II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Ragam (Anara)

Untuk menguji kesamaan dari beberapa nilai tengah secara sekaligus diperlukan sebuah teknik yang baru yang disebut analisis ragam. Anara adalah suatu metode untuk menguraikan keragaman total data menjadi komponen-komponen yang mengukur berbagai komponen keragaman.

Asumsi-asumsi yang mendasari Anara adalah:

1) Pengaruh perlakuan dan pengaruh lingkungan yang bersifat aditif

   Yang dimaksud dengan bersifat aditif artinya dapat dijumlahkan sesuai dengan model. Adanya ketidakaditifan dalam model akan mengakibatkan keheterogenan ragam galat. Model aditif linier adalah sebuah model yang umumnya digunakan untuk menjelaskan komponen sebuah pengamatan yang tersusun atas nilai tengah dan galat. Komponen nilai tengah terdiri dari satu atau lebih parameter (μ). Model yang paling umum adalah sebagai berikut:

$$y_i = \mu + \varepsilon_i \qquad (1)$$

   Bila asumsi tidak terpenuhi maka perlu dilakukan transformasi data. Apabila tidak dilakukan transformasi data, ragam galat gabungan yang diperoleh sedikit tidak efisien untuk selang kepercayaan pengaruh perlakuan dan dapat memberikan tingkat nyata yang palsu untuk perbandingan nilai tengah perlakuan tertentu.

2) Galat percobaan memiliki ragam yang homogen

   Dalam racangan percobaan, komponen galat yang berasal dari perlakuan harus menduga ragam populasi yang sama. Keheterogenan ragam galat dapat mengakibatkan respon yang tidak stabil dari beberapa perlakuan tertentu. Bila nilai tengah satu atau dua perlakuan lebih tinggi dari yang lainnya dan keragamannya juga lebih tinggi dari yang lainnya, maka akan mengakibatkan keragaman galat yang tidak homogen.

3) Galat percobaan yang saling bebas

   Asumsi mengenai faktor ε_i untuk Anara adalah $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Peluang bahwa galat dari salah satu pengamatan yang mempunyai nilai tertentu haruslah tidak bergantung dari nilai-nilai galat untuk pengamatan yang lain. Atau dapat dikatakan bahwa tidak ada korelasi antar galat. Jika galat percobaan tidak saling bebas maka dapat mengakibatkan hasil dari pengujian tidak valid. Salah satu cara untuk mencapai sifat saling bebas adalah dengan melakukan pengacakan terhadap objek pengamatan.

4) Galat percobaan menyebar normal

   Asumsi ini berlaku terutama untuk pengujian hipotesis, dan tidak diperlukan pada pendugaan komponen ragam. Jika hasil dari kurva yang menggambarkan galat percobaan ternyata menjulur ke kanan atau ke kiri, komponen galat dari perlakuan cenderung merupakan fungsi nilai tengah perlakuan. Ini akan mengakibatkan ragam tidak homogen. Jika hubungan fungsional diketahui, maka transformasi dapat ditentukan sehingga akan membuat galat tersebut menyebar mendekati sebaran normal. Dengan demikian analisis ragam dapat dilakukan pada data tranformasi (Mattjik dan Sumertajaya, 2000).

2.1.1 Analisis Ragam Klasifikasi Satu Arah

Analisis ragam dengan klasifikasi satu arah tanpa interaksi adalah analisis yang klasifikasi pengamatannya didasarkan pada satu kriteria.

Model nilai tengah

$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ dengan $\mu_i = \mu + \tau_i$

sehingga diperoleh model pengaruhnya:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

dimana : y_{ij}= nilai pengamatan pada perlakuan ke-i dan ulangan ke-j

$i = 1,2, \dots, k$

$j = 1,2, \dots, n$

μ= rata-rata keseluruhan (*overall mean*)

τ_i= pengaruh perlakuan ke-i *(treatment effect*)

ε_{ij}~i.i.d N(0,σ^2)

μ_i= nilai tengah dari populasi yang dipengaruhi oleh perlakuan ke-i

(Moser, 1994).

Analisis ragam dengan klasifikasi satu arah dapat ditulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 1. Analisis ragam klasifikasi satu arah

Sumber keragaman	Derajat bebas	Jumlah kuadrat	Kuadrat tengah	F hitung
Perlakuan	t-1	JKP	KTP	KTP/KTG
Galat	t(r-1)	JKG	KTG	
Total	rt-1	JKT		

Untuk mencari jumlah kuadratnya maka hitung nilai dari faktor koreksi (C) yaitu

$C = {Y_{..}^2}/{nt}$ (2)

Jumlah kuadrat yang berasal dari peubah klasifikasi yaitu jumlah kuadrat perlakuan dan diperoleh $JK\ Perlakuan = \frac{1}{r}\sum Y_{ij}^2 - C$ (3)

Jumlah kuadrat antar individu yang diperlakukan sama disebut jumlah kuadrat galat dan diperoleh melalui pengurangan jumlah kuadrat perlakuan dari jumlah kuadrar total atau $JK\ Galat = \sum_i(\sum_j Y_{ij}^2 - \frac{Y_{i.}^2}{r})$ (4)

$JK\ Total = \sum\sum Y_{ij}^2 - C$ (5)

Kuadrat Tengah didapat dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

$KTP = {JKP}/{t-1}$ (6)

$KTG = {JKG}/{t(r-1)}$ (7)

(Steel dan Torrie, 1995)

2.2 Homogenitas Ragam

Dalam analisis ragam, komponen galat yang berasal dari perlakuan harus menduga ragam populasi yang sama. Keheterogenan ragam galat dapat mengakibatkan respons yang tidak stabil dari beberapa perlakuan tertentu. Kadang-kadang bila nilai tengah satu atau dua perlakuan lebih tinggi dari yang lainnya dan keragamannya juga lebih tinggi dari yang lainnya. Akan mengakibatkan keragaman galat yang tidak homogen.

Menurut Montgomery (1976), asumsi kehomogenan ragam mengharuskan bahwa perbedaan perlakuan yang diaplikasikan setiap unit tidak merubah keragaman hasil, tetapi merubah rataannya. Oleh karena itu asumsi tersebut merupakan suatu hal yang perlu diuji hipotesisnya. Asumsi tersebut diperlukan untuk mengasumsikan bahwa ragam dari semua kelompok percobaan adalah sama yaitu

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 \tag{8}$$

H_1: Paling sedikit satu ragam yang tidak sama

2.3 Beberapa Uji Umum untuk Homogenitas Ragam

1. Uji *Bartlett's*

Prosedur pada uji *Bartlett's* diperoleh dengan menggunakan pendekatan sebaran khi kuadrat dengan (k-1) derajat bebas. Untuk menguji hipotesis:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 \tag{9}$$

H_1: Paling sedikit satu ragam yang tidak sama

Uji *Bartlett's* diperoleh dengan memisalkan s_t^2 sebagai penduga bagi σ^2 yang diperoleh dari m pengulangan dengan $n_t - 1$ derajat bebas.

$$B = \frac{[\sum_{i=1}^{y}(r_i-1)]\ln(s^2) - \sum_{i=1}^{y}(r_i-1)\ln(s_i^2)}{C} \qquad (10)$$

$$C = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{v}(r_i-1)^{-1} - (\sum_{i=1}^{v}(r_i-1))^{-1}}{3(v-1)} \qquad (11)$$

dengan,

s_i^2 = ragam dari tiap perlakuan

r_i = banyaknya ulangan tiap perlakuan

y_{it} = nilai sampel dari perlakuan tiap ulangan

$\overline{y_i}$ = rata-rata perlakuan tiap ulangan

i = 0, 1, 2,...........n

s^2 = jumlah ragam tiap perlakuan

v = banyaknya perlakuan

Hal tersebut dapat ditunjukan bahwa $B{\sim}X^2$ dengan derajat bebas v-1, jika ragam dari µ kelompok adalah sama dan normal (Steel dan Torrie, 1995).

2. Uji *Levene's*

Nilai F hitung dari uji *Levene's* diperoleh dari hasil transformasi selisih kuadrat dari masing-masing sampel data dengan nilai rata-rata setiap perlakuan. Bila kita ingin menguji hipotesis:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 \qquad (12)$$

H_1: Paling sedikit satu ragam yang tidak sama

Untuk tiap pengamatan dari j_{th}ulangan menggunakan transformasi berikut ini:

$$Z_{it} = |y_{it} - \overline{y_i}| \qquad (13)$$

dengan,

y_{it}= nilai sampel tiap perlakuan

$\overline{y_i}$= rata-rat sampel tiap perlakuan

pada analisis ragam :

JKT= JKK+JKG sama dengan

$$\sum_{i=1}^{v}\sum_{t=1}^{r_i}(z_{it}-\bar{z})^2 = r_i\sum_{i=1}^{v}(\overline{z_i}-\bar{z})^2 + \sum_{i=1}^{v}\sum_{t=1}^{r_i}(z_{it}-\overline{z_i})^2$$

dengan $\sum_{i=1}^{v}(\overline{z_i}-\bar{z})^2$ dan $\sum_{i=1}^{v}\sum_{t=1}^{r_i}(z_{it}-\overline{z_i})^2$ adalah saling bebas, dengan membagi kedua ruas dengan σ^2 maka diperoleh :

$$\frac{\sum_{i=1}^{v}\sum_{t=1}^{r_i}(z_{it}-\bar{z})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{v}(\overline{z_i}-\bar{z})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{v}\sum_{t=1}^{r_i}(z_{it}-\overline{z_i})^2}{\sigma^2}$$

$$X^2(n-1) = X^2(v-1) + X^2(n-v)$$

Dari persamaan di atas statistik F didefinisikan sebagai berikut:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{v} r_i^{(\overline{z_i}-\bar{z})^2} \Big/ (v-1)}{\sum_{i=1}^{v}\sum_{i=1}^{r_i}(z_{it}-\overline{z_i})^2 \Big/ (n-v)}$$

dengan,

$\overline{z_i}$= rata-rata data tiap perlakuan yang ditransformasi

$\bar{z}$= rata-rata dari semua rata-rata tiap perlakuan

Dengan $(v-1)$ dan $(n-v)$ derajat bebas (Phill,1999)

2.4 Analisa Rata-rata untuk Ragam (ANOMV)

Metode ini dilakukan dengan mengubah ANOM menjadi uji skala dengan mentransformasi pengamatan X_{ij} kedalam persamaan dibawah :

$$\boldsymbol{Y_{ij}} = (\boldsymbol{X_{ij}} - \boldsymbol{\widehat{X}_i})^{\boldsymbol{2}} \tag{15}$$

Dimana X_{ij} berdistribusi N (μ_i, σ_i^2) misal

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 + \alpha_i \tag{16}$$

dengan $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Misal $\hat{Y}_i, \bar{\bar{Y}}$, dan $V_i = \hat{Y}_i - \bar{\bar{Y}}$. $\hat{Y}_i$ adalah penduga maksimum likelihood dari σ_i^2, $\bar{\bar{Y}}$, adalah penduga dari σ^2 dan V_i adalah penduga dari α_i sehingga :

$$\bar{Y}_i = \frac{n-1}{n} S_i^2$$

$$\bar{\bar{Y}}_i = \frac{n-1}{n} \overline{S^2}$$

$$V_i = \frac{n-1}{n} (S_i^2 - \overline{S^2})$$

Dengan S_i^2 adalah penduga takbias dari σ_i^2 dan $\overline{S^2}$ adalah rata-rata k ragam sampel. Karena tidak ada kesesuaian ukuran antara ragam sampel dengan rata-rata k ragam yang sangat besar maka kita membutuhkan penduga dari σV_i, standar deviasi dari V_i. Untuk populasi normal :

$$var(S_1^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \tag{17}$$

Maka,

$$var(V_{i)} = var\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(S_i^2 - \overline{S^2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 var\left(S_i^2 - \overline{S^2}\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left[\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 + \frac{k-1}{k^2}\right] var(S_i^2)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\frac{k-1}{k}\right) 2\sigma^4 \tag{18}$$

Sehingga diperoleh,

$$\sigma V_i = \frac{\sigma^2}{n}\sqrt{\frac{2(k-1)(n-1)}{k}} \tag{19}$$

Karena $\widehat{S^2}$ penduga tak bias dari σ^2 maka:

$$\hat{\sigma} V_i = \frac{\widehat{S^2}}{n}\sqrt{\frac{2(k-1)(n-1)}{k}}$$

$\hat{\sigma} V_i$ adalah penduga tak bias bagi σV_i. Kita anggap:

$$G_i = \frac{V_i}{\hat{\sigma}_{V_i}}$$

$$= \frac{\frac{n-1}{n}\left(S_i^2 - \overline{S^2}\right)}{\frac{\overline{S^2}}{n}\sqrt{\frac{2(k-1)(n-1)}{k}}}$$

$$= \frac{S_i^2 - \overline{S^2}}{\overline{S^2}C} \tag{20}$$

dimana $C = \sqrt{\frac{2(k-1)}{k(n-1)}}$

$\overline{S^2}C$ adalah penduga tak bias dari standar deviasi dari persamaan (19). G_i ,diasumsikan dari model (14), $E(S_i^2) = \sigma_i^2 = \sigma^2 + \alpha_i$,

$$E(\overline{s^2}) = (\frac{1}{k})\sum_{j=1}^{k} E\left(S_j^2\right) = (\frac{1}{k})\sum_{j=1}^{k}(\sigma^2 + \alpha_i) = \sigma^2$$

karena $S_i^2 - \overline{S^2}$ merupakan penduga tak bias dari α_i, didapat persamaan:

$$G_i = \frac{S_i^2 - \overline{S^2}}{\overline{S^2}C}$$

$$= \frac{S_i^2}{S^2 C} - \frac{1}{C}$$

$$= \frac{kS_i^2}{C\sum_{j=1}^{k} S_i^2} - \frac{1}{C}$$

$$= \frac{k}{C}\left(N_i - \frac{1}{k}\right) \tag{21}$$

dimana $N_i = \frac{S_i^2}{\sum_{j=1}^{k} S_i^2}$

G_i (terjadi jika ragam sampel relatif besar dibandingkan rata-rata k ragam) setara dengan proposi ragam total yang disumbangkan dari *i* ragam sampel lebih besar 1/k, proporsi yang diduga ketika hipotesis homogenitas ragam adalah benar. Pengamatan serupa dapat membuat nilai G_i kecil. Karena G_i adalah fungsi linier dari N_i, maka untuk setiap batas keputusan G_i setara dengan batas keputusan dari N_i. Kita sebut dengan analisis rata-rata untuk ragam (ANOMV). Nilai kritisnya disimbolkan dengan α, *k*, dan *v* (derajat bebas) yang membangun garis keputusan.

$$UDL = U_{\alpha,k,v}k\overline{S^2}$$

$$CL = \overline{S^2}$$

$$UDL = L_{\alpha,k,v}k\overline{S^2} \qquad (22)$$

terhadap garis dari ragam sampel S_i^2. Hipotesis homogenitas ragam di tolak jika ada ragam sampel S_i^2 berada di luar garis keputusan.(Wludyka and Nelson,1997).

2.5 Menentukan Titik Kritis untuk ANOMV

1. Tepat Titik Kritis

   Dari hipotesis sebelumnya di dapat:

$$N_i = \frac{S_i^2}{\sum_{j=1}^{k} S_j^2} = \frac{(n-1)S_i^2/\sigma^2}{\sum_{j=1}^{k}(n-1)S_j^2/\sigma^2} \qquad (23)$$

   Adalah perbandingan antara peubah acak khi kuadrat n-1 df dengan penjumlahan k peubah acak khi- kuadrat yang saling bebas yang berderajat bebas n-1. Misal $m = (n-1)/2$ maka benar jika:

a. N_i berdistribusi beta $[m, (k-1)m]$ sehingga $E(N_i) = \frac{1}{k}$ dan $var(N_i) = \frac{k-1}{k^2(km+1)}$ (24)

b. Ada himpunan dari $r(2 \leq r \leq k-1)$ N_i adalah distribusi bersama bagi r distribusi dimensi Dirichelt $[m, \dots, m: (k-r)m]$ dengan fungsi densitasnya:

$$f(x_1, \dots, x_r) = \frac{\Gamma(km)}{[\Gamma(m)]^r \Gamma[(k-r)m]} \times x_1^{m-1} \dots x_r^{m-1} (1 - \sum_{i=1}^{r} x_i)^{(k-r)m-1} \quad (25)$$

Untuk bilangan tak negatif x_i maka $\sum_{i=1}^{r} x_i \leq 1$.

c. Untuk $(k-1)$ dimensi Dirichlet $(m, \dots, m; m)$

$$cov(N_i, N_j) = \frac{-1}{k^2(km+1)} \quad (26)$$

Dari persamaa sebelumnya (a dan b) dengan $\rho = -\frac{1}{k-1}$ ada (L,U) sedemikian sehingga :

$$1 - \alpha = P(L \leq N_i \leq U \; untuk \; i = 1, \dots, k) \quad (27) =$$

$$k \int \dots \int_A \; y_1^{m-1} \dots y_k^{m-1} dy_1 \dots dy_{k-1} \quad (28)$$

Dimana $A = \{(y_1, \dots, y_k): L \leq y_i \leq U \; untuk \; i = 1, .., k\}$

$y_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i$

dan $K = \frac{\Gamma(km)}{[\Gamma(m)]^k}$ (29)

Dari persamaan diatas dengan menggunakan kaidah keputusan menyebabkan uji HOV untuk α : menolak H_0 jika N_i tidak pada interval (L,U) untuk beberapa i. Hal ini unik bagi L dan U, untuk beberapa kriteria misalnya:

$$P(\max N_i > U) = P(minN_i < L) \quad (30)$$

atau

$$P(N_i > U) = P(N_i < L) untuk\ i = 1, \dots, k \quad (31)$$

(Wludyka and Nelson,1997).

2. Pendekatan Titik Kritis

Untuk nilai k> 3 kita menggunakan pendekatan titik kritis. Misal $A_i = \{L \leq N_i \leq U\}$ dan A_i^c merupakan komplemen dari A. Maka,

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c)$$

Adalah peluang untuk menolak hipotesis HOV dengan batas atas dan batas bawahnya:

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_i^c) - \sum_{i<j} P(A_i^c \cap A_j^c) \leq P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i^c)$$

$$kP(A_1^c) - \frac{k(k-1)}{2} P(A_1^c \cap A_2^c) \leq P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c) \quad (32)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c) \leq kP(A_1^c) - (k-1)P(A_1^c \cap A_2^c) \quad (33)$$

Karena $P(A_1^c)$ adalah peluang dengan rasio $N_i = {S_i^2}\big/{\sum_{j=1}^{k} S_j^2}$ merupakan interval luar (L,U) yang relevan dengan peluang gabungan dari distribusi $beta[m:(k-1)m]$. Karena $P(A_1^c \cap A_2^c)$ adalah peluang dari 2 rasio tertentu merupakan interval luar (L,U), ini relevan dengan peluang gabungan dari distribusi $Dirichlet[m.m:(k-2)m]$ (Wludyka and Nelson,1997).