II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam penelitian ini akan didiskusikan tentang transformasi model tak penuh dengan kendala menjadi model penuh tanpa kendala, pendugaan parameter, pengujian hipotesis dan selang kepercayaan rasio fungsi linear parameter. Untuk itu, penulis menggunakan beberapa definisi dan teorema-teorama yang berkaitan dengan hasil yang ingin dicapai.

2.1 Rancangan *Nested* Tiga Level

Definisi 2.1

Rancangan percobaan (*Experimental Design*) merupakan hal yang berhubungan dengan perencanaan penelitian untuk mendapatkan informasi maksimum dari bahan-bahan yang tersedia.

(Miliken dan Johnson 1997 hal. 47)

Selanjutnya Miliken dan Johnson menjelaskan bahwa rancangan percobaan terdiri dari dua struktur dasar yaitu struktur perlakuan (*treatment structure*) dan struktur rancangan (*design structure*). Struktur perlakuan dari suatu rancangan percobaan terdiri dari sekumpulan perlakuan, kombinasi perlakuan, atau populasi yang dipilih oleh peneliti untuk dipelajari atau dibandingkan. Struktur perlakuan terdiri atas beberapa jenis, yaitu *One-way treatment structure, Two-way treaatment structure, Factorial arrangement treatment structure, Fractional factorial* *arrangement treatment structure,* dan *Factorial arrangement with one or more controls.* Sedangkan stuktur rancangan pada rancangan percobaan merupakan pengelompokan unit percobaan dalam kelompok-kelompok yang homogen. Struktur rancangan juga terdiri atas beberapa jenis yaitu *Completely randomized design, Randomized complete block design, Latin square design, Incomplete block designs dan Various combinations and generalizations*.

Pengaruh tersarang (*nested*) dapat terjadi pada kedua struktur baik dalam struktur rancangan maupun struktur perlakuan. Kejadian menyarang pada struktur rancangan harus terdapat lebih dari satu ukuran unit percobaan di mana unit percobaan yang kecil tersarang dalam unit percobaan yang besar. Unit percobaan atau satuan percobaan adalah satuan bahan atau tempat dilaksanakannya setiap perlakuan yang akan dicobakan. Sedangkan kejadian menyarang pada struktur perlakuan harus terdapat dua faktor atau lebih. Faktor merupakan sesuatu yang akan dilihat pengaruhnya, faktor-faktor tersebut memungkinkan mempunyai efek tetap, acak maupun campuran. Menurut Miliken dan Johnson jika semua faktor pada struktur perlakuan mempunyai efek tetap maka disebut dengan model tetap atau model efek tetap (*fixed effect*).

Misalkan ada tiga faktor (faktor A, B dan C) di mana unit percobaan faktor C lebih kecil dari faktor B dan unit percobaan faktor B lebih kecil dari faktor A. Jika faktor A terdiri dari *a* buah, faktor B terdiri dari *b* buah, faktor C terdiri dari *c* buah dengan *n* kali pengamatan, maka kondisi tersebut dapat disusun dalam bentuk rancangan *nested* tiga level.

2.2 Model dan Asumsi

Model rancangan *nested* tiga level dapat diparameterkan sebagai berikut :

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \gamma_{k(ij)} + \varepsilon_{ijkl} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \dots a \\ j = 1, 2, \dots b \\ k = 1, 2, \dots c \\ l = 1, 2, \dots\ n \end{cases} \tag{2.1}$$

Di mana y_{ijkl} adalah nilai pengamatan dari faktor A ke-*i*, faktor B ke-*j*, faktor C ke-*k* dan pengulangan ke-*l*, μ adalah nilai tengah keseluruhan, τ_i adalah efek faktor A ke-*i*, $\beta_{j(i)}$ adalah efek faktor B ke-*j* pada faktor A ke-*i*, $\gamma_{k(ij)}$ adalah efek faktor C ke-*k* pada faktor B ke-*j* dan pada faktor A ke- *i*, dan ε_{ijkl} adalah galat dari faktor A ke-*i*, faktor B ke-*j*, faktor C ke-*k* dan pengulangan ke-*l*.

Dalam penelitian ini dipilih model efek tetap sehingga asumsi yang harus dipenuhi dalam model efek tetap adalah :

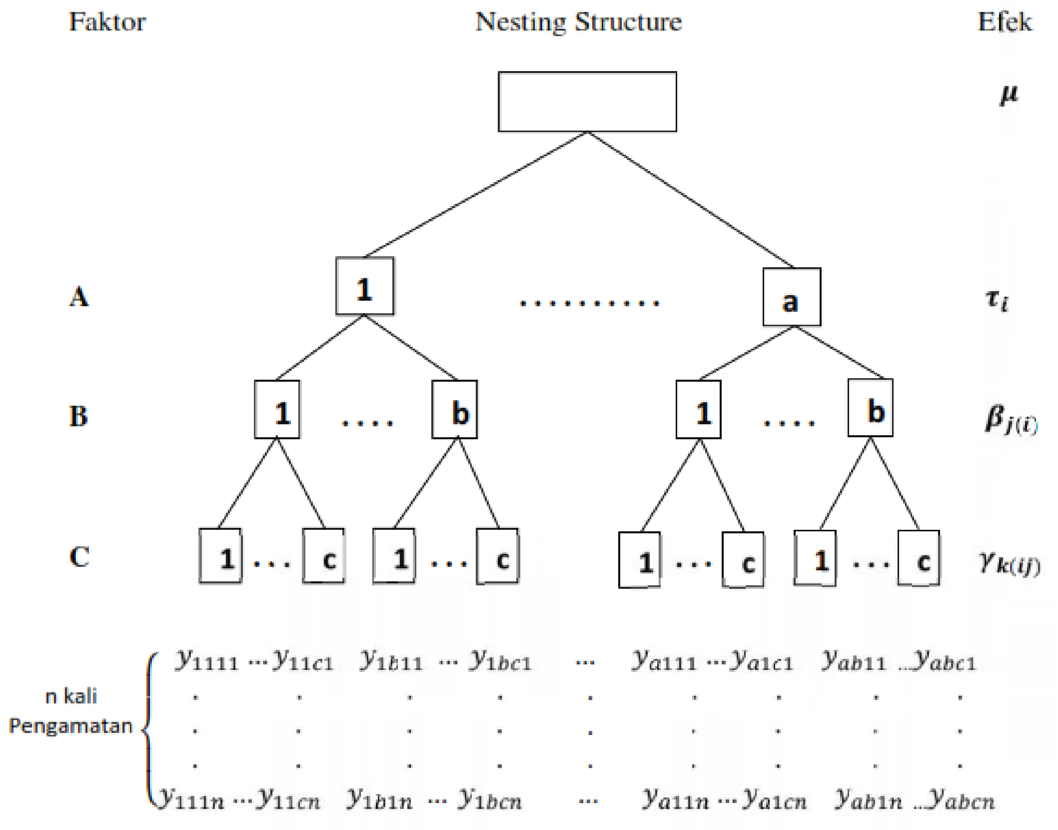
$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0\,; \sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)} = 0 \ \ \forall i\ ;\ \sum_{i=1}^{a} \beta_{j(i)} = 0 \ \ \forall j\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{c} \gamma_{k(ij)} = 0 \ \ \forall i, j; \quad \sum_{i=1}^{a} \gamma_{k(ij)} = 0 \ \forall j, k\ ;$$

$$dan\ \sum_{j=1}^{b} \gamma_{k(ij)} = 0 \ \ \forall i, k \tag{2.2}$$

Selain itu diasumsikan juga bahwa ε_{ijkl} berdistribusi $N(0, \sigma^2 I)$

Model (2.1) dapat dijelas dengan gambar berikut :



Gambar 2.1

2.3 Produk Kroneker

Matriks pada model rancangan mempunyai pola tertentu dan biasanya berukuran besar sehingga kurang efektif dalam penulisan maupun perhitungannya. Produk kroneker merupakan cara menuliskan matriks dalam bentuk yang lebih sederhana.

Definisi 2.2

Jika A adalah matriks berukuran r x s, dengan a_{ij} adalah unsur ke-ij dengan i=1,2,....,r dan j=1,2,...,s; B adalah matriks t x v maka Produk kroneker dilambangkan dengan $A \otimes B$ adalah matriks berukuran rt x sv dengan mengalikan setiap unsur a_{ij} dengan keseluruhan matriks B, yaitu

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2s}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{r1}B & a_{rs}B & \dots & a_{rs}B \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

(Clarke 2008, hal. 81)

Teorema 2.1

Jika *A* dan *B* adalah sebarang matriks maka $[A \otimes B]' = A' \otimes B'$

Teorema 2.2

Jika matriks *A*, *B*, *C*, dan *D* masing-masing berukuran *r* x *s*, *t* x *v*, *s* x *v* dan *v* x *w*, maka $[A \otimes B][C \otimes \mathrm{D}] = [AC \otimes BD]$

Teorema 2.3

Jika *A* dan *B* adalah matriks *m* x *n* dan *C* adalah matriks *p* x *q* maka

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$$

Teorema 2.4

Jika I_a dan I_b masing-masing merupakan matriks idenstitas berorde *a* dan *b* maka

$$I_a \otimes I_b = I_{ab}$$

2.4 Model Linear Umum

Definisi 2.3

Misal Y adalah vektor peubah acak n x 1 yang teramati; X adalah matriks n x p $(n > p)$ dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui; β adalah vektor parameter *p* x 1 yang tidak diketahui nilainya; ε adalah vektor peubah acak *n* x 1 yang tidak teramati, dengan $E(\varepsilon) = 0$ dan $Cov(\varepsilon) = \Sigma$. Misalkan hal ini kita hubungkan menjadi

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.4)$$

Secara khusus persamaan (2.4) dinamakan model linear umum.

(Graybill 1976, hal. 171)

Pada model (2.1) jika peringkat atau rank dari matriks *X* sama dengan jumlah kolomnya, maka modelnya dinamakan berperingkat penuh (*full rank model*) dan jika peringkat matriksnya tidak penuh maka modelnya dinamakan model tidak penuh.

2.5 Teori Distribusi

Definisi 2.4

Peubah acak tunggal *X* didefinisikan mempunyai distribusi normal univariat dengan mean μ dan varians σ^2, jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluang atau *probability density function (pdf)* dari *X* adalah

$$n(x;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty \qquad (2.5)$$

(Graybill 1976, hal. 95)

Definisi 2.5

Peubah acak univariat *Z* didefinisikan mempunyai distribusi normal standar univariat jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluang dari *Z* adalah

$$n(z;0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), -\infty < z < \infty \qquad (2.6)$$

(Graybill 1976, hal. 94)

Definisi 2.6

Jika $Z = Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ dan Z_i berdistribusi N(0,1) maka vektor $Y = GZ + \mu$ dengan G adalah matriks nonsingular *n* x *n* dan μ adalah vektor konstan *n* x 1. Maka distribusi gabungan vektor acak *n* x 1 *Y* adalah

$$f_Y(Y) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\ exp\left(-\frac{1}{2}(Y-\mu)'(\Sigma)^{-1}(Y-\mu)\right) \qquad (2.7)$$

dengan $\Sigma = \mathrm{GG}'$. Fungsi $f_Y(Y)$ adalah fungsi distribusi normal multipeubah dari peubah acak *Y n* x 1 dengan nilai tengah μ dan matriks varians-kovarians definit positif Σ. Selanjutnya dilambangkan dengan

Y berdistribusi $N(\mu, \Sigma)$

(Mustofa dan Warsono 2009, hal 95)

Definisi 2.7

Peubah acak *U* dikatakan berdistribusi khi-kuadrat, jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluangnya berbentuk

$$\chi^2(u; n) = \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right) u^{\frac{(n-2)}{2}}\ e^{-\frac{u}{2}},\ 0 < u < \infty \qquad (2.8)$$

(Graybill 1976, hal. 64)

Teorema 2.5

Misalkan vektor acak Y n x 1 berdistribusi N(0,I) dan misal $U = Y'Y$. Maka *U* mempunyai distribusi chi kuadrat dengan derajat bebas *n*.

Bukti (Graybill 1976, hal. 124)

Definisi 2.8

Peubah acak W dikatakan mempunyai distribusi F jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$F(w; m_1, m_2) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)\left(\frac{m_1}{n_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\right] w^{\frac{(m_1-2)}{2}} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} w\right)^{-\frac{(m_1+m_2)}{2}}, 0 < w < \infty \quad (2.9)$$

(Graybill 1976, hal. 66)

Teorema 2.6

Misalkan peubah acak U_1 berdistribusi $\chi^2(n_1)$, peubah acak U_2 berdistribusi $\chi^2(n_2)$ serta U_1 dan U_2 independen. Maka peubah acak W berikut

$$W = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

Berdistribusi F dengan derajat bebas n_1 dan n_2

Bukti (lihat Graybill 1976, hal 128)

2.6 Distribusi Bentuk Kuadratik

Definisi 2.9

Misalkan A adalah matriks k x k dan $Y = [y_1, y_2, , \dots, y_k]'$ adalah vektor kolom k x1 dari peubah real. Maka bentuk $q = Y'AY$ dinamakan bentuk kuadratik dalam Y dan A dinamakan matriks bentuk kuadratik (*quadratik form*).

(Myers dan Milton , hal. 44)

Teorema 2.7

Misal vektor acak *Y n x 1* berdistribusi $N(\mu, I)$. Misal A matriks simetrik n x n maka $Y'AY$ berdistribusi $\chi^2\left(p, \lambda = \frac{1}{2}\mu' A\mu\right)$ jika dan hanya jika A adalah matriks idempoten berperingkat p.

Bukti (lihat Myers dan Milton 1991, hal. 60)

Teorema 2.8

Misal vektor acak Y n x 1 berdistribusi $\mathrm{N}(\mu, \mathrm{V})$. Misal A matriks simetrik n x n. Maka $Y'AY$ berdistribusi $\chi^2\left(p, \lambda = \frac{1}{2}\mu' A\mu\right)$ jika dan hanya jika AV matriks idempoten berperingkat p.

Bukti (lihat Myers dan Milton 1991, hal. 62)

Akibat 2.8.1

Misal vektor acak Y n x 1 berdistribusi $\mathrm{N}(\mu, \mathrm{V})$. Maka $Y'V^{-1}Y$ berdistribusi $\chi^2\left(n, \lambda = \frac{1}{2}\mu' V^{-1}\mu\right)$

Bukti (lihat Graybill 1976, hal. 127)

Teorema 2.9

Jika vektor acak Y n x 1 berdistribusi $N(\mu, \Sigma)$ dengan Σ mempunyai peringkat n. Jika $A\Sigma B=0$ maka dua bentuk kuadratik $Y'AY$ dan $Y'BY$ independen.

Bukti (lihat Graybill 1976, hal 139)

2.7 Pendugaan Parameter

Salah satu bentuk inferensia statistika (pengambilan kesimpulan) terhadap parameter populasi adalah estimasi (dugaan). Dalam estimasi yang dilakukan adalah menduga/memperkirakan parameter dengan penduga yang sesuai ("terbaik").

Definisi 2.10

Misal *Y_1, Y_2, ..., Y_n* adalah sampel pengamatan dengan pdf $f_Y(y,\theta), \theta \in \Omega$. Misalkan *t(Y)* adalah penduga untuk *c(θ)* maka *t(Y)* didefinisikan sebagai Penduga varians minimum takbias seragam atau *Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator* (UMVUE) untuk *c(θ)* jika dan hanya jika *t(Y)* memenuhi (1) dan (2) dibawah ini untuk semua θ dalam Ω

1. $E[t(Y)] = c(\theta)$, yaitu *t(Y)* penduga takbias dari *c(θ)*
2. $Var[t(Y)] \leq Var[t^*(Y)]$, dengan $t^*(Y)$ adalah penduga takbias lainnya dari c(θ)

(Graybill 1976, hal. 73)

Teorema 2.10

Model linear umum $Y = X\beta + \varepsilon$ dengan $E(\varepsilon) = 0$ dan $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ penduga dengan metode kuadrat terkecil untuk β dan σ^2 adalah

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}Y'[I - X(X'X)^{-1}X']Y$$

Bukti (lihat Graybill 1976, hal. 217)

Teorema 2.11 (Gauss Markov)

Misal $Y = X\beta + \varepsilon$ dimana X adalah matriks n x (k+1) berperingkat penuh, β adalah vektor parameter tidak diketahui (k+1) x 1, dan ε adalah vektor acak n x 1 dengan mean 0 dan varians $\sigma^2 I$. Penduga kuadrat terkecil $\hat{\beta}$ merupakan penduga linear terbaik tak bias bagi β.

Bukti (lihat Myers dan Milton 1991, hal. 90)

2.8 Metode Model Reduksi

Dalam desain model, tidak selalu dijumpai bahwa matriks X berperingkat penuh. Kondisi ini menyebabkan pendugaan parameter θ tidaklah unik. Oleh karena itu, ada beberapa metode yang dapat digunakan agar X berperingkat penuh antara lain model reduksi.

Misalkan ditetapkan model terkendala sebagai berikut :

$$Y = X\theta + \varepsilon \qquad (2.10)$$

Kendala Gθ = g

dengan Y adalah n vektor pengamatan, X adalah desain matriks berukuran n x p dengan peringkat q dan $q < p$, θ adalah p vektor parameter yang tidak diketahui, ε adalah n vektor error yang berdistribusi normal dengan vektor mean 0 dan varians $\sigma^2 I$, dan G adalah matriks p x q berperingkat q.

Pertama, definisikan permutasi matriks T sedemikian rupa sehingga

$$\theta_1 = T\theta$$

dengan $T'T = I$

Kendala pada (2.10) menjadi $G_1\theta_1 =$ g

Model (2.10) dapat di tulis

$$Y = XT'T\theta + \varepsilon$$

Atau

$$Y = X_1\theta_1 + \varepsilon \qquad (2.11)$$

Kendala $G_1\theta_1 =$ g

Dengan $X_1 = XT'$ dan $\theta_1 = T\theta$

Asumsikan bahwa θ_1 dan G_1 dapat dipartisi sehingga kendala dapat ditulis :

$$G_{11}\theta_{11} + G_{22}\theta_{22} = \mathrm{g}$$

dengan G_{11} adalah matriks berukuran q x q berperingkat q. Penyelesaian untuk θ_{11} adalah

$$\theta_{11} = G_{11}^{-1}\mathrm{g} - G_{11}^{-1}G_{12}\theta_{12}$$

Selanjutnya partisikan matriks X_1 , menjadi $X_1 = [X_{11} \quad X1_2]$ dan subtitusikan ke dalam (2.11) sehingga diperoleh

$$Y_r = X_r\theta_r + \varepsilon \qquad (2.12)$$

Dengan $Y_r = Y - X_{11}G_{11}^{-1}\mathrm{g}$; $\quad X_r = [X_{12} - X_{11}G1_1^{-1}G_{12}]$; dan $\theta_r = \theta_{12}$

Model (2.13) disebut dengan model tak terkendala berperingkat penuh

(Hocking, 1985)

2.9 Pengujian Hipotesis

Definisi 2.11

Pada model linear umum, bentuk umum hipotesis ditetapkan sebagai

$$H\beta = h$$

dengan $H\beta = h$ adalah himpunan persamaan yang konsisten, H adalah matriks q x p berperingkat q, β vektor parameter p x1 dan h vektor q x1.

(Graybill 1976, hal. 184)

Hipotesis yang akan diuji dilambangkan dengan H_0 (hipotesis nol) dan disertai dengan H_a (hipotesis alternatif). Hipotesis alternatif otomatis tidak ditolak jika hipotesis nol ditolak.

Teorema 2.12

Dalam model linear umum $Y = X\beta + \varepsilon$ dan ε berdistribusi $N(0, \sigma^2 I)$, Λ adalah statistik uji *Generalized Likelihood Ratio* (*GLR)* untuk menguji hipotesis

$$H_0: H\beta = h \text{ dengan alternatif } H_a: H\beta \neq h$$

Dengan statistik uji

$$\Lambda = \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{\hat{\sigma}_\omega^2 - \hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\Omega^2}\right) = \left[\frac{W'\left(I-TT'\right)W - Y'(I-XX')Y}{Y'(I-XX')Y}\right]\left(\frac{n-p}{q}\right) \tag{2.13}$$

atau

$$\Lambda = \left[\frac{(H\hat{\beta}-h)'\left[H(X'X)^{-1}H'\right]^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{Y'(I-XX')Y}\right]\left(\frac{n-p}{q}\right) \tag{2.14}$$

Disamping itu Λ berdistribusi F(q, n-p, λ), dengan

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\left(H\hat{\beta} - h\right)'\left[H(X'X)^{-1}H'\right]^{-1}\left(H\hat{\beta} - h\right) \tag{2.15}$$

Uji *GLR* dengan taraf signifikansi α sebagai berikut : tolak H_0 jika dan hanya jika Λ memenuhi $\Lambda \geq F_{\alpha:q,n-p}$ dengan $F_{\alpha:q,n-p}$ adalah titik kritis dengan peluang α dari distribusi *F* dengan derajat bebas *q* dan *n-p*.

Bukti (lihat Graybill1976, hal. 188)

Dalam membuat keputusan pada pengujian hipotesis kemungkinan terjadi suatu kesalahan. Terdapat dua macam kesalahan yaitu kesalahan tipe I dan kesalahan tipe II, untuk lebih jelas disajikan pada tabel berikut :

Tabel 2.1 Kesalahan dalam pengujian hipotesis

	H_0 benar	**H_0 salah**
Tidak menolak H_0	Keputusan benar $(1-\alpha)$	Kesalahan tipe II (β)
Menolak H_0	Kesalahan Tipe I (α)	Keputusan benar $(1-\beta)$

Kesalahan tipe I (α) adalah peluang menolak H_0 dimana H_0 bernilai benar. Sedangkan kesalahan tipe II (β) adalah peluang tidak menolak H_0 dimana H_0 salah. Menolak H_0 dimana H_0 salah merupakan keputusan yang benar, peluang keputusan tersebut disebut sebagai kuasa uji. Sehingga kuasa uji adalah peluang menolak H_0 dimana H_0 salah.

2.10 Interval Kepercayaan

Interval kepercayaan merupakan kisaran nilai yang dibuat dari data sampel dimana parameter populasi cenderung dalam kisaran tersebut dengan probabilitas yang spesifik. Interval kepercayaan tersebut mencangkup batas dari nilai kisaran yang terdiri dari batas atas maupun batas bawah. Penelitian Zerbe (1978) menunjukan penggunaan teorema Fieller dalam model linear umum untuk menghitung batas kepercayaan (batas bawah dan batas atas) dari ratio fungsi linear parameter. Syarat keberlakuan dari penelitian tersebut adalah model (2.4) dengan matriks X berperingkat penuh dan ε bersdistribusi $N(0, \sigma^2 I)$.

Misalkan akan di bangun batas kepercayaan untuk rasio

$$\rho = \frac{K\prime\beta}{L\prime\beta} \tag{2.16}$$

dengan *K* dan *L* merupakan vektor konstanta *p* x 1 yang diketahui.

$$T = \frac{K\prime\hat{\beta} - \rho L\prime\hat{\beta}}{\left[\sigma^2\{K'\,(X'X)^{-1}K - 2\rho K'\,(X'X)^{-1}L + \rho^2 L'(X'X)^{-1}L\}^{\frac{1}{2}}\right]} \tag{2.17}$$

mempunyai distribusi *t-student* dengan derajat bebas *n-p.*

$100(1-\alpha)\%$ batas kepercayaan untuk ρ dapat ditentukan dengan argumen Fieller :

$$1 - \alpha = P[-t \leq T \leq t] = P[A\rho^2 + B\rho + C \leq 0] \tag{2.18}$$

dengan

$$A = \left(L'\hat{\beta}\right)^2 - t^2 L'\,(X'X)^{-1}L\hat{\sigma}^2 \tag{2.19}$$

$$B = 2\left[t^2 K'\,(X'X)^{-1}L\hat{\sigma}^2 - \left(K'\hat{\beta}\right)\left(L'\hat{\beta}\right)\right] \tag{2.20}$$

$$C = \left(K'\hat{\beta}\right)^2 - t^2 K'\,(X'X)^{-1}K\hat{\sigma}^2 \tag{2.21}$$

Untuk membuktikan (2.19) – (2.21) lihat (Mustofa 2006, hal.35)

Misalkan a, b dan c melambangkan nilai pengamatan peubah acak diatas, $100(1-\alpha)\%$ kita percaya bahwa ρ terdapat pada interval

$$\left[\frac{\left(-b-\left(b^2-4ac\right)\right)^{1/2}}{2a}, \frac{\left(-b+\left(b^2-4ac\right)\right)^{1/2}}{2a}\right] \tag{2.22}$$

Dengan syarat bahwa $a > 0$ dan $b^2 - 4ac > 0$