II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi mengenai teori graf, grup permutasi, automorfisma dan algoritma yang mendukung proses penelitian.

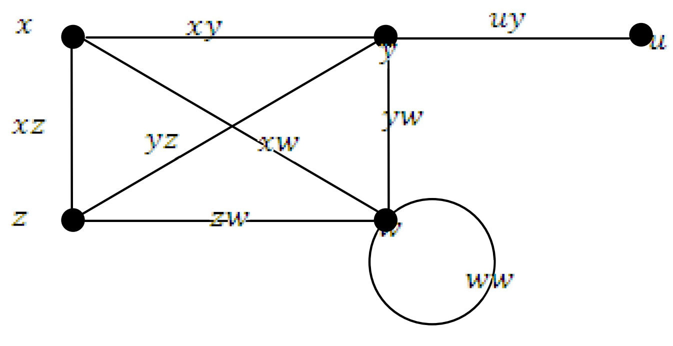
Definisi 2.1 Graf

Suatu graf X terdiri dari himpunan *vertex* $V(X)$ dan *edge* $E(X)$, dimana suatu *edge* adalah pasangan tak berurut dari *vertex-vertex* yang berbeda di X (Godsil and Royle, 2000).

Selanjutnya dalam penelitian ini, suatu *edge* dinotasikan oleh xy dengan $x, y \in V(X)$. Jika xy suatu *edge*, maka x dan y dikatakan *adjacent* dan dinotasikan dengan $x{\sim}y$. Jika suatu *vertex* terhubung langsung dengan suatu *edge* maka *edge* tersebut dikatakan *incident* dengan *vertex* tersebut.

Contoh 2.1

Graf X dengan $V(X) = \{x, y, z, w, u\}$ dan $E(X) = \{xy, xz, yz, xw, yw, uy, ww\}$.



Gambar 1. Graf dengan 5 *vertex* dan 9 *edge*

Definisi 2.2 Derajat *Vertex*

Derajat dari *vertex* v di graf G dinotasikan dengan $deg\ (v)$, yaitu banyaknya *edge* di G yang *incident* dengan *vertex* v (Deo,1989).

Vertex yang berderajat genap sering disebut *vertex* genap (*even vertex*) dan *vertex* yang berderajat ganjil (*odd vertex*). *Vertex* yang berderajat nol disebut *isolated vertex* dan *vertex* yang berderajat satu disebut *vertex* ujung (*end vertex*).

Contoh 2.2

Pada Gambar 1 diperoleh derajat *vertex*-*vertex*nya:

$\deg(x) = 3$

$\deg(y) = 4$

$\deg(z) = 3$

$\deg(u) = 1$

$\deg(w) = 5$

Vertex $x, z, u,$ dan w adalah *vertex* yang berderajat ganjil sedangkan y adalah *vertex* genap. Karena u derajatnya satu maka u merupakan *vertex* ujung.

Definisi 2.3 Graf dengan *vertex* prima dan Graf dengan *vertex* pq

Suatu graf X dengan *vertex* prima adalah suatu graf yang jumlah *vertex*-*vertex*nya merupakan bilangan prima. Sedangkan suatu graf dengan *vertex* pq adalah suatu graf yang jumlah *vertex*-*vertex*nya merupakan perkalian dari bilangan p dan q dimana p dan q bilangan prima (Deo, 1989).

Contoh 2.3

Graf lengkap K_2, K_3, K_5, K_7, dan K_{11} merupakan graf dengan *vertex* prima, dan Graf lengkap K_{15} merupakan graf dengan *vertex* pq dimana $p = 3$ dan $q = 5$ atau sebaliknya.

Pemahaman tentang grup permutasi akan dibahas pada definisi berikut ini.

Definisi 2.4 Operasi Biner

Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah suatu aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in SxS$ dengan tepat satu elemen di S. (Wallace, 1998).

Contoh 2.4 :

Penjumlahan biasa "+" pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah operasi biner.

Berikut ini adalah definisi dari grup, yang sangat erat hubunganya dengan suatu operasi biner.

Definisi 2.5 Grup

Grup $(G,*)$ adalah himpunan G, dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G, sehingga $*$ memenuhi aksioma – aksioma berikut :

1. $*$ bersifat asosiatif , yakni untuk sembarang $a, b, c \in G$

$a * (b * c) = (a * b) * c$

2. $\exists\ e \in G\ \ni e * x = x * e = x, \forall\ x \in G.$

   $Elemen\ e$ disebut elemen identitas.

3. $\forall\ a \in G, \exists\ a' \in G \ni a' * a = a * a' = e.$

   Elemen a' disebut elemen invers (Fraleigh, 1981).

Contoh 2.5

Himpunan bilangan bulat Z terhadap operasi penjumlahan biasa membentuk grup dengan elemen identitas 0 dan untuk setiap $n \epsilon Z$ mempunyai invers $-n \epsilon Z$.

Definisi 2.6 Orde dari Grup

Jika A adalah Grup berhingga, maka orde $|A|$ dari grup A adalah banyaknya elemen di A (Fraleigh, 1981).

Definisi 2.7 Subgrup

Misalkan $(G, \circ)$ suatu grup dan H himpunan bagian dari G, apabila $(H, \circ)$ suatu grup, maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G (Fraleigh, 1981).

Contoh 2.6

$2Z$ adalah subgrup dari grup bilangan bulat Z terhadap operasi penjumlahan biasa.

Definisi 2.8 Koset

Misalkan G adalah grup dan H subgrup dari G. Untuk semua $a \in G$, himpunan $aH = \{ah : a \in G\}$ disebut koset kiri dari H yang ditentukan oleh a, dan himpunan $Ha = \{ha : a \in G\}$ disebut koset kanan dari H yang ditentukan oleh a untuk semua $h \in H$ (Fraleigh, 1981).

Contoh 2.7

Pada grup modulo $(Z_4, +)$, $H = \{0,2\}$ merupakan subgrup dari Z_4. Semua koset kiri dari H adalah

$0 + H = \{0 + 0, 0 + 2\} = \{0,2\}$

$1 + H = \{1 + 0, 1 + 2\} = \{1,3\}$

$2 + H = \{2 + 0, 2 + 2\} = \{2,0\}$

$3 + H = \{3 + 0, 3 + 2\} = \{3,1\}$

Sehingga $H = 0 + H = 2 + H$ dan $1 + H = 3 + H$

Selanjutnya dipelajari definisi dari permutasi dan grup permutasi.

Definisi 2.9 Permutasi

Permutasi himpunan A adalah fungsi bijektif dari suatu himpunan A ke dirinya sendiri (Fraleigh, 1981).

Secara umum jika $A = \{1,2, \dots, n\}$, maka banyaknya permutasi A adalah $n!$ unsur.

Definisi 2.10 Grup Permutasi

Misalkan A suatu himpunan tak kosong, grup dari semua permutasi atas A dengan operasi komposisi disebut grup simetrik di A dan dinotasikan $Sym(A)$ atau $Sym(n)$ jika $|A| = n$. Himpunan $Sym(A)$ terhadap operasi komposisi membentuk suatu grup, yang disebut grup simetrik dan dinotasikan dengan S_n. Subgrup dari $Sym(A)$ dinamakan grup permutasi di A (Godsil, 2000).

Contoh 2.8

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $Sym(A) = \{(1)\ (2)\ (3), (23), (132), (13), (12), (123)\}$

Jika himpunan $G \leq Sym(A)$ maka dengan operasi komposisi $(G, \circ)$ merupakan grup permutasi.

Berikut ini akan disajikan definisi mengenai isomorfisma dan automorfisma pada graf yang membentuk suatu grup automorfisma.

Definisi 2.11 Grup Automorfisma

Himpunan semua automorfisma dari graf X membentuk grup automorfisma dinotasikan $Aut(X)$ (Morris, 2000).

Grup automorfisma yang hanya terdiri dari permutasi identitas disebut grup automorfisma trivial. Jika ada permutasi selain permutasi identitas maka dikatakan grup automorfisma nontrivial.

Definisi 2.12 Isomorfisma Graf

Dua graf $X = (V, E)$ dan $Y = (V', E')$ dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan bijektif φ dari himpunan *vertex* V ke V' sedemikian $(u, v) \in E$ jika dan hanya jika $(u', v') \in E'$. Sehingga pemetaan φ isomorfis dengan notasi $(X \cong Y)$. (Godsil and Royle, 2000)

Definisi 2.13 Automorfisma Graf

Suatu isomorfisma dari graf X terhadap dirinya sendiri $(\pi : X \rightarrow X)$ disebut sebagai automorfisma graf X (Godsil and Royle, 2000).

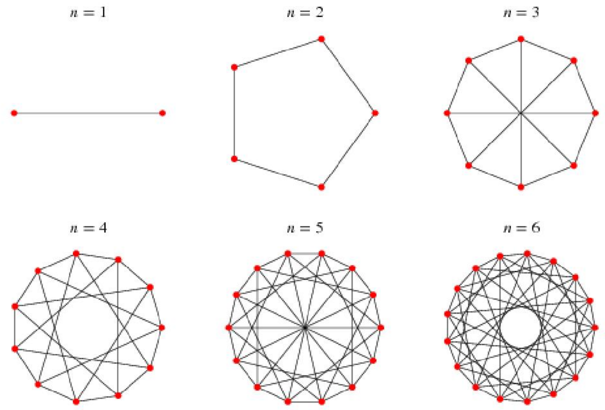
Untuk mengetahui bentuk grup automorfisma pada graf *circulant* maka dijelaskan pada definisi berikut ini.

Definisi 2.14 Graf *Circulant*

Suatu graf *circulant* $X(n;S)$ yaitu suatu graf dimana *vertex-vertex*nya diberi label $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, dengan dua *vertex* i dan j *adjacent* jika dan hanya jika $i - j \pmod n \in S$, dimana $S \subset Z_n$ dengan $S = -S$ dan $0 \notin S$ (Morris, 2000).

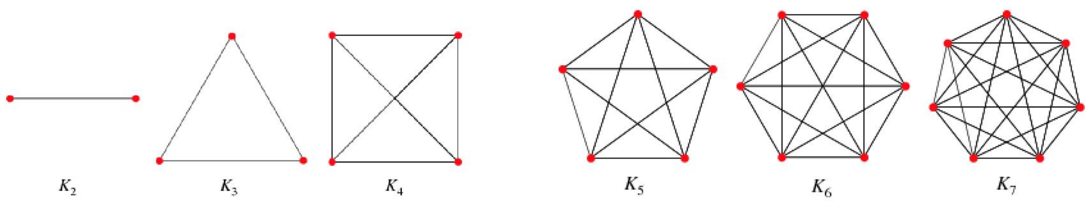
Graf *circulant* terbagi menjadi beberapa *class* yang berisi berikut ini:

1. Graf *Andrasfai*,



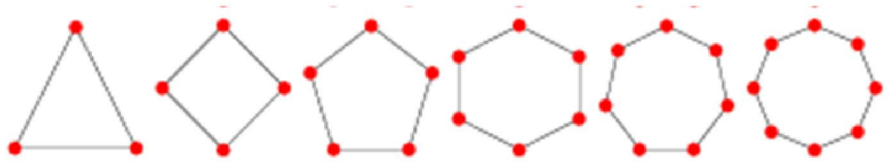
Gambar 2. Graf *Andrasfai*

2. Graf Lengkap,



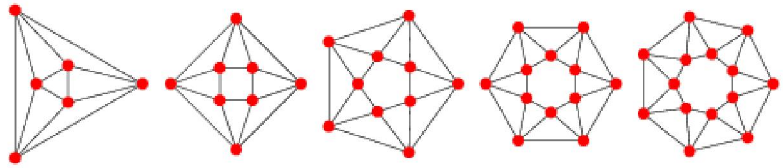
Gambar 3. Graf Lengkap

3. Graf *Cycle*,



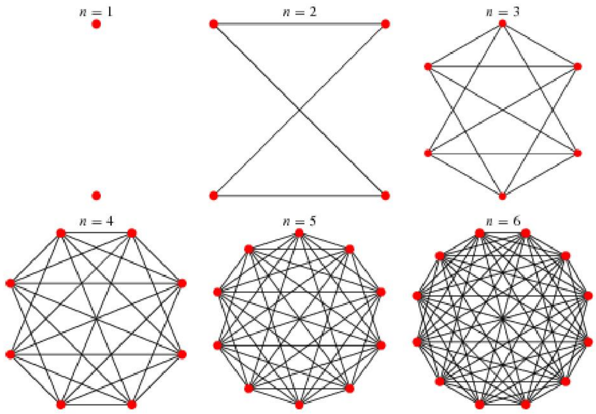
Gambar 4. Graf *Cycle*

4. Graf Antiprisma,



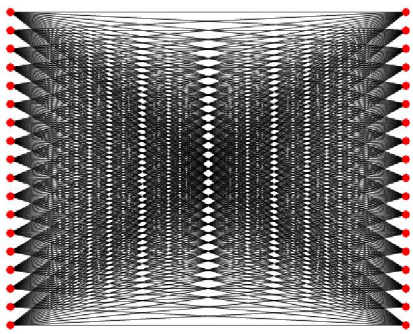
Gambar 5. Graf Antiprisma

5. Graf *Cocktail party*,



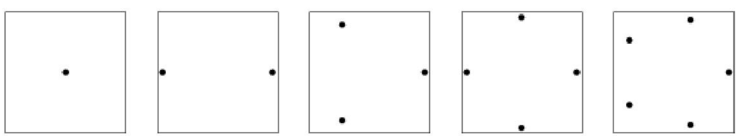
Gambar 6. Graf *Cocktail party*

6. Graf Bipartit lengkap,



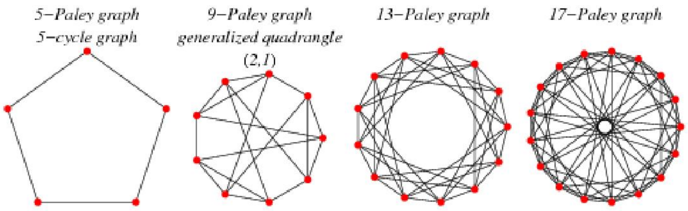
Gambar 7. Graf Bipartit lengkap

7. Graf null,



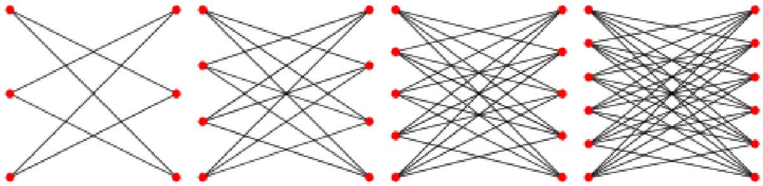
Gambar 8. Graf null

8. Graf *Paley* dengan orde prima,



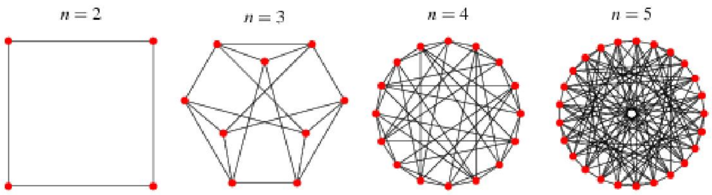
Gambar 9. Graf *Paley* dengan orde prima

9. Graf *Crown* $2n - 1$,



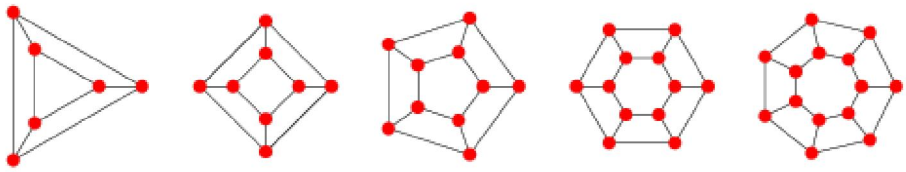
Gambar 10. Graf *Crown* $2n - 1$

10. Graf *Lattice*,



Gambar 11. Graf *Lattice*

11. Graf Prisma.



Gambar 12. Graf Prisma

Definisi 2.15 Algoritma

Algoritma merupakan suatu urutan langkah – langkah logis yang disusun secara sistematis dan logis untuk menyelesaian masalah dan dapat dieksekusi (Deo, 1989).