IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikaji beberapa karakteristik ring dan ring faktor serta suatu struktur ring yang mempunyai sifat Armendariz.

Teorema 4.1

Jika *R* adalah daerah ideal utama yang komutatif dan *A* ideal di *R* maka *R/A* merupakan ring Armendariz.

Bukti :

Diketahui *R* adalah daerah ideal utama yang komutatif dan *A* ideal di *R*. Misalkan $A = \langle x_0 \rangle$ yaitu ideal *A* yang dibangun oleh unsur x_0. Diberikan sebarang dua polinomial $\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i$, $\bar{g}(x) = \sum_{j=0}^{m} \bar{b}_j x^j \in R/A[x]$ dimana $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$ untuk setiap *i* dan *j* merupakan elemen ring faktor $R/A = \{\bar{a} = a + A \mid a \in R\}$. Akan ditunjukkan ring faktor *R/A* merupakan ring Armendariz dengan kata lain jika $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ maka $\overline{a_i b_j}$ $\bar{0}$.

Diasumsikan $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow (\overline{a_0} + \overline{a_1}x + \overline{a_2}\,x^2 + \cdots + \overline{a_n}\,x^n)(\overline{b_0} + \overline{b_1}x + \overline{b_2}\,x^2 + \cdots + \overline{b_m}\,x^m) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow (\overline{a_0}\,\overline{b_0}) + (\overline{a_0}\,\overline{b_1} + \overline{a_1}\,\overline{b_0})x + \cdots + (\overline{a_0}\,\overline{b_m} + \overline{a_1}\,\overline{b_{m-1}} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{b_0})\,x^{n+m} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow \overline{a_0b_0} + (\overline{a_0b_1 + a_1b_0})x + \cdots + (\overline{a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_nb_0})\,x^{n+m} = \bar{0}.$

Akibatnya

$$\overline{a_0b_0} = \bar{0} \tag{4.1}$$

$$\overline{a_0b_1 + a_1b_0} = \bar{0} \tag{4.2}$$

$$\overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \bar{0} \tag{4.3}$$

$$\vdots$$

dan seterusnya.

Dari persamaan (4.1) didapat bahwa $\overline{a_0b_0} = \bar{0}$ dapat ditulis $a_0b_0 + A = 0 + A$ dimana $a_0b_0 \in R$. Karena R daerah ideal utama, maka a_0 dapat dinyatakan sebagai $a_0 = x_0r_0 \in x_0R = A$ suatu elemen ideal utama yang dibangun oleh $x_0 \in A$ yang mengakibatkan

$a_0b_0 + A = 0 + A$

$(x_0r_0)b_0 + A = 0 + A$

$r_0x_0b_0 + A = 0 + A$ (R komutatif)

$r_0(x_0b_0) + A = 0 + A$.

Karena $x_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $x_0b_0 + A = 0 + A$. Dari persamaan (4.2) didapat bahwa $\overline{a_0b_1 + a_1b_0} = \bar{0}$ dapat ditulis

$$a_0b_1 + a_1b_0 + A = 0 + A \text{ dimana } a_0b_1 + a_1b_0 \in R.$$

$a_0b_1 + a_1b_0 + A = 0 + A$

$(x_0 + A)(a_0b_1 + a_1b_0 + A) = 0 + A$ (dikali $x_0 + A$)

$x_0(a_0b_1 + a_1b_0) + A = 0 + A$

$x_0a_0b_1 + x_0a_1b_0 + A = 0 + A$

$x_0a_0b_1 + a_1x_0b_0 + A = 0 + A$ (R komutatif)

$x_0a_0b_1 + 0 + A = 0 + A$ ($x_0b_0 + A = 0 + A$)

$x_0(a_0b_1) + A \quad = 0 + A.$

Karena $x_0, a_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $a_0b_1 + A = 0 + A$ dan $x_0b_1 + A = 0 + A$. Selanjutnya subtitusikan $a_0b_1 + A = 0 + A$ ke persamaan (4.2) dan diperoleh $a_1b_0 + A = 0 + A$. Sehingga terbukti $a_0b_1 + a_1b_0 + A = 0 + A$ dengan kata lain $\overline{a_0b_1 + a_1b_0} = \bar{0}$.

Dari persamaan (4.3) didapat bahwa $\overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \bar{0}$. Dapat ditulis $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A$ dimana $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \in R$.

$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A$	$= 0 + A$	
$(x_0 + A)(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A)$	$= 0 + A$	(dikali $x_0 + A$)
$x_0a_0b_2 + x_0a_1b_1 + x_0a_2b_0 + A$	$= 0 + A$	
$x_0a_0b_2 + a_1x_0b_1 + a_2x_0b_0 + A$	$= 0 + A$	(R komutatif)
$x_0a_0b_2 + a_1x_0b_1 + 0 + A$	$= 0 + A$	($x_0b_0 + A = 0 + A$)
$x_0a_0b_2 + 0 + 0 + A$	$= 0 + A$	($x_0b_1 + A = 0 + A$)
$x_0a_0b_2 + A$	$= 0 + A.$	

Karena $x_0, a_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $a_0b_2 + A = 0 + A$ dan $x_0b_2 + A = 0 + A$. Selanjutnya subtitusikan $a_0b_2 + A = 0 + A$ ke persamaan (4.3) sehingga diperoleh $a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A$. Karena R daerah ideal utama maka haruslah memenuhi sifat tertutup pada operasi penjumlahan, sehingga diperoleh $a_1b_1 + A = 0 + A$ dan $a_2b_0 + A = 0 + A$. Dengan kata lain terbukti

$$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A \text{ atau } \overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \bar{0}.$$

Berdasarkan persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dan dapat dilanjutkan dengan langkah yang serupa sehingga didapat $\overline{a_i b_j} = \bar{0}$ untuk setiap *i* dan *j*. Oleh karena itu *R/A* merupakan ring Armendariz. ■

Untuk selanjutnya akan diselidiki suatu struktur ring memenuhi sifat Armendariz namun dibuktikan terlebih dahulu bahwa struktur ring memenuhi aksioma-aksioma ring.

Lemma 4.2

Diberikan *R* ring dan didefinisikan dua operasi pada struktur ring $R \oplus R/A$ maka memenuhi aksioma-aksioma ring. Dua operasi biner didefinisikan sebagai berikut:

$$(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) = (a + b, \bar{u} + \bar{v}) \text{ dan } (a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) = ab,\overline{av + ub}.$$

Bukti :

Akan ditunjukkan $< R \oplus R/A, +, \bullet >$ ring.

1. Terhadap operasi +,

   (i) Tertutup, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}) \in R \oplus R/A$ berlaku

   $$(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) \in R \oplus R/A.$$

   Bukti :

   $(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) = (a + b, \bar{u} + \bar{v})$

   $= (a + b, \overline{u + v})$.

   Karena $a + b \in R$ dan $\overline{u + v} \in R/A$ maka $(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) \in R \oplus R/A$.

   (ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}),(c,\bar{w}) \in R \oplus R/A$ berlaku

   $$((a,\bar{u}) + (b,\bar{v})) + (c,\bar{w}) = (a,\bar{u}) + ((b,\bar{v}) + (c,\bar{w})).$$

Bukti :

$((a,\bar{u}) + (b,\bar{v})) + (c,\bar{w}) = (a + b,\bar{u} + \bar{v}) + (c,\bar{w})$

$= (a + b,\overline{u + v}) + (c,\bar{w})$

$= (a + b + c,\overline{u + v} + \bar{w})$

$= (a + b + c,\overline{u + v + w})$

$= (a + b + c,\bar{u} + \overline{v + w})$

$= (a,\bar{u}) + (b + c,\overline{v + w})$

$= (a,\bar{u}) + (b + c,\bar{v} + \bar{w})$

$= (a,\bar{u}) + ((b,\bar{v}) + (c,\bar{w}))$.

(iii) Mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat $(y,\bar{e}) \in R \oplus R/A$ sedemikian sehingga untuk setiap $(a,\bar{u}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$(y,\bar{e}) + (a,\bar{u}) = (a,\bar{u}) + (y,\bar{e}) = (a,\bar{u}).$$

Bukti :

Misalkan $(y,\bar{e})$ elemen identitas untuk + dari $R \oplus R/A$, maka :

$\Leftrightarrow (y,\bar{e}) + (a,\bar{u}) = (a,\bar{u})$

$\Leftrightarrow (y+a,\bar{e} + \bar{u}) = (a,\bar{u})$

$\Leftrightarrow (y+a,\overline{e + u}) - (a,\bar{u}) = (a,\bar{u}) - (a,\bar{u})$

$\Leftrightarrow (y+a-a,\overline{e + u - u}) - (a,\bar{u}) = (0,\bar{0})$

$\Leftrightarrow (y,\bar{e}) = (0,\bar{0})$.

Oleh karena itu $(y,\bar{e}) = (0,\bar{0})$ merupakan elemen identitas untuk + dari $R \oplus R/A$.

(iv) Setiap elemen dari $R \oplus R/A$ mempunyai invers, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}) \in R \oplus R/A$ terdapat $(x,\bar{d}) \in R \oplus R/A$ sedemikian sehingga

$$(a,\bar{u}) + (x,\bar{d}) = (x,\bar{d}) + (a,\bar{u}) = (0,\bar{0}).$$

Bukti :

$\Leftrightarrow (a,\bar{u}) + (x,\bar{d}) = (0,\bar{0})$

$\Leftrightarrow (a + x,\bar{u} + \bar{d}) = (0,\bar{0})$

$\Leftrightarrow (a + x,\bar{u} + \bar{d}) - (a,\bar{u}) = (0,\bar{0}) - (a,\bar{u})$

$\Leftrightarrow (a + x - a,\bar{u} + \bar{d} - \bar{u}) = (-a,-\bar{u})$

$\Leftrightarrow (x,\bar{d}) = (-a,-\bar{u})$.

Jadi $(x,\bar{d}) = (-a,-\bar{u})$ merupakan invers untuk setiap $(a,\bar{u}) \in R \oplus R/A$.

(v) Komutatif, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) = (b,\bar{v}) + (a,\bar{u}).$$

Bukti :

$$\begin{aligned}(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) &= a + b, \bar{u}\bar{v} \\ &= a + b, \overline{uv} \\ &= b + a, \bar{v}\bar{u} \\ &= (b,\bar{v}) + (a,\bar{u}).\end{aligned}$$

2. Terhadap operasi •,

(i) Tertutup, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$(a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) \in R \oplus R/A.$$

Bukti :

$(a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) = ab,\overline{av + ub}$.

Karena $ab \in R$ dan $\overline{av + ub} \in R/A$ maka $(a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) \in R \oplus R/A$.

(ii) Asosiatif, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}),(c,\bar{w}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$((a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v})) \bullet (c,\bar{w}) = (a,\bar{u}) \bullet ((b,\bar{v}) \bullet (c,\bar{w})).$$

Bukti :

$((a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v})) \bullet (c,\bar{w}) = (ab,\overline{av + ub}) \bullet (c,\bar{w})$

$= abc,\overline{abw + (av + ub)c}$

$= abc,\overline{abw + avc + ubc}$

$= abc,\overline{a(bw + vc) + ubc}$

$= (a,\bar{u}) \bullet (bc, \overline{bw + vc})$

$= (a,\bar{u}) \bullet ((b,\bar{v}) \bullet (c,\bar{w}))$.

3. Pada operasi $+$ dan $\bullet$,

(i) Distribusi kanan, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}),(b,\bar{v}),(c,\bar{w}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$(a,\bar{u}) \bullet ((b,\bar{v}) + (c,\bar{w})) = (a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) + (a,\bar{u}) \bullet (c,\bar{w}).$$

Bukti :

$(a,\bar{u}) \bullet ((b,\bar{v}) + (c,\bar{w})) = (a,\bar{u}) \bullet (b+c,\bar{v}\bar{w})$

$= (a,\bar{u}) \bullet (b+c,\overline{v + w})$

$= a(b+c),\overline{a(v + w) + u(b + c)}$

$= ab+ac,\overline{av + aw + ub + uc}$

$= ab+ac,\overline{av + ub + aw + uc}$

$= ab+ac,\overline{av + ub} + \overline{aw + uc}$

$= (ab,\overline{av + ub}) + (ac,\overline{aw + uc})$

$= (a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) + (a,\bar{u}) \bullet (c,\bar{w})$.

(ii) Distribusi kiri, yaitu untuk setiap $(a,\bar{u}), (b,\bar{v}), (c,\bar{w}) \in R \oplus R/A$ berlaku

$$((a,\bar{u}) + (b,\bar{v})) \bullet (c,\bar{w}) = (a,\bar{u}) \bullet (c,\bar{w}) + (b,\bar{v}) \bullet (c,\bar{w}).$$

Bukti :

$((a,\bar{u}) + (b,\bar{v})) \bullet (c,\bar{w}) = (a+b,\bar{u}+\bar{v}) \bullet (c,\bar{w})$

$= (a+b,\overline{u + v}) \bullet (c,\bar{w})$

$= (a+b)c,\overline{(a + b)w + (u + v)c}$

$= ac+bc,\overline{aw + bw + uc + vc}$

$= ac+bc,\overline{aw + uc + bw + vc}$

$= ac+bc,\overline{aw + uc} + \overline{bw + vc}$

$= (ac,\overline{aw + uc}) + (bc,\overline{bw + vc}$

$= (a,\bar{u}) \bullet (c,\bar{w}) + (b,\bar{v}) \bullet (c,\bar{w})$.

Dari aksioma diatas maka terbukti < $R \oplus R/A$, +, • > ring. ■

Berikut ini akan disajikan teorema suatu struktur ring yang memenuhi sifat Armendariz.

Teorema 4.3

Diketahui R daerah integral. Jika A ideal di R dan ring faktor R/A merupakan Armendariz maka ring $R \oplus R/A$ adalah Armendariz.

Bukti :

Diketahui R adalah daerah integral dengan A ideal di R dan ring R/A merupakan Armendariz. Diberikan sebarang dua polinomial yang koefisiennya merupakan elemen ring $R \oplus R/A = \{(a, \bar{u}) \mid a \in R$ dan $\bar{u} \in R/A\}$. Diberikan sebarang

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i, \bar{u}_i)x^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^{m}\left(b_j, \bar{v}_j\right)x^j \in (R \oplus R/A)[x] \text{ , dimana}$$

$$(a_i, \bar{u}_i), \left(b_j, \bar{v}_j\right) \in R \oplus R/A \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j.$$

Akan ditunjukkan ring $R \oplus R/A$ adalah Armendariz dengan kata lain jika $f(x)g(x) = (0,\bar{0}) = 0$ maka $(a_i, \bar{u}_i)\left(b_j, \bar{v}_j\right) = (a_i b_j,\overline{a_\iota v_J + u_\iota b_J}) = 0$.

Selanjutnya untuk mempermudah pembuktian, digunakan notasi sebagai berikut :

$$f(x) = (f_0(x), \overline{f_1}(x)) \text{ dan } g(x) = (g_0(x), \overline{g_1}(x)).$$

Diasumsikan $f(x)g(x) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0, \bar{u}_0) + (a_1, \bar{u}_1)x + (a_2, \bar{u}_2)x^2 + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)x^n)((b_0, \bar{v}_0) + (b_1, \bar{v}_1)x$

$+ (b_2, \bar{v}_2)x^2 + \cdots + (b_m, \bar{v}_m)\, x^m) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0, \bar{u}_0)(b_0, \bar{v}_0)) + ((a_0, \bar{u}_0)(b_1, \bar{v}_1) + (a_1, \bar{u}_1)(b_0, \bar{v}_0))x + \cdots +$

$((a_0, \bar{u}_0)(b_m, \bar{v}_m + (a_1, \bar{u}_1)(b_{m-1}, \bar{v}_{m-1}) + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)(b_0, \bar{v}_0))\, x^{n+m} = 0$

$\Leftrightarrow (a_0b_0, \overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + ((a_0b_1, \overline{a_0v_1 + u_0b_1}) + (a_1b_0, \overline{a_1v_0 + u_1b_0}))x\ldots\ldots. = 0$

$\Leftrightarrow (a_0b_0, \overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + (a_0b_1 + a_1b_0, \overline{a_0v_1 + u_0b_1 + a_1v_0 + u_1b_0})x\ldots\ldots.. = 0$

$\Leftrightarrow a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots, \overline{a_0v_0 + u_0b_0} + (\overline{a_1v_0 + u_1b_0 + a_1v_0 + u_1b_0})x$

$+ \cdots = 0$

$\Leftrightarrow f_0(x)g_0(x), \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0.$

Akibatnya

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{4.4}$$

$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}. \tag{4.5}$$

Karena R adalah daerah integral maka terdapat dua kemungkinan, yaitu :

a) $f_0(x) = 0$,

Jika $f_0(x) = 0$, maka dari persamaan (4.5) diperoleh :

$$\begin{aligned}
\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\
\overline{0g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\
\overline{0 \qquad + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\
\overline{f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0}.
\end{aligned}$$

Karena *R/A* adalah Armendariz, $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$ berakibat $\overline{u_ib_j} = \bar{0}$ untuk setiap *i* dan *j* dan $f_0(x) = 0$ berakibat $a_i = 0$ untuk setiap *i*. Selanjutnya dapat disimpulkan sebagai berikut :

$(a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j)$ = $(a_i b_j, \overline{a_\iota v_J + u_\iota b_J})$

= $(0b_j, \overline{0v_J + 0})$

= $(0, \bar{0})$

= *0.*

b) $g_0(x)$ = 0,

Jika $g_0(x)$ = 0, maka dari persamaan (4.5) diperoleh :

$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)}$ = $\bar{0}$

$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)0}$ = $\bar{0}$

$\overline{f_0(x)g_1(x) + 0}$ = $\bar{0}$

$\overline{f_0(x)g_1(x)}$ = $\bar{0}$.

Karena *R/A* adalah Armendariz, $\overline{f_0(x)g_1(x)} = \bar{0}$ berakibat $\overline{a_\iota v_J} = \bar{0}$ untuk setiap *i* dan *j* dan $g_0(x) = 0$ berakibat $b_j = 0$ untuk setiap *j*. Selanjutnya dapat disimpulkan sebagai berikut :

$(a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j)$ = $(a_i b_j, \overline{a_\iota v_J + u_\iota b_J})$

= $(a_i 0, \overline{0 + u_\iota 0})$

= $(0, \bar{0})$

= *0.*

Dari *a*) dan *b*) terbukti bahwa $(a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j) = (a_i b_j, \overline{a_\iota v_J + u_\iota b_J}) = 0$ untuk setiap *i* dan *j*. Oleh karena itu ring *R* ⊕ *R/A* merupakan ring Armendariz. ■

Pada Teorema 4.3, bahwa jika *R* daerah integral dengan *A* ideal di *R* dan ring *R/A* merupakan Armendariz maka ring *R* ⊕ *R/A* merupakan ring Armendariz.

Pembahasan selanjutnya akan dikaji karakterisasi ring *reduced* pada suatu struktur ring yang juga mempunyai sifat Armendariz.

Berikut ini akan disajikan terlebih dahulu beberapa lemma yang mendukung.

Lemma 4.4

Diketahui ring R *reduced.* Untuk setiap $a,b \in R$, $ab = 0$ jika dan hanya jika $ba = 0$.

bukti :

($\Rightarrow$) Diberikan R merupakan ring *reduced*. Diambil sebarang $a,b \in R$ dengan $ab = 0$. Akan ditunjukkan $ba = 0$. Andaikan $ba \neq 0$, karena R ring *reduced* maka ba bukan elemen nilpoten yang artinya $(ba)^n \neq 0$ untuk suatu n. Ambil $n = 2$ sehingga diperoleh $(ba)^2 = baba \neq 0$. Diketahui bahwa $ab = 0$ sehingga $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ yang berarti ba merupakan elemen nilpoten. Hal ini kontradiksi dengan $ba \neq 0$. Sehingga haruslah $ba = 0$.

($\Leftarrow$) Diberikan R merupakan ring *reduced*. Diambil sebarang $a,b \in R$ dengan $ba = 0$. Akan ditunjukkan $ab = 0$. Andaikan $ab \neq 0$, karena R ring *reduced* maka ab bukan elemen nilpoten yang artinya $(ab)^n \neq 0$ untuk suatu n. Ambil $n = 2$ sehingga diperoleh $(ab)^2 = abab \neq 0$. Diketahui bahwa $ba = 0$ sehingga $(ab)^2 = abab = a0b = 0$ yang berarti ab merupakan elemen nilpoten. Hal ini kontradiksi dengan $ab \neq 0$. Sehingga, haruslah $ab = 0$. ■

Lemma 4.5

Jika R ring *reduced* maka R ring Armendariz.

Bukti :

Diketahui R ring *reduced*. Diberikan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$, dimana a_i, $b_j \in R$ untuk setiap i dan j.

Akan ditunjukkan jika $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$.

Diasumsikan $f(x)g(x) = 0$

$$(a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n)(b_0 + b_1 x + b_2\, x^2 + \cdots + b_m\, x^m) = 0$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + \; a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_m + \; a_1 b_{m-1} + \cdots .. + a_n b_0)\, x^{n+m} = 0.$$

Akibatnya

$$a_0 b_0 = 0 \tag{4.6}$$

$$a_0 b_1 + \; a_1 b_0 = 0 \tag{4.7}$$

$\vdots$

dan seterusnya.

Dari persamaan (4.6) didapat bahwa $a_0 b_0 = 0$. Karena R merupakan ring reduced, maka $b_0 a_0 = 0$. Selanjutnya perhatikan persamaan (4.7).

$$\begin{aligned} a_0 b_1 \;+\; a_1 b_0 &= 0 && \text{(dikali } b_0\text{)} \\ b_0 a_0 b_1 + b_0 a_1 b_0 &= 0 && (b_0 a_0 = 0) \\ 0 \;+ b_0 a_1 b_0 &= 0 \\ b_0 a_1 b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Karena $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = a_1 0 = 0$, artinya $a_1 b_0$ adalah elemen nilpoten. Karena R ring *reduced* maka $a_1 b_0 = 0$. Selanjutnya subtitusikan $a_1 b_0 = 0$ ke persamaan (4.7) sehingga diperoleh $a_0 b_1 = 0$. Untuk persamaan selanjutnya dengan langkah yang serupa sehingga didapat $a_i b_j = 0$ untuk setiap i dan j. Oleh karena itu R merupakan ring Armendariz. ■

Pada Lemma 4.5, tidak berlaku sebaliknya. Dengan kata lain jika diketahui *R* ring Armendariz maka belum tentu *R* ring *reduced.* Ring faktor *Z/nZ* merupakan contoh ring Armendariz tetapi bukan ring *reduced.*

Lemma 4.6

Jika *R* ring *reduced* maka *R*[*x*] ring *reduced*.

Bukti :

Diketahui *R* ring *reduced* dengan kata lain berlaku $a^n = 0$ untuk suatu $n \in Z^+$ maka $a = 0$. Diberikan sebarang $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *R*[*x*] dimana $a_i \in R$ untuk setiap *i*.

Akan ditunjukkan jika $\{f(x)\}^n = 0$ maka $f(x) = 0$ dengan kata lain $a_i = 0$.

$$\{f(x)\}^n = \left\{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right\}^n$$

$$\Leftrightarrow \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_m x^m\}^n$$

$$\Leftrightarrow a_0{}^n + (ma_0a_1)x + \cdots + a_m{}^n x^{m+m}$$

$$\Leftrightarrow 0^n + 0x + \cdots + 0x^{m+m}$$

$$\Leftrightarrow 0.$$

Karena *R* ring *reduced* maka $a_0{}^n = a_1{}^{n-1} = \cdots = a_m{}^n = 0$ untuk suatu $n \in Z^+$ sehingga berakibat $a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$. Dengan kata lain terbukti $a_i = 0$. ■

Teorema 4.7

Jika *R* ring *reduced* dengan *A* ideal di *R* dan ring faktor *R/A* ring *reduced*, maka ring $R \oplus R/A = \{(a, \bar{u}) \mid a \in R$ dan $\bar{u} \in R/A\}$ merupakan Armendariz.

Bukti :

Diketahui *R* ring *reduced* dengan *A* ideal di R dan ring R/*A* juga ring *reduced.* diberikan sebarang $f(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i, \bar{u}_i)x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m}(b_j, \bar{v}_j)x^j \in (R \oplus R/A)[x]$, dimana $(a_i, \bar{u}_i), (b_j, \bar{v}_j) \in R \oplus R/A$ untuk setiap *i* dan *j*.

Akan ditunjukkan jika $f(x)g(x) = 0$ maka $(a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j) = (a_i b_j, \overline{a_\iota v_j + u_\iota b_j}) = 0.$

Selanjutnya untuk mempermudah pembuktian, digunakan notasi sebagai berikut :

$$f(x) = (f_0(x), \overline{f_1}(x)) \text{ dan } g(x) = (g_0(x), \overline{g_1}(x)).$$

Diasumsikan $f(x)g(x) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0, \bar{u}_0) + (a_1, \bar{u}_1)x + (a_2, \bar{u}_2)x^2 + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)x^n)((b_0, \bar{v}_0) + (b_1, \bar{v}_1)x$
$+ (b_2, \bar{v}_2)x^2 + \cdots + (b_m, \bar{v}_m)\, x^m) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0, \bar{u}_0)(b_0, \bar{v}_0)) + ((a_0, \bar{u}_0)(b_1, \bar{v}_1) + (a_1, \bar{u}_1)(b_0, \bar{v}_0))x + \cdots +$
$((a_0, \bar{u}_0)(b_m, \bar{v}_m + (a_1, \bar{u}_1)(b_{m-1}, \bar{v}_{m-1}) + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)(b_0, \bar{v}_0))\, x^{n+m} = 0$

$\Leftrightarrow (a_0 b_0, \overline{a_0 v_0 + u_0 b_0}) + ((a_0 b_1, \overline{a_0 v_1 + u_0 b_1}) + (a_1 b_0, \overline{a_1 v_0 + u_1 b_0}))x....... = 0$

$\Leftrightarrow (a_0 b_0, \overline{a_0 v_0 + u_0 b_0}) + (a_0 b_1 + a_1 b_0, \overline{a_0 v_1 + u_0 b_1 + a_1 v_0 + u_1 b_0})x........ = 0$

$\Leftrightarrow a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots, \overline{a_0 v_0 + u_0 b_0} + (\overline{a_1 v_0 + u_1 b_0 + a_1 v_0 + u_1 b_0})x$
$+ \cdots = 0$

$\Leftrightarrow f_0(x)g_0(x), \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0.$

Akibatnya

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \tag{4.8}$$

$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}. \tag{4.9}$$

Karena *R* ring *reduced* maka persamaan (4.8) berakibat $g_0(x)f_0(x) = 0$. Pada persamaan (4.9)

$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0$ (dikali $\overline{g_0(x)}$)

$$\overline{g_0(x)f_0(x)g_1(x) + g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$$

$$\bar{0} + \overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0} \qquad (g_0(x)f_0(x) = 0)$$

$$\overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}.$$

Karena $(\overline{f_1(x)g_0(x)})^2 = \overline{f_1(x)g_0(x)f_1(x)g_0(x)}$

$$= \overline{f_1(x)}.\,\bar{0} \qquad (\overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0})$$

$$= \bar{0},$$

artinya $\overline{f_1(x)g_0(x)}$ adalah elemen nilpoten dan *R/A*[*x*] adalah ring *reduced* maka diperoleh $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$. Selanjutnya subtitusikan $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$ ke persamaan(4.9) sehingga diperoleh $\overline{f_0(x)g_1(x)} = \bar{0}$. Karena *R* Armendariz maka persamaan (4.8) dan (4.9) menghasilkan $(a_i,\bar{u}_i)(b_j,\bar{v}_j) = (a_ib_j,\overline{a_iv_j + u_ib_j}) = 0$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $R \oplus R/A$ merupakan ring Armendariz. ■

Berdasarkan Teorema 4.7, struktur ring $R \oplus R$ merupakan ring Armendariz jika diambil $A = 0$. Berikut ini diberikan akibatnya secara lengkap.

Akibat 4.8

Diketahui *R* ring *reduced*. Jika sebarang dua polinomial yang koefisiennya merupakan elemen ring $R \oplus R = \{(a,u) \mid a,u \in R\}$, maka struktur ring $R \oplus R$ merupakan Armendariz.