II. TINJAUAN PUSATAKA

2.1 Operator

Definisi 2.1.1 (Kreyszig, 1989)

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator.

Definisi 2.1.2 (Kreyszig, 1989)

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay.

Definisi 2.1.3 (Kreyszig, 1989)

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operaror A : X → Y dikatakan terbatas jika ada bilangan M ∈ R dengan M ≥ 0 sehingga untuk setiap x ∈ X berlaku $\|Ax\| \geq M\|x\|$.
b. Operator A dikatakan kontinu di x ∈ X jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap y ∈ X dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.

c. Jika A kontinu di setiap x $\in$ X, A disebut kontinu pada X.

Teorema 2.1.1 (Ruckle, 1991)

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas *field* yang sama maka l_c(X, Y) merupakan ruang *linear*.

Bukti :

Diambil sebarang $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}_\mathrm{c}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dan sebarang α, β, a, b untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ diperoleh

$$(\alpha A + \beta B)(ax + by) = \alpha A(ax + by) + \beta B(ax + by)$$

$$= \alpha Aax + \alpha Aby + \beta Bax + \beta Bby$$

$$= \alpha aAx\ \alpha bAy + \beta aBx + \beta bBy$$

$$= \alpha aAx + a\beta Bx + b\alpha Ay + b\beta By$$

$$= a(\alpha A + \beta B)x + b(\alpha A + \beta B)y$$

Jadi, $(\alpha A + \beta B)$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real M_1, $M_2 \geq 0$ sehingga,

$$\|(\alpha A + \beta B)x\| = \|\alpha Ax + \beta Bx\|$$

$$\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\|$$

$$= |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\|$$

$$\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|$$

$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$

Dengan demikian, $\alpha A + \beta B$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Jadi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ linear.

Teorema 2.1.2 (Maddox, 1970)

Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang Banach.

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal, untuk setiap $x \in X$ dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$

$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilh bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \| x \| < \varepsilon$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen ke $y_x \in Y$.

Jadi, $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $A_x = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$. Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $A_z = y_z$.

Untuk setiap skalar a dan b, diperoleh $ax + bz \in X$,

$\lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$ dan $ax + bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A \quad (ax + bz) = y_{ax+bz}$.

Jadi $A(ax + bz) = lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz)$

$$= \lim_{n\to\infty}(aA_n x + bA_n z)$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x + \lim_{n\to\infty} bA_n z$$

$$= a \lim_{n\to\infty} A_n x + b \lim_{n\to\infty} A_n z$$

$$= ay_x + by_z$$

$$= aAx + bAz$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - Ax \quad \|$

$$= \|(A_m x - Ax)\|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0 \|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena A_m dan $A_m - A$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \mathcal{L}_c((\mathrm{X},\mathrm{Y}), \|.\|)$ dengan kata lain $\mathcal{L}_c((\mathrm{X},\mathrm{Y}), \|.\|)$ ruang Banach.

Definisi 2.1.4 (Kreyszig, 1989)

Diberikan ruang Bernorm X dengan *field* ℝ.

a. Pemetaan $f: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi *linear* kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis $X^* \in l_c(X, Y)$.

Teorema 2.1.3 (Ruckle, 1991)

Misal X dan Y ruang BK (Banach lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu.

Bukti :

Misal A = (a_{ij})

X = $(x_j) \in X$

y = $(y_i) \in Y$ dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. Jelas bahwa untuk setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$

$$(i)\ f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} s_j + a_{ij} t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s_j + t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)(f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (a_{xj})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\left(a_{ij} x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

$$= a(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti f_m merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$$f_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j^{(n)}$$

Atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$A(x)_i \, , \forall_i$$

Jika $y = Ax$ maka bukti lengkap

Definisi 2.1.5 (Berberian, 1996)

a. Matriks takhingga $A = (a_{ij})$ adalah matriks dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak takhingga.

b. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-masing matriks takhingga dan α skalar maka $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)$, dan $AB = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj})$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \in R$. (Cooke, 1955)

Definisi 2.1.6 (Fuhrmann, 1987)

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1, H_2)$ maka $T^* \in B(H_1, H_2)$ disebut operator adjoint operator T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^*y)$.

2.2 Ruang Matriks

Ruang Matriks merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang Matriks merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R.*

Definisi 2.2.1 (Kreyszig, 1989)

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu matriks di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika *x* = *y*
iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (*X*, *d*) dengan *d* adalah Matriks pada *X* disebut ruang Matriks. Setiap anggota *X* disebut titik dan nilai *d(x,y)* disebut jarak(*distance)* dari titik *x* ke titik *y* atau jarak antara titik *x* dan titik *y*.

Definisi 2.2.2 (Kreyszig, 1989)

Suatu barisan (x_n) dalam ruang Matriks (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\epsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$. Ruang X dikatakan X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.

Definisi 2.2.3 (Maddox, 1970)

Suatu ruang Matriks (X, d) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan kata lain jika $d(x_m, x_n) \to 0(m, n \to \infty)$ maka terdapat $x \in X$ seningga $d(x_m, x) \to 0(m \to \infty)$.

Definisi 2.2.4 (Beberian, 1996)

Misal (X,d) adalah suatu ruang Matriks. Suatu barisan $(x_n) \in X$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$ (yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0, d(x_n, x) < \varepsilon$). Titik x adalah unik sebab jika $d(x_n, x) \to 0$ maka $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ menunjukkan bahwa x = y. Dapat dikatakan x_n konvergen ke limit x (dalam X) sehingga dapat ditulis $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

Lemma 2.2.1 (Kreyszig, 1989)

Jika X = (X,d) adalah ruang Matriks, maka :

i. Suatu barisan konvergen di X adalah terbatas dan limitnya adalah unik.
ii. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ di X, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Teorema 2.2.1 (Parzynsky dan Zipse, 1987)

Setiap barisan Cauchy adalah terbatas.

Bukti :

Jika $\{a_n\}$ barisan Cauchy maka untuk $\varepsilon = 1$ ada bilangan asli N sehingga $|a_m - a_n| < 1$ dimana $n, m > N$. Perhatikan bahwa untuk $n_0 > N$ maka $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > N$. Jika $M = maks(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1 + |a|)$ jelas $|a_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli N sehingga barisan $\{a_n\}$ terbatas.

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 (Maddox, 1970)

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku :

i. $x + y = y + x$

ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$

iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$

v. $1 \cdot x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

2.4 Ruang Bernorma

Definisi 2.4.1 (Darmawijaya, 1970)

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \to \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma(*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui.

Lemma 2.4.1 (Maddox, 1970)

Dalam ruang linier bernorm X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$$

2.5 Ruang Banach

Definisi 2.5.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang Matriks yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen.

2.6 Barisan

Definisi 2.6.1 (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan.

Definisi 2.6.2 (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan *n*, (*n* = 1, 2, 3,...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan.

Definisi 2.6.3 (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli *N*, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli N yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, daan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit.

Teorema 2.6.1 (Martono, 1984)

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas.

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$.

Ambillah $M = maks\left(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + 1\right)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas.

Definisi 2.6.4 (Maddox, 1970)

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \ \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞

Definisi 2.6.5 (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku

$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati L jika n mendekati tak hingga.

Definisi 2.6.6 (Martono, 1984)

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen.

Definisi 2.6.7 (Soeparna, 2007)

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\} : x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Definisi 2.6.8 (Darmawijaya, 2007)

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$\left(x_j y_j\right)_{j\in N} \in l^{\infty} \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j y_j\right| \leq \|x\|^p \|y\|^q$$

Teorema 2.6.2 (Darmawijaya, 2007)

$l^p(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l^{∞} merupakan ruang bernorm terhadap $\|.\|_{\infty}$.

Untuk setiap skalar α dan $\bar{x} = \{x_k\}, \{y_k\} \in l^{\infty}$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_{\infty} = \sup_{k\geq 1}|x_k| \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_{\infty} = \sup_{k\geq 1}|x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_{\infty} = \sup_{k\geq 1}|\alpha x_k|. \sup_{k\geq 1}|x_k| = \alpha\|x\|_{\infty}$.

karena $\sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_{\infty} = \alpha\|x\|_{\infty} < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l^{\infty}$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{\infty} \leq \|\tilde{x}\|_{\infty} + \|\tilde{y}\|_{\infty}$ dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{\infty} \leq \infty$ yaitu $\tilde{x} + \tilde{y} \in l^{\infty}$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^{∞} merupakan ruang linear dan $\|.\|_{\infty}$ norm pada l^{∞}. Dengan kata lain $(l^{\infty}, \|.\|_{\infty})$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \in l^p$ dan skalar α.

Diperoleh :

iv) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

v) $\|\alpha\tilde{x}\|_{\mathrm{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

vi) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ ruang bernorm.

Teorema 2.6.3 (Darmawijaya, 2007)

Jika bilangan *real p* dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang banach.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang bernorm

Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l^p$ dengan

a) $\tilde{x}^{(n)} = \left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} = \left(\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \ldots\right)$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$. Menurut ketidaksamaan minkowski.

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$. Berdasarkan pertidaksamaan a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l^p$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang banach.

Definisi 2.6.9 (Ruckle, 1991)

Misalkan *X* merupakan ruang barisan, *X* dikatakan ruang BK (Banach lengkap) jika X merupakan ruang banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n, x = (x_k) \in X$ kontinu.

Contoh ruang BK (Banach lengkap) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

2.7 Basis

Definisi 2.7.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang vektor *V* dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor *V*.

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

Definisi 2.7.2 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear.

Definisi 2.7.3 (Darmawijaya, 2007)

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n.