi Ketransversalan Garis yaitu:

Jika garis l dan m sebidang, maka terdapat tiga kemungkinan yaitu:

(1) l\\ m

(2) l = m

(3) l \\ m atau l = m

Hubungan antara kesejajaran dan perlintasan dituangkan dalam teorema berikut

Teorema 1:

Apabila sebuah bidang terdapat sebuah garis transversal dengan satu dari dua garis sejajar, maka akan transversal dengan garis yang lainnya.

Akibatnya

1. a lint b jika dan hanya jika perpotongan antara a dan b adalah sebuah titik.
2. jika a dan b dua garis yang sebidang (coplanar) maka ada tiga kemungkinan,yaitu
   (i) a sejajar b
   (ii) a lint b
   (iii) a=b

Teorema 2

Apabila terdapat garis pada suatu bidang melintasi salah satu dari dua garis yang sejajar, maka garis tersebut akan melintasi garis yang lain.

2.1.3 Perlintasan Garis dan Bidang

Definisi perlintasan bidang adalah sebagai berikut:

Bidang V dikatakan melintasi bidang W, ditulis V lint W apabila terdapat perpotongan V dan W berupa garis.

Konsep kesejajaran dari perlintasan garis dan bidang adalah sebagai berikut:

1. Apabila g dan V tidak memiliki titik potong maka, g\\V atau V\\g.
2. Apabila garis g dan bidang V bertemu pada suatu titik maka, garis g lint(melintasi) V atau V lint(melintasi) g.
3. Apabila V∩W =∅ (himpunan kosong), maka terdapat bidang V \\W.

2.2 Definisi Geometri Insidensi

Sebuah model geometri insidensi adalah sebuah sistem(S1, S2 ,S3) yang terdiri atas tiga himpunan tertentu S1, S2, S3. Anggota-anggota himpunan tersebut masing-masing dinamakan titik, garis,dan bidang yang memenuhi aksioma insidensi.

Aksioma insidensi terdiri dari

Garis mengandung paling sedikit dua titik

1. Paling banyak satu garis mengandung dua titik yang berlainan
2. Bidang mengandung paling sedikit tiga titik yang tak segaris(tak kolinier)
3. Tiga titik berlainan yang tak segaris terkandung dalam cukup satu bidang
4. Apabila sebuah bidang memuat dua titik berlainan dari sebuah garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terletak dalam bidang itu).
5. Apabila dua bidang bersekutu pada sebuah titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain.

Jadi, sebuah himpunan titik-titik bersama dengan himpunan bagian seperti garis dan bidang yang memenuhi aksioma 1 sampai 6 disebut *geometri insidensi*. Karena, suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri-geometri tersebut maka dapat dikatakan bahwa geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi. Dalam geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tak terdefinisi. Untuk suatu geometri diperlukan unsur tak terdefinisi sebagai berikut.

1. Titik
2. Garis(Himpunan titik-titik)
3. Bidang (himpunan titik-titik)

Teorema 11

Dua garis yang berbeda bersekutu paling banyak pada satu titik.

Definisi Garis

Suatu garis yang mengandung titik A dan titik B yang berbeda disebut garis AB.

Teorema 12

Apabila titik A tidak pada garis BC maka titik A, B, dan C berlainan dan tidak kolinier. Bukti:

a) Bukti garis A, B, C berlainan.

Menurut ketentuan $B \neq C$. Andaikan A = B, karena $B \in BC$ (B pada garis BC), maka $A \in BC$. Hal ini berlawanan dengan yang diketahui sehingga pengumpamaan A = B adalah tidak benar. Maka haruslah $A \neq B$. begitu pula dengan cara yang sama dapat dibuktikan $A \neq C$. Jadi A, B, C berlainan.

a) Bukti garis A,B C kolinier.

Untuk membuktikan titik A, B, C tak segaris. Andaikan A, B, C segaris. Akan ditunjukkan adanya kontradiksi. Andaikan titik A, B, C segaris maka ada garis g yang memuat A, B, dan C. Karena g memuat b dan C dan $B \neq C$ maka g = BC, hal ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa tidak pada garis BC. Sehingga pengandaian bahwa A, B, C segaris mengakibatkan kontradiksi. Ini berarti A, B, C tak segaris (tidak kolinier).

Teorema 13

Suatu garis dan suatu titik yang tidak pada garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti

Andaikan A titik dan g garis dengan $A \notin g$ (A tidak pada g). Menurut aksioma 1 ada dua titik berlainan pada g, misalkan titik tersebut adalah B dan C, sehingga g = BC. Jadi $A \notin BC$. Menurut aksioma 2 titik A, B, dan C berlainan dan tak segaris. Menurut aksioma 4 titik A, B, dan C termuat dalam satu bidang, anggap bidang tersebut bidang V. Karena $B \in V$dan $C \in V$ maka, menurut aksioma 5, $BC = g \subset V$ (V memuat g). Andaikan ada bidang lain V' yang memuat garis g dan titik A. Jadi V' memuat pula B dan C. Ini berarti V' memuat A, B, dan C. Menurut aksioma 4 bahwa V' = V. Jadi V adalah satu-satunya bidang yang memuat g dan A. Karena jika ada bidang lain yang memuat A, B dan C bidang tersebut akan sama dengan bidang V.

Definisi Garis dan Bidang

1. Andaikan $A \notin g$ (titik A tidak pada garis g), bidang yang memuat garis g dan titik A dapat ditulis dengan gA.
2. Andaikan titik A, B, dan C berlainan dan tak kolinier, bidang yang memuat A, B, dan C dapat ditulis dengan ABC.

2.3 Ke-Isomorfismaan

Definisi isomorf adalah suatu padanan(korespondensi) satu-satu antara suatu himpunan S dan himpunan S' adalah suatu padanan a→ a' (dibaca a sepadan dengan a' atau a' sepadan dengan a) antara unsur-unsur S dan unsur-unsur S' sedemikian hingga tiap unsur a dalam S sepadan dengan unsur tunggal a' dalam S' dan sebaliknya tiap unsur b' dalam S' adalah padanan unsur tunggal b dalam S sehingga b'→b.

Bidang G_1 dan G_2 disebut isomorfis jika ada sebuah fungsi bijektif (satu-ke-satu dan *onto*) dari V_1 ke V_2 dengan sifat bahwa a bertetangga dengan b pada G_1 jika dan hanya jika $f(a)$ bertetangga dengan $f(b)$ pada G_2, untuk seluruh a dan b pada V_1.

Dua geometri affin G dan G' yang isomorf, memiliki struktur yang sama. Jika G1, G2, G3 tiga geometri affin, maka berlaku suatu relasi keequivalenan sebagai berikut:

1. G1≅ G1(sifat reflektif)
2. Jika G1≅ $G2$ maka G2≅G1 (sifat simetri)

3. Jika $G1 \cong G2, G2 \cong G3$, maka $G1 \cong G3$(Transitif)

Keterangan $\cong$ adalah simbol isomorf.

Beberapa teorema:

- Jika $f : G \rightarrow G'$ suatu isomorfisma, e dan e' masing-masing adalah unsur kesatuan G dan G', maka f(e)=e'.
- Jika $f : G \rightarrow G'$ suatu isomorfisma dan f(a) = a', $a \in G$, $a' \in G'$, maka $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$.
- Jika $f : G \rightarrow G'$ suatu isomorfisma dan order elemen a adalah n, maka order f(a) juga adalah n.
- Relasi isomorfisma dalam himpunan grup adalah relasi ekuivalen

Definisi (Rawuh, 2009)

Dua geometri G dan G' disebut isomorf apabila ada tiga padanan satu-satu yaitu antara titik-titik, antara garis-garis, dan antara bidang-bidang. $P \rightarrow P'$, $g \rightarrow g'$, dan $V \rightarrow V'$ (dibaca: titik P sepadan P', garis g sepadan g', dan bidang V sepadan V') dengan sifat:

i) $P \in g$ dan $P' \in g'$

ii) $P \in V$ dan $P' \in V'$

iii) $g \in V$ dan $g' \in V'$