II. LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dikaji konsep operasi biner dan ring yang akan digunakan dalam pembahasan penelitian ini. Untuk lebih mudah memahami, akan diberikan beberapa contoh.

Berikut ini akan diberikan notasi dan definisi operasi biner yang akan digunakan pada teori ring.

Definisi 2.1 Operasi Biner

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan S adalah suatu aturan yang mengawankan setiap pasangan berurutan $(a,b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen S.

$* : S \times S \rightarrow S$

$(a,b) \mapsto (a * b) \in S$ (Gilbert dan Nicholson, 2004).

Contoh :

Penjumlahan biasa "+" dan perkalian biasa "•" pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah operasi biner.

Selanjutnya akan diberikan konsep ring dan sifat-sifat ring serta contoh-contohnya.

Definisi 2.2 Ring

Diberikan R himpunan sebarang tak kosong, + dan • adalah sebarang dua operasi pada R. Himpunan < R,+, •> dikatakan ring jika memenuhi sifat :

1. Terhadap operasi penjumlahan +,
   - *a*) Tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a + b \in R$.
   - *b*) Asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   - *c*) Mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat $0 \in R$, sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$.
   - *d*) Elemen invers, yaitu untuk setiap $a \in R$, terdapat $-a \in R$ sedemikian sehingga berlaku $a + -a = -a + a = 0$.
   - *e*) Komutatif, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.

   Berdasarkan aksioma tersebut, maka < R,+ > merupakan grup abelian.
2. Terhadap operasi pergandaan •,
   - *a*) Tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a \bullet b \in R$.
   - *b*) Asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
3. Pada operasi penjumlahan + dan pergandaan •,
   - *a*) Distribusi kanan, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku

     $$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c).$$
   - *b*) Distribusi kiri, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku

     $$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$$ (Herstein, 1996).

Contoh :

Diberikan himpunan $S = \{x \in R \mid x \neq -1\}$. Selanjutnya didefinisikan dua operasi pada S, $*$ dan • yaitu $a * b = a + b + ab$ dan $a \bullet b = 0$, untuk setiap $a,b \in S$.

Akan ditunjukkan $< S, *, \bullet >$ ring.

1. Terhadap operasi $*$,

   (i) Tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in S$ berlaku $a * b \in S$.

   Bukti :

   Diketahui $a * b = a + b + ab$. Andaikan $a * b = -1$.

   $\Leftrightarrow a + b + ab = -1$

   $\Leftrightarrow a + ab = -1 - b$

   $\Leftrightarrow a(1 + b) = -(1 + b), b \neq 0$

   $\Leftrightarrow a = -1$, kontradiksi.

   Jadi pengandaian salah, yang benar $a + b + ab \neq -1$, dengan kata lain $a * b \in S$.

   (ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

   Bukti :

   $$
   \begin{aligned}
   (a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\
   &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\
   &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\
   &= a + b + c + bc + ab + ac + abc \\
   &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\
   &= a * (b * c).
   \end{aligned}
   $$

   (iii) Mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in S$ berlaku $y * a = a * y = a$.

   Bukti :

   Misalkan y elemen identitas untuk $*$ dari S, maka :

   $\Leftrightarrow y * a = a$

$\Leftrightarrow y + a + ya = a$

$\Leftrightarrow a + y(1 + a) = a$

$\Leftrightarrow y(1 + a) = 0$

$y = 0$ atau $(1 + a) = 0$.

$(1 + a) = 0$ tidak mungkin, karena $a \neq -1$.

Oleh karena itu $y = 0$ merupakan elemen identitas untuk $*$ dari S.

(iv) Setiap elemen dari A mempunyai invers, yaitu untuk setiap $a \in S$, terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga berlaku $a * x = x * a = 0$.

Bukti :

$\Leftrightarrow x * a = 0$

$\Leftrightarrow x + a + xa = 0$

$\Leftrightarrow x + xa = -a$

$\Leftrightarrow x(1 + a) = -a$

$\Leftrightarrow x = \frac{-a}{(1+a)}$.

Andaikan $x = -1$, maka

$\Leftrightarrow \frac{-a}{(1+a)} = -1$

$\Leftrightarrow -a = -(1+ a)$

$\Leftrightarrow -a = -1- a$

$\Leftrightarrow$ $0 = -1$, kontradiksi.

Jadi yang benar $x \neq -1$. Dengan kata lain $x \in S$ dan $x = \frac{-a}{(1 + a)}$ merupakan invers untuk setiap $a \in S$.

(v) Komutatif, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a * b = b * a$.

Bukti :

$a * b \ = a + b + ab$

$= b + a + ba$

$= b * a.$

2. Terhadap operasi •,

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in S$ berlaku $a \bullet b \in S$.

Bukti :

Diketahui $a \bullet b = 0$. Karena $0 \neq -1$ maka $0 \in S$, dengan kata lain $a \bullet b \in S$.

(ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

Bukti :

$(a \bullet b) \bullet c \quad = (a \bullet b) \bullet c$

$= 0 \bullet c$

$= 0$

$= a \bullet 0$

$= a \bullet (b \bullet c).$

3. Pada operasi $*$ dan •,

(i) Distribusi kanan, yaitu untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku

$$a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c).$$

Bukti :

$a \bullet (b * c) \ = a \bullet (b + c + bc)$

$= a \bullet b + a \bullet c + a \bullet (bc)$

$= a \bullet b + a \bullet c + (a \bullet b)(a \bullet c)$

$= (a \bullet b) * (a \bullet c).$

(ii) Distribusi kiri, yaitu untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku

$$(b * c) \bullet a = (b \bullet a) * (c \bullet a).$$

Bukti :

$(b * c) \bullet a = (b + c + bc) \bullet a$

$= b \bullet a + c \bullet a + (bc) \bullet a$

$= b \bullet a + c \bullet a + (b \bullet a)(c \bullet a)$

$= (b \bullet a) * (c \bullet a).$

Dari aksioma di atas maka terbukti $< S, *, \bullet >$ ring. ■

Berdasarkan Definisi 2.2 dapat diperoleh suatu ring yang mempunyai sifat sebagai berikut.

Diberikan ring $< R,+, \bullet>$. Jika terhadap operasi $\bullet$ pada R berlaku $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a,b \in R$, maka R disebut ring komutatif (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh :

$<Z, +, \bullet>$ adalah ring komutatif. Contoh ring yang tidak komutatif adalah $< M_n (R), +, \bullet >$ yaitu ring dengan operasi penjumlahan dan pergandaan matrik yang elemennya berupa matrik berukuran *nxn*.

Berikut ini akan diberikan pengertian struktur ring $R \oplus S$ yang memenuhi karakteristik tertentu terhadap operasi binernya.

Diberikan R dan S suatu ring. Himpunan $R \oplus S = \{(r,s)|r \in R$ dan $s \in S\}$ merupakan ring $R \oplus S$ dengan operasi penjumlahan dan pergandaan $(r,s) + (t,u) = (r + t,s + u)$ dan $(r,s)(t,u) = (rt,ru+st)$ (Rege dan Chhawchharia, 1997).

Dari konsep subgrup pada grup, akan diperkenalkan ide subring pada ring. Berikut ini definisi subring secara lengkap.

Definisi 2.3 Subring

Diberikan suatu ring R dan himpunan $S \subset R$ dengan $S \neq \emptyset$. Himpunan S disebut subring R jika S merupakan ring terhadap operasi yang sama pada R (Herstein, 1996).

Contoh :

Himpunan $<Z, +, \bullet>$ merupakan ring dan $2Z \subset Z$. Himpunan $2Z$ merupakan ring terhadap operasi yang sama pada R. Oleh karena itu, $2Z$ adalah subring dari Z.

Akan disajikan suatu ring yang tidak mempunyai elemen pembagi nol. Berikut definisi secara lengkap.

Definisi 2.4 Daerah Integral

Suatu ring komutatif R dikatakan daerah integral jika $a \bullet b = 0$ di R maka $a = 0$ atau $b = 0$ (Herstein, 1996).

Contoh :

Himpunan $< R,+,\bullet>$ dan himpunan $< Z,+, \bullet>$ adalah contoh daerah integral.

Dari konsep subgrup normal pada grup, akan diperkenalkan ide ideal pada ring, berikut definisi ideal secara lengkap.

Definisi 2.5 Ideal

Diberikan R ring dan $I \subseteq R$. I dikatakan ideal jika :

a) I subring pada R ;

b) $rI \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$;

c) $Ir \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$;

Catatan. Jika $I \subseteq R$ hanya memenuhi a) dan b) maka I dikatakan ideal kiri pada R. Jika $I \subseteq R$ hanya memenuhi a) dan c) maka I dikatakan ideal kanan pada R (Herstein, 1996).

Contoh :

Misalkan Z adalah ring dan $2Z = \{2a \mid a \in Z\}$ berisi kelipatan dari 2. Akan ditunjukkan $2Z$ adalah ideal pada Z.

i) $2Z$ subring dari Z.

Dari contoh pada Definisi 2.3 telah ditunjukkan $2Z$ adalah subring dari Z.

ii) $r2Z \subseteq 2Z$, untuk setiap $r \in Z$.

Bukti :

Diberikan sebarang $2a \in 2Z$ dan sebarang $r \in Z$, maka berlaku

$$r(2a) = (r2)a = (2r)a \text{ dan } 2(ra) \in 2Z.$$

Dari i) dan ii) terbukti bahwa $2Z$ adalah ideal pada Z. ■

Terdapat suatu ideal yang dibangun oleh sebarang elemen pada ring dan elemen tersebut disebut elemen pembangun. Berikut ini diberikan definisi pembangun secara lengkap.

Definisi 2.6 Pembangun

Diketahui R ring komutatif dan A ideal pada R. Himpunan $A = \{pr \mid r \in R\}$ suatu ideal yang dibangun suatu elemen p dan p disebut pembangun (generator) ideal A dapat ditulis $\langle p \rangle = A$ (Dummit dan Foote, 2004).

Jika semua ideal pada daerah integral dapat dinyatakan sebagai himpunan yang dibangun oleh suatu elemen maka daerah integral disebut daerah ideal utama. Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 2.7 Daerah Ideal Utama

Suatu daerah integral dikatakan daerah ideal utama jika untuk setiap ideal I di R berbentuk $I = \{xa \mid x \in R\}$ untuk suatu $a \in I$ (Herstein, 1996).

Contoh :

Diberikan daerah integral Z. Terdapat $I \subset Z$. Karena $I = \{0\}$ ideal pada Z yang dibangun oleh elemen 0 dan jika $I \neq \{0\}$ ideal pada Z yang berisi semua kelipatan dari a juga dibangun oleh a yaitu $\langle a \rangle = aZ$, maka Z disebut daerah ideal utama.

Tentang pemahaman konsep grup faktor pada grup, akan diperkenalkan ide ring faktor pada ring. Berikut ini definisi ring faktor secara lengkap.

Definisi 2.8 Ring Faktor

Jika N adalah ideal pada ring R. Himpunan $R/N = \{\beta + N \mid \beta \in R\}$ merupakan ring faktor R/N dengan operasi penjumlahan dan pergandaan koset

$$(\beta_1 + N) + (\beta_2 + N) = (\beta_1 + \beta_2 + N) \text{ dan}$$

$$(\beta_1 + N)\beta_2 + N) = (\beta_1\beta_2 + N) \text{ (Herstein, 1996).}$$

Contoh :

Diketahui $4Z$ merupakan ideal pada ring Z. Dapat dibentuk himpunan $Z/4Z = \{a + 4Z \mid a \in Z\}$ yang merupakan ring faktor.

Definisi 2.9 Ring Polinomial

Diberikan ring R. Himpunan $R[x] = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in R$ yang beranggotakan semua polinomial (suku banyak) dengan koefisien anggota ring R dalam variabel x yang merupakan ring polinomial dengan operasi penjumlahan dan pergandaan polinomial

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i . \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{i+j=k}^{n} (a_i b_j) x^k$$

(Herstein, 1996).

Contoh :

Himpunan $< Z[x],+, \bullet >$ dengan koefisien elemen ring Z adalah contoh ring polinomial dengan operasi penjumlahan dan pergandaan biasa.

Definisi 2.10 Nilpoten

Diberikan ring R dan $a \in R$ dikatakan nilpoten jika $a^n = 0$, untuk suatu $n \in Z^+$ (Herstein, 1996).

Contoh :

1. Diberikan ring $M_2(Z)$ dan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Karena $A^2 = 0$ maka A merupakan elemen nilpoten.
2. Diberikan ring Z_8 dan karena $\bar{2}^3 = \bar{4}^2 = \bar{6}^3 = \bar{0}$ maka $\{\bar{2}\},\{\bar{4}\},\{\bar{6}\}$ adalah elemen nilpoten tak nol pada Z_8.

Definisi 2.11 Ring *Reduced*

Suatu ring dikatakan ring *reduced* jika tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol (Herstein, 1996).

Contoh :

Ring Z_6 adalah ring *reduced* karena tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol.

Definisi 2.12 Ring Armendariz

Suatu ring R dikatakan ring Armendariz jika diberikan sebarang dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ dimana $a_i, b_j \in R$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i dan j.

Contoh :

Diketahui suatu ring $<Z_6,+,\bullet>$. Diberikan sebarang dua polinomial yang koefisiennya merupakan elemen ring Z_6.

Akan ditunjukkan ring Z_6 adalah Armendariz.

Bukti :

Diketahui ring Z_6. Diberikan sebarang

$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i$, $\bar{g}(x) = \sum_{j=0}^{m} \bar{b}_j x^j \in Z_6[x]$, dimana $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j \in Z_6$ untuk setiap i dan j.

Akan ditunjukkan jika $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ maka $\overline{a_i b_j} = \bar{0}$.

Diasumsikan $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow (\overline{a_0} + \overline{a_1}x + \overline{a_2}\, x^2 + \cdots + \overline{a_n}\, x^n)(\overline{b_0} + \overline{b_1}x + \overline{b_2}\, x^2 + \cdots + \overline{b_m}\, x^m) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow (\overline{a_0}\,\overline{b_0}) + (\overline{a_0}\,\overline{b_1} + \overline{a_1}\,\overline{b_0})x + \cdots + (\overline{a_0}\,\overline{b_m} + \overline{a_1}\,\overline{b_{m-1}} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{b_0})\, x^{n+m} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \overline{a_0 b_0} + (\overline{a_0 b_1 + a_1 b_0})x + \cdots + (\overline{a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_n b_0})\, x^{n+m} = \bar{0}.$

Akibatnya

$$\overline{a_0 b_0} = \bar{0} \tag{3.1}$$

$$\overline{a_0 b_1 + a_1 b_0} = \bar{0} \tag{3.2}$$

$\vdots$

dan seterusnya.

Dari persamaan (3.1) didapat bahwa $\overline{a_0 b_0} = \bar{0}$. Karena Z_6 merupakan ring *reduced* maka $\overline{b_0 a_0} = \bar{0}$. Selanjutnya perhatikan persamaan (3.2).

$$\begin{aligned}
\overline{a_0 b_1} + \overline{a_1 b_0} &= \bar{0} \\
\overline{b_0 a_0 b_1} + \overline{b_0 a_1 b_0} &= \bar{0} && (\text{dikali } \overline{b_0}) \\
\bar{0} + \overline{b_0 a_1 b_0} &= \bar{0} && (\overline{b_0 a_0} = \bar{0}) \\
\overline{b_0 a_1 b_0} &= \bar{0}.
\end{aligned}$$

Karena $(\overline{a_1 b_0})^2 = \overline{a_1 b_0 a_1 b_0} = \overline{a_1 0} = \bar{0}$, artinya $\overline{a_1 b_0}$ adalah elemen nilpoten. Karena Z_6 ring *reduced* maka $\overline{a_1 b_0} = \bar{0}$. Selanjutnya subtitusikan $\overline{a_1 b_0} = \bar{0}$ ke persamaan (3.2) sehingga diperoleh $\overline{a_0 b_1} = \bar{0}$.

Untuk persamaan selanjutnya, dengan langkah yang serupa sehingga didapat $\overline{a_i b_j} = \bar{0}$ untuk setiap *i* dan *j*. Oleh karena itu Z_6 merupakan ring Armendariz.