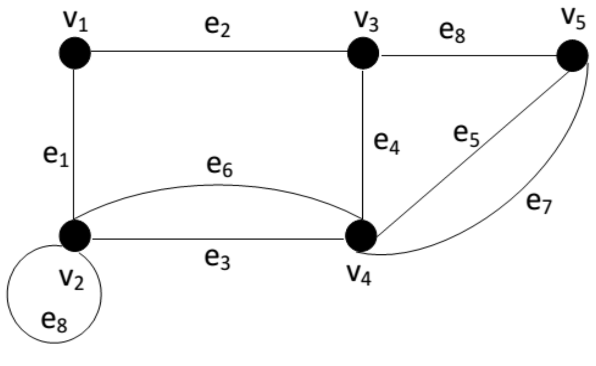
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dijabarkan tentang dasar teori graf dan dimensi partisi pada suatu graf sebagai landasan teori pada penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo, (1998).

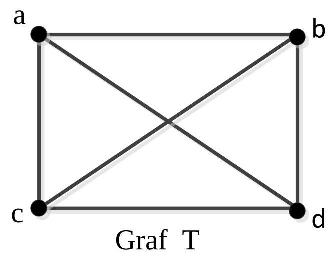
Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang tak kosong dari G, dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Berikut contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi.



Gambar 3. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

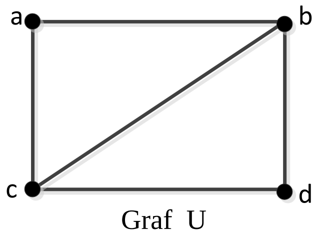
Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G, jika u dan v dihubungkan oleh sisi e maka u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik u dan v dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik u dan v. Himpunan tetangga dari v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v. Pada Gambar 3 titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3. Sisi e_3 menempel pada titik v_2 dan v_4. Derajat (*degree*) dari v adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Derajat dari titik $v \in V(G)$ dinotasikan $d(v)$. Daun *(pendant vertex)* adalah titik digraf yang berderajat satu. Pada Gambar 3 $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 5$, $d(v_5) = 3$ dan graf tersebut tidak mempunyai daun karena setiap titiknya memiliki derajat lebih dari satu.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 3 terdapat *loop* pada titik v_2 yaitu e_8. Sedangkan e_3, e_5, e_6 dan e_7 merupakan sisi paralel. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki dua atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik yang sama (*multiple edge*) dan *loop*. Graf pada Gambar 3 bukan merupakan graf sederhana karena terdapat *loop* (e_8) dan sisi ganda (e_7). Suatu graf G disebut graf lengkap (c*omplete graph*) jika graf tersebut merupakan graf sederhana dan setiap titik terhubung ke setiap titik yang lain. Sedangkan pada graf tak lengkap terdapat pasangan titik yang tidak dihubungkan oleh sisi. Banyaknya sisi pada graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Berikut contoh graf lengkap dan tak lengkap.



Graf T

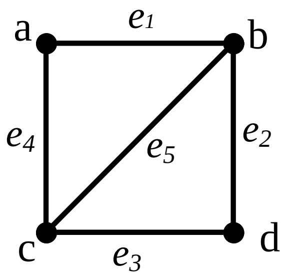
Gambar 4. Contoh graf lengkap



Graf U

Gambar 5. Contoh graf tak lengkap

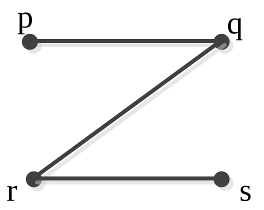
Jalan *(walk)* adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Contoh lintasan yang ditunjukkan pada Gambar 6 adalah $(a, e_1, b, e_5, c, e_3, d)$.



Gambar 6. Contoh lintasan

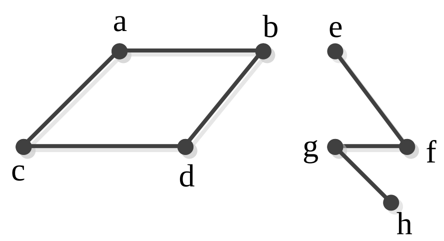
Siklus (*cycle*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Contoh siklus pada Gambar 3 adalah $v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_5, v_5, e_8, v_3, e_2, v_1$.

Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya satu lintasan antara sembarang dua titik berbeda, jika tidak demikian G disebut tak terhubung. Berikut diberikan contoh graf terhubung dan tak terhubung.



Graf G

Gambar 7. Graf terhubung



Graf H

Gambar 8. Graf tidak terhubung

Pada Gambar 8 tidak terdapat lintasan dari titik a,b,c,d ke titik e,f,g,h sehingga graf tersebut tak terhubung.

Lemma 2.1 *(Deo dkk. 1989) Jumlah derajat semua titik pada graf G adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain jika G(V,E), maka :*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e \qquad (2.1.1)$$

Jumlah derajat seluruh titik graf pada Gambar 3 adalah $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 2 + 3 + 3 + 5 + 3 = 14$ = dua kali jumlah sisi .

Teorema 2.1 *(Deo dkk. 1989) Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.*

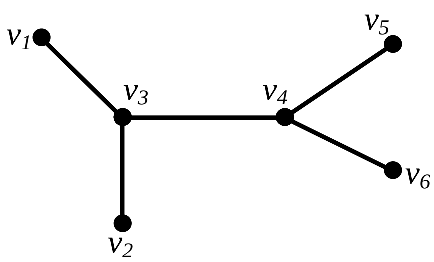
Bukti : Misalkan V_{genap} dan V_{ganjil} masing – masing adalah himpunan himpunan titik yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada *G(V,E).* Persamaan (2.1.1) dapat ditulis sebagi berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{Vgenap} d(v_j) + \sum_{Vganjil} d(v_k) \qquad (2.1.2)$$

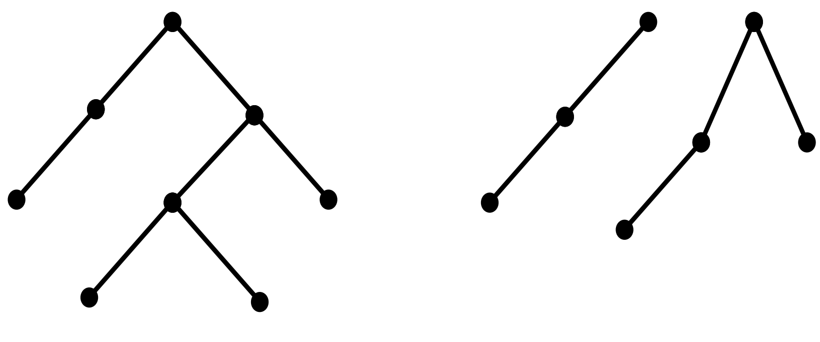
Karena $d(v_j)$ untuk setiap $v_j \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan (2.1.2) juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalam V_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap. ∎

2.2 Graf Pohon dan Beberapa Sifatnya

Graf pohon (*Tree*) adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus. Sedangkan hutan (*forest*) merupakan gabungan dari beberapa pohon.



Gambar 9. Contoh pohon G dengan enam titik



Gambar 10. Contoh hutan

Selanjutnya akan diberikan teorema mengenai graf pohon.

Teorema 2.1 *(Harsfield dan Ringel, 1994) Jika G adalah pohon dengan p titik dan q sisi , maka $p = q + 1$.*

Bukti: Jika G adalah pohon dengan satu sisi maka teorema benar untuk G. Asumsikan teorema benar untuk semua pohon dengan sisi kurang dari n, artinya untuk $q \leq n$ maka $p = n + 1$. Misal G pohon dengan n sisi. Pilih satu lintasan terpanjang di G dari a ke b. Titik a harus berderajat 1. Karena kalau tidak lintasan akan menjadi lebih panjang atau terbentuk siklus di G. Selanjutnya buang titik a, akibatnya sisi terhubung titik a terbuang. Sehingga, pohon terbentuk dengan (p – 1) dan (n – 1) sisi dengan asumsi $p - 1 = (n - 1) + 1$ diperoleh $p - 1 = n$ atau $p = n + 1$. ■

Teorema 2.2 *(Harsfield dan Ringel, 1994) Graf G adalah pohon jika dan hanya jika ada terdapat tepat satu lintasan diantara kedua titik tersebut.*

Bukti:

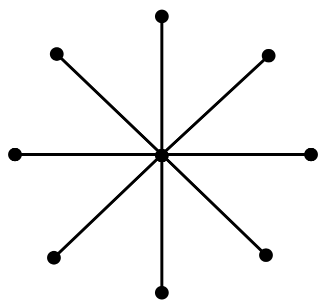
$\Rightarrow$ Akan ditunjukkan graf G adalah pohon maka ada terdapat tepat satu lintasan diantara kedua titik . Asumsikan G adalah pohon. Misal v_1 dan v_2 titik-titik di G. Maka pohon dihubungkan dengan lintasan dari v_1 ke v_2 . Anggaplah P_1 dan P_2 adalah dua lintasan dari v_1 ke v_2 , dengan $P_1 = v_1\, u_1\, u_2 \ldots u_i v_2$ dan $P_2 = v_1\, w_1\, w_2 \ldots w_m v_2$. Jika u_1 adalah jarak dari w_1, selanjutnya sampai ditemukan suatu titik yang terkandung dalam P_1 dan P_2. Maka didapatkanlah siklus . Jika $u_1 = w_1$, maka kita lihat pada u_2 . Untuk beberapa i, $u_i \neq w_i$, karena ada dua lintasan $v_1 v_2$ sebagai asumsi. Selanjutnya P_1 dari u_{i-1} sampai ditemukan suatu titik yang terkandung dalam P_1 dan P_2, selanjutnya ambil P_2 kembali ke u_{i-1}, dan didapatkan siklus lagi. Tetapi G adalah pohon, sehingga tidak ada siklus. Jadi asumsi bahwa ada dua $v_1 v_2$ lintasan salah.

$\Leftarrow$ Akan ditunjukkan ada terdapat tepat satu lintasan diantara kedua titik maka graf G adalah pohon . Asumsikan G adalah graf dengan tepat satu lintasan diantara dua titik. Pertama perhatikan G terhubung. Anggaplah bahwa G mengandung siklus. $v_1 v_2 \ldots v_n v_1$. Jelas bahwa ada dua lintasan dari v_1 ke v_n. Ini kontradiksi , karena G mempunyai tepat satu lintasan diantara dua titik. Jadi graf G tidak mengandung siklus dan G adalah pohon. ■

Kelas graf pohon yang berkaitan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Graf bintang $K_{1,n}$ (*Star*)

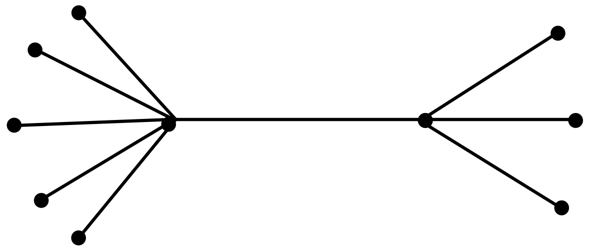
   Graf bintang $K_{1,n}$ adalah suatu graf tehubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut pusat atau titik lainnya berderajat satu (Chartrand dkk.,1998).



Gambar 11. Graf Bintang $K_{1,8}$

2. Graf Bintang Ganda

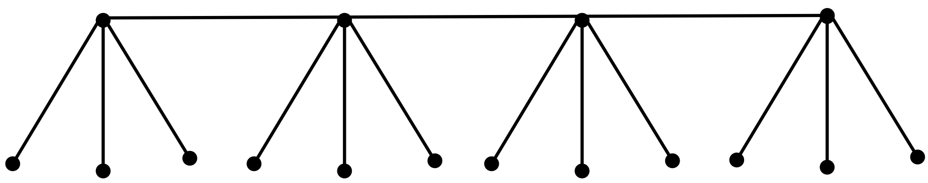
   Suatu graf pohon disebut graf bintang ganda (*double star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut berderajat $a+1$ dan $b+1$, dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand dkk.,1998).



Gambar 12. Graf Bintang Ganda $S_{4,3}$

3. Graf Ulat (*Caterpillar Graf*)

   Graf ulat adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk.,1998).



Gambar 13. Contoh Graf ulat

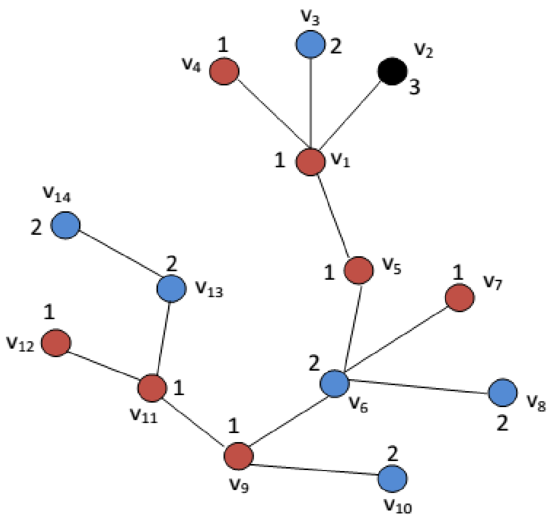
2.3. Dimensi Partisi Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat dari dimensi partisi pada suatu graf yang diambil dari Chartrand dkk. (1998).

Misalkan $G = (V,E)$ suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v,S)$ adalah $\min\{d(v,x), x \in S\}$ dengan

$d(v,x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari *V(G)*. Representasi v terhadap Π dinotasikan dengan $r(\, v \mid \Pi\,)$ adalah k pasang terurut $\big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$. Selanjutnya Π disebut partisi pembeda dari *V(G)* jika $r(u \mid \Pi) \neq r(v \mid \Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari *G*, dinotasikan dengan *pd (G)*, adalah nilai *k* terkecil sehingga *G* mempunyai partisi pembeda dengan *k* kelas.

Berikut ini akan diberikan graf G dan akan ditentukan dimensi partisinya.



Gambar 14. Dimensi Partisi graf G

Graf G dipartisi, sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{12}\}$, $S_2 = \{v_3, v_6, v_8, v_{10}, v_{13}, v_{14}\}$, $S_3 = \{v_2\}$. Selanjutnya perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi)$ = (0,1,1); $r(v_2|\Pi)$ = (1,2,0); $r(v_3|\Pi)$ = (1,0,2); $r(v_4|\Pi)$ = (0,2,2); $r(v_5|\Pi)$ = (0,1,2); $r(v_6|\Pi)$ = (1,0,3); $r(v_7|\Pi)$ = (1,0,4); $r(v_8|\Pi)$ = (2,0,4); $r(v_9|\Pi)$ = (0,1,4); $r(v_{10}|\Pi)$ = (1,0,5); $r(v_{11}|\Pi)$ = (0,1,5); $r(v_{12}|\Pi)$ = (0,1,6); $r(v_{13}|\Pi)$ = (1,0,6); $r(v_{14}|\Pi)$ = (0,1,7). Karena representasi dari semua titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan *pd (G)* ≤ 3. **(2.3.1)**

Untuk menunjukkan *pd (G)* ≥ *3*, andaikan terdapat partisi pembeda Π = $\{S_1, S_{2,}\}$ dari *G* . Perhatikan titik v_6, titik v_6 mempunyai 3 daun yaitu $v_{5,} v_{7,}$dan v_8 . Jika hanya terdapat dua kelas partisi pembeda, maka dua dari tiga daun tersebut akan memiliki partisi pembeda yang sama. Akibatnya representasi kedua daun itu akan sama, karena memiliki jarak yang sama terhadap titik-titik lainnya pada graf G, maka hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi *pd (G)* ≥ *3*. **(2.3.2)**

Berdasarkan persamaan (2.3.1) dan (2.3.2) diperoleh *pd (G)* = 3. ■

Berikut ini akan diberikan lemma dan teorema penting dari dimensi partisi yang telah dibuktikan Chartrand dkk. (1998).

Lemma 2.2.1

Diberikan *G* graf terhubung dengan partisi pembeda Π dari *V(G)*, untuk *u,v* ∈ *V(G)*, jika *d(u,w)* = *d(v,w)* untuk setiap *w* ∈ *V(G)* – $\{u, v\}$, maka *u* dan *v* merupakan elemen yang berbeda dari Π.

Berikut ini akan diberikan teorema untuk menentukan dimensi partisi pada graf bintang ganda.

Teorema 2.2.2

Jika T adalah graf bintang ganda berorde n ≥ 6 dengan *x* dan *y* dua titik yang bukan daun, maka *pd (T)* = $max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$.

Bukti :

Misalkan r = deg(x) – 1 dan s = deg (y) -1, dengan r ≥ s. Misalkan $u_1, u_2, .., u_r$ adalah daun dari *T* yang bertetangga dengan *x* dan $v_1, v_2, .., v_s$ adalah daun yang bertetangga dengan *y* . Untuk membuktikannya dibagi menjadi dua khusus.

Kasus 1. Jika r = s.

Diberikan Π = $\{S_1, S_{2,} \ldots, S_r\}$, dengan $S_1 = \{u_1, v_1, x\}$, $S_2 = \{u_2, v_2, y\}$, dan $S_i = \{u_i, v_i\}$ untuk $3 \leq i \leq$ r. Perhatikan bahwa $r(u_1|\Pi)$ = (0,2,2,2,…,2); $r(u_2|\Pi)$ = (1,0,2,2,…,2); $r(v_1|\Pi)$ = (0,1,2,2,…,2); $r(v_2|\Pi)$ = (2,0,2,2,…,2); $r(x|\Pi)$ = (0,1,1,…,1); $r(y|\Pi)$ = (1,0,1,1,…,1); untuk 3 ≤ i ≤ r, $r(u_i|\Pi)$ = (1,2,…,0,…); $r(v_i|\Pi)$ = (2,1,…,0,…), komponen ke – i bernilai 0. Akibatnya semua titik mempunyai representasi yang berbeda . Jadi, *pd (T) ≤ r*

Kasus 2. Jika *r > s*. Pada kasus 2 ini, dapat dipecah lagi menjadi sub kasus.

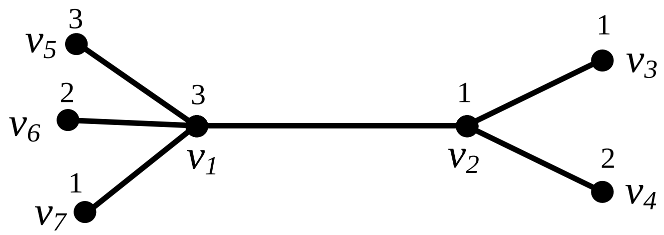
Bagian 2.1. Jika *s = 1*. Maka r ≥ 3.

Diberikan Π = $\{S_1, S_{2,} \ldots, S_r\}$ dengan $S_1 = \{u_1, x\}$, $S_2 = \{u_2, y\}$, $S_3 = \{u_3, v_1\}$, dan $S_1 = \{u_1\}$ untuk 2 ≤ i ≤ r. Karena $r(u_2|\Pi) =$ (1,0,2,∗,∗, … . ,∗); $r(u_3|\Pi) =$ (1,2,0,∗,∗, … ,∗) ; $r(y|\Pi) =$ (1,0,1,∗,∗, … ,∗); $r(v_1|\Pi) =$ (0,1,0,∗,∗ , … . ,∗). Jadi Π adalah partisi pembeda dari *V(T)* dan *pd (T)* ≤ r.

Bagian 2.2 Jika s ≥ 2.

Diberikan Π = $\{S_1, S_{2,} \ldots, S_r\}$ dengan $S_1 = \{u_1, v_1, x\}$; $S_2 = \{u_2, v_2, y\}$, $S_i = \{u_1, v_i\}$ untuk 3 ≤ i ≤ s, dan $S_i = \{u_1\}$ untuk s + 1 ≤ i ≤ r. Pernyataan sama yang digunakan pada bagian 2.1 menunjukkan bahwa Π adalah partisi pembeda dari *V(T)* dan *pd(T)* ≤ r. Jadi terbukti bahwa *pd (T)* = $max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$.

Contoh penentuan dimensi partisi graf bintang ganda. Diberikan graf bintang ganda $S_{3,2}$, akan ditentukan bahwa $pd(S_{3,2})$ = 3.



Gambar 15. Dimensi partisi graf bintang $(S_{3,2})$

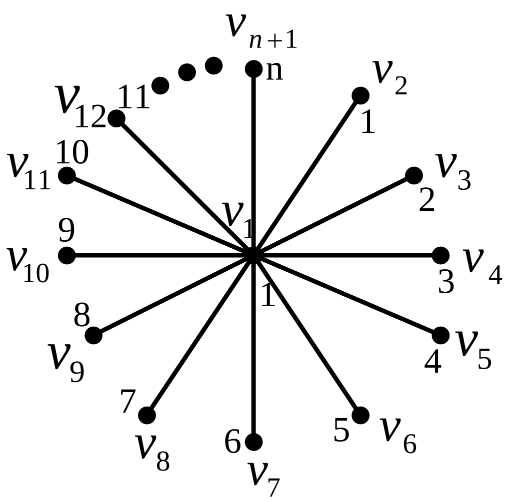
Graf bintang ganda $(S_{3,2})$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh Π = $\{S_1, S_{2,} S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_{2,} v_{3,} v_{7,}\}, S_2 = \{v_{4,} v_6\}$, $S_3 = \{v_{1,} v_5\}$. Representasi dari graf bintang ganda $(S_{3,2})$ adalah sebagai berikut : $r(v_1|\Pi)$ = (1,1,0); $r(v_2|\Pi)$ = (0,1,1);$r(v_3|\Pi)$ = (0,2,2); $r(v_4|\Pi)$ = (1,0,2); $r(v_5|\Pi)$ = (2,2,0); $r(v_6|\Pi)$ = (2,0,1); $r(v_7|\Pi)$ = (0,2,1). Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf $S_{3,2}$ dan *pd(G)* ≤ 3.

Untuk menunjukkan *pd(G)* ≥ 3, andaikan terdapat partisi pembeda Π = $\{S_1, S_{2,}\}$ dari *G* dengan $S_1 = \{v_{1,} v_{3,} v_{7,}\}, S_2 = \{v_{1,} v_{4,} v_{5,} v_6\}$, maka titik $v_{5,} v_6$ akan memiliki representasi yang sama yaitu (2,0), hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi *pd(G)* ≥ 3. Akibatnya *pd(G)* = 3 ■

Teorema 2.2.3

Misalkan $K_{1,n}$ graf bintang berorde $n \geq 1$ maka $pd(K_{1,n})$ = n

Bukti :



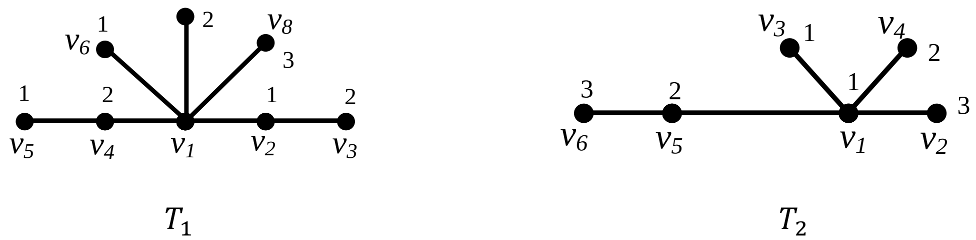
Gambar 16. Dimensi Partisi graf bintang $K_{1,n}$

Graf $K_{1,n}$ dipartisi sedemikian sehingga Π = $\{S_1, S_{2,}S_3, S_4, S_{5,}S_{6,\dots,}S_n\}$, dengan $S_1 = \{v_{1,}v_{2,}\}$, $S_2 = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$, $S_4 = \{v_5\}$, $S_5 = \{v_6\}$, $S_6 = \{v_7\}$, . . ., dan $S_n = \{v_{n+1}\}$. Perhatikan bahwa representasi dari Graf $K_{1,n}$ adalah sebagai berikut $r(v_1|\Pi)$ = (0,1,1,1,1,1,1,...,1); $r(v_2|\Pi)$ = (0,2,2,2,2,...,2); $r(v_3|\Pi)$ = (1,0,2,2,2,2,...,2); $r(v_4|\Pi)$ = (1,2,0,2,2,2,...,2); $r(v_5|\Pi)$ = (1,2,2,0,2,2,...,2); $r(v_6|\Pi)$ = (1,2,2,2,0,2,...,2); $r(v_{n+1}|\Pi)$ = (1,2,2,2,2,2,...,0). Karena representasi dari semua titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf $K_{1,n}$ dan $pd\ (K_{1,n}) \leq n$.

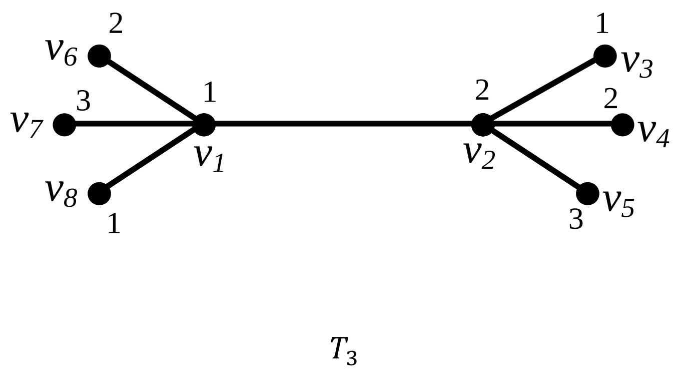
Untuk menunjukkan $pd\ (K_{1,n}) \geq n$, andaikan terdapat partisi pembeda $(\Pi\ = \{S_1, S_{2,}S_3, S_4, S_{5,}S_{6,\dots,}S_{n-1}\})$ dari $K_{1,n}$, maka akan ada representasi yang sama yaitu pada titik v_n dan v_{n+1} maka Π bukan merupakan partisi pembeda dari graf $K_{1,n}$, hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $pd\ (K_{1,n}) \geq n$. Akibatnya $pd\ (K_{1,n}) = n$

Teorema 2.2.4

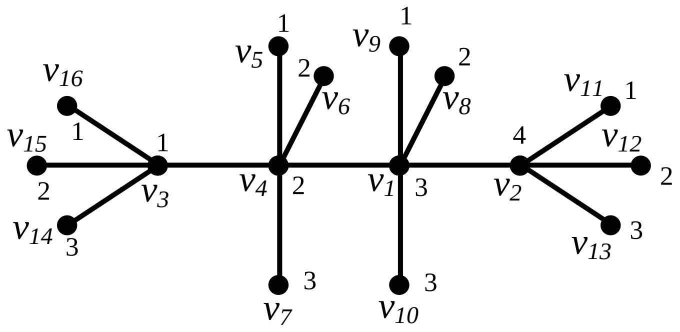
Jika T adalah graf ulat dengan $\Delta_t(T) \geq 3$, maka $\Delta_t(T) - 2 \leq pd\ (T) \leq \Delta_t(T) + 1$. Untuk membuktikan Teorema 2.2.4, perhatikan partisi pembeda pada graf ulat berikut :



Gambar 16. Dimensi partisi graf ulat T_1,T_2



Gambar 17. Dimensi partisi graf ulat T_3



Gambar 18. Dimensi partisi graf ulat T_4

Graf ulat T_1 pada Gambar 16 memiliki $pd\ (T_1) = 3 = \Delta_t(T) - 2$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_{2,}S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_{2,}v_{5,}v_6\}, S_2 = \{v_{3,}v_{4,}v_7\}$ dan $S_3 = \{v_{1,}v_8\}$.

Graf ulat T_2 pada Gambar 16 memiliki $pd\ (T_2) = 3 = \Delta_t(T) - 1$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_{2,}S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_{1,}v_4\}, S_2 = \{v_{3,}v_5\}$ dan $S_3 = \{v_{2,}v_6\}$.

Graf ulat T_3 pada Gambar 17 adalah graf bintang ganda dan berdasarkan Teorema 2.2.2 maka $\Delta_t\ (T_3) = pd\ (T_3) = 3$.

Graf ulat T_4 pada Gambar 18 memiliki $\Delta_t\ (T_4) = 3$ dengan partisi pembedanya $\Pi = \{S_1, S_{2,}S_3, S_4\}$ dari $V\ (T_4)$ dengan $S_1 = \{v_{3,}v_{5,}v_{9,}v_{11,}v_{16,}\}$, $S_2 = \{v_{4,}v_{6,}v_{8,}v_{12,}v_{15}\}$ dan $S_3 = \{v_{1,}v_{7,}v_{10,}v_{13,}v_{14}\}$; $S_4 = \{v_{2,}\}$. Untuk menunjukkan *pd* $(T_4) = 4$ cukup dengan menunjukkan bahwa tidak ada partisi pembeda dengan tiga kelas partisi dari $V(T_4)$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_{2,}S_3\}$ sebagai partisi pembeda dari $V(T_4)$ maka akan ada kesamaan partisi pembeda dari titik v_1 dan v_2 sehingga mengakibatkan representasinya akan sama juga. Sehingga $\Pi = \{S_1, S_{2,} S_3\}$ bukanlah partisi pembeda yang tepat untuk *T*$_4$, hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Akibatnya $pd(T_4) = 4 = \Delta_t\ (T_3) + 1$.

Selanjutnya akan diberikan beberapa Lemma hasil penelitian Asmiati dkk. tentang dimensi partisi dari graf amalgamasi bintang.

Lemma 2.2.2 *Misal* Π *adalah partisi pembeda dari graf* $S_{k,m}$, dengan $k, m \geq 2$, dan $|\Pi| \geq m - 1$. *Partisi pembeda* Π *adalah hasil partisi dari graf* $S_{k,m}$ *jika dan hanya jika* l_i *dan* $l_k, i = k$ *dalam kelas yang sama pada kelas kombinasi pada* $\left\{l_{ij}\ \middle|\ j = 1,2, \dots, m-1\right\}$ *dan jika* $\left\{l_{ij}\ \middle|\ j = 1,2, \dots, m-1\right\}$ *adalah pembeda.*

Bukti :

Misal Π adalah hasil partisi dari graf $S_{k,m}, k, m \geq 2$, dengan $|\Pi| \geq m - 1$ dan $l_i, l_k\ i = j$ adalah kelas yang sama dari Π. Jika kombinasi kelas dari $l_{ij}\ \Big|\, j = 1,2, \dots, m-1$ dan jika $l_{kj}\ \Big|\, j = 1,2, \dots, m-1$ adalah sama. Karena $d(l_i, u) = d(l_k, u)$ untuk setiap $u \in V\left\{\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, m-1\} \cup \{l_{kj} | j = 1,2, \dots, m-1\}\right\}$ maka representasi dari l_i dan l_k adalah sama. Jadi Π bukan hasil dari partisi. Maka kontradiksi dengan pengandaian.

Misal Π adalah partisi pembeda dari graf $S_{k,m}, k, m \geq 2$, dengan $|\Pi| \geq m - 1$. Misal A dinotasikan dari kombinasi kelas graf $l_{ij}\ \Big|\, j = 1,2, \dots, m-1$ dan B dinotasikan dari kombinasi kelas graf. $\{l_{kj} | j = 1,2, \dots, m-1\}$. Perbandingan l_i dan $l_k, i = k$ adalah kelas yang sama dari Π. Karena A = E, maka S_m dan S_n

dimana $S_m \in A, S_m \notin B$ dan $S_n \in B, S_n \notin A$. Akan ditunjukkan bahwa representasi dari setiap $u \in V(\ S_{k,m})$ adalah unik.

1. Jelas, $r(l_i|\Pi) = r(l_i|\Pi)$ karena representasinya berbeda dalam m-ordinat dan n-ordinat.
2. Jika l_{ij} dan l_{km} adalah kelas yang sama pada Π dengan $l_i = l_k$, akan ditunjukkan bahwa $\left(l_{ij}\middle|\Pi\right) = \ r(l_{km}|\Pi)$. Bagi dalam 2 kasus.
   (1) Kasus 1, jika l_i dan l_k adalah kelas yang sama pada Π maka diperoleh alasan pada teorema ini, yaitu A = B. Jadi $r\left(l_{ij}\middle|\Pi\right) = r(l_{km}|\Pi)$.
   (2) Kasus 2, misal $l_i \in S_x$ dan $l_k \in S_y, S_x = S_y$ maka $r\left(l_{ij}\middle|\Pi\right)$dan $r(l_{km}|\Pi)$ adalah berbeda dalam x-ordinat dan y-ordinat.
   Jadi $r\left(l_{ij}\middle|\Pi\right) = r(l_{km}|\Pi)$.
3. Jika l_i dan l_{kj}, $l_i = l_k$ dalam kelas yang sama pada Π, maka representasi $r(l_i|\Pi)$ mempunyai setidaknya satu komponen yang bernilai 1. Sedangkan $r\left(l_{kj}\middle|\Pi\right)$ mempunyai tepat satu komponen yang bernilai 1.
   Maka $r(l_i|\Pi) = r\left(l_{kj}\middle|\Pi\right)$.
4. Jika x dan l_{ij} dalam kelas yang sama pada Π, maka representasi $r(x|\Pi)$ mempunyai setidaknya satu komponen yang bernilai 1. Sedangkan $r\left(l_{ij}\middle|\Pi\right)$ mempunyai tepat satu komponen yang bernilai 1. Maka $r(x|\Pi) = r\left(l_{ij}\middle|\Pi\right)$.
5. Jika x dan l_i dalam kelas yang sama pada Π. Bagi dalam 2 kasus.
   (1) Kasus $3 \leq k < m - 1$. Representasi $r(l_i|\Pi)$ mempunyai $(m - 2)$ komponen yang bernilai 1. Sedangkan $r(x|\Pi)$ mempunyai kurang dari $(m - 2)$ komponen yang bernilai 1. Maka $r(x|\Pi) = r(l_i|\Pi)$.
   (2) Kasus $k \geq m + 1$.Karena $d(x, m) = d(l_i, m)$ maka $r(x|\Pi) = r(l_i|\Pi)$. ■

Lemma 2.2.3. *Misal* Π *adalah* $(m + a)$ *partisi* $S_{k,m}$, *untuk* $a \geq 1$, *maka* $k \leq (m + a)^2 - 1$.

Bukti :

Misal Π adalah $(m + a)$ partisi pada $S_{k,m}$, $untuk\ a \geq 1$, tetap untuk i, misal l_i, maka jumlah kombinasi partisi dapat digunakan oleh $\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, m - 1\}$ adalah $(m + a)$. Karena $(m + a)$ partisi dari l_i, untuk setiap $i = 1,2, \dots, (m + a)$. Berdasarkan Lemma 2.2.1 kita peroleh jumlah dari k adalah $(m + a)^2$. Akan tetapi, jika x, l_b dalam kelas partisi yang sama dan $N(x) = N(l_b)$, maka kita harus menghilangkan l_b, untuk memastikan bahwa semua titik akan mempunyai representasi yang berbeda. Maka jumlah maksimum dari k adalah $(m + a)^2$-1

$\blacksquare$