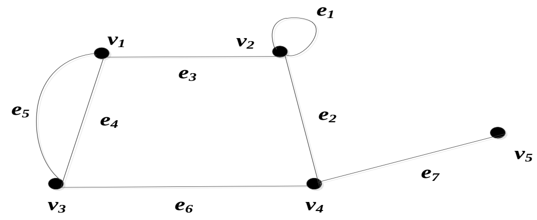
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan konsep dasar graf, graf pohon dan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf sebagai landasan teori pada penelitian ini

2.1 KONSEP DASAR GRAF

Konsep dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf G adalah himpunan terurut ($V(G)$, $E(G)$), dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G)$ menyatakan himpuanan sisi yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf G, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*Neigborhood*) dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.

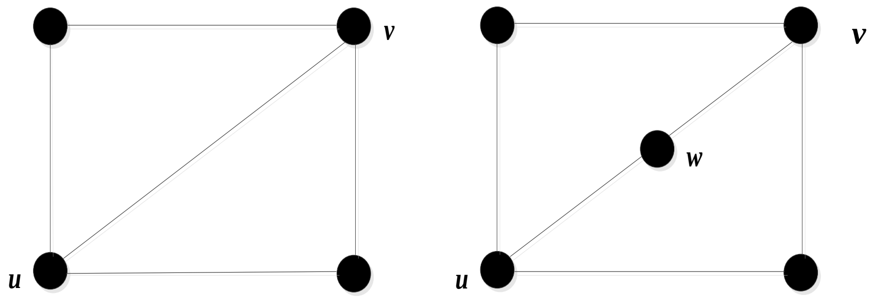


Gambar 2. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Pada Gambar 2 graf (*V*, *E*), $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik v_3 bertetangga dengan titik v_1 dan v_4 sedangkan v_1 dan v_3 menempel dengan e_4 dan e_5 . Sebaliknya, sisi e_4 menempel pada titik v_1 dan titik v_3. $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$.

Derajat suatu titik *v* pada graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v*, dinotasikan dengan *d(v)*. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat 1. Pada Gambar 2 $d(v_1) = 3,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 3,\ d(v_4) = 3$ dan v_5 adalah daun karena berderajat satu.

Pada graf *G*, jika *x* = *uv* adalah garis pada graf *G* dan *w* bukan sebuah titik pada graf *G*, maka *x* disubdivisi oleh titik *w* pada graf *G*, apabila titik *w* ditempatkan / ditambahkan pada garis *x*, sehingga terbentuk garis *uw* dan *wv* (Harary, 1994)



Gambar 3. Graf G dan Graf G yang telah disubdivisi

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau *loop* disebut graf sederhana. Graf pada Gambar 2 bukan merupakan graf sederhana karena pada graf tersebut terdapat *loop*, yaitu pada titik v_2 .

Pada graf terhubung G, jarak diantara dua titik x dan *y* adalah panjang lintasan terpendek diantara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan d(*x*, y). Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 2 adalah $v_1 - e_4 - v_3 - e_6 - v_4 - e_2 - v_2 - e_1 - v_2 - e_2 - v_4 - e_7 - v_5$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Graf *G* dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Pada Gambar 2 contoh lintasan adalah $v_2 - e_3 - v_1 - e_4 - v_3 - e_6 - v_4 - e_7 - v_5$.

Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan gambar pada Gambar 2. adalah $v_1 - e_4 - v_3 - e_6 - v_4 - e_2 - v_2 - e_3 - v_1$.

Lemma yang menyatakan kaitan antara jumlah derajat semua titik pada suatu graf G dengan banyak sisinya adalah sebagai berikut;

Lemma 2.1 (Deo, 1989) *Misalkan G(V,E) adalah graf terhubung dengan* $|E| = e$, *maka :*

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

Sebagai contoh pada graf Gambar 2 adalah $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5)$ = $3 + 4 + 3 + 3 + 1$ = 14 = dua kali jumlah sisi .

Teorema 2.1 (Deo, 1989) *Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.*

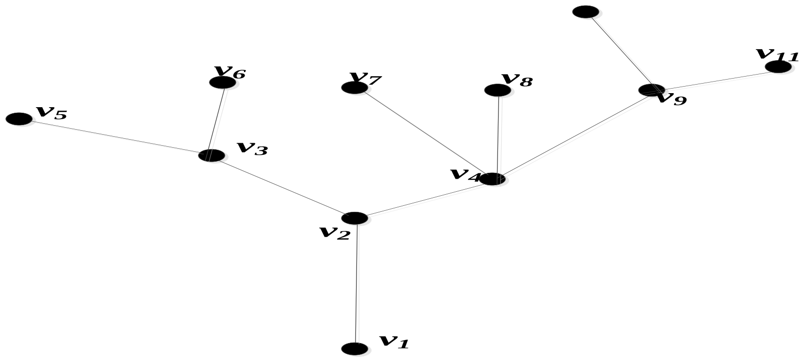
Bukti : Misalkan V_{genap} dan V_{ganjil} masing – masing adalah himpunan simpul yang berderajat genap dan himpunan simpul yang berderajat ganjil pada *G(V,E).* Maka persamaan dapat ditulis sebagi berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{Vgenap} d(v_J) + \sum_{Vganjil} d(v_k) \qquad (2.1.1)$$

Karena $d(v_J)$ untuk setiap $v_J \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri Persamaan (2.1.1) juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalam V_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap. ■

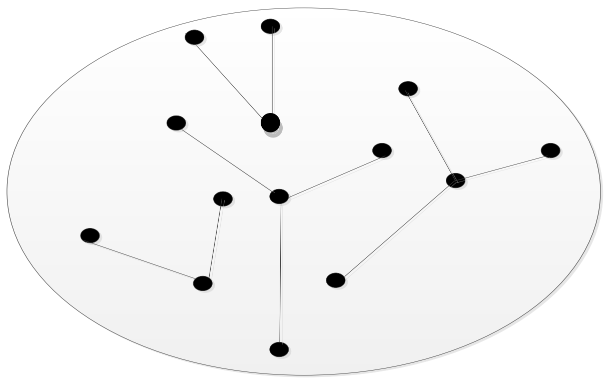
2.2 GRAF POHON

Graf pohon (*tree*) adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus. Suatu graf yang setiap titiknya mempunyai derajat satu disebut daun (*pendant vertex*).



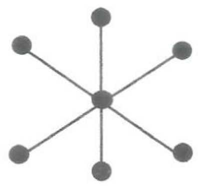
Gambar 4. Contoh pohon *G* dengan 11 titik

Pada Gambar 3, graf $G(V,E)$ merupakan graf pohon karena graf tersebut merupakan graf terhubung dan tidak memuat siklus. Titik $v_1, v_5, v_6, v_7 v_8, v_{10}, v_{11}$ disebut *pendant vertex* atau daun. Gabungan dari beberapa pohon disebut hutan (*forest*).



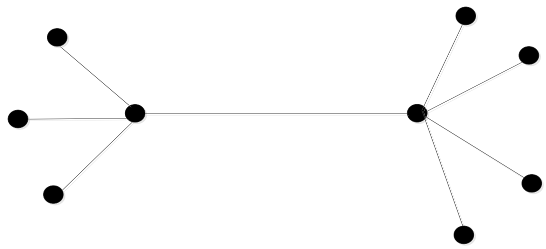
Gambar 5. Contoh hutan (forest)

Selanjutnya, akan diberikan definisi beberapa kelas graf pohon. Suatu graf bintang $K_{1,n}$ (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat *n* yang disebut pusat dan titik lainnya berderajat satu (Chartrand dkk., 1998).



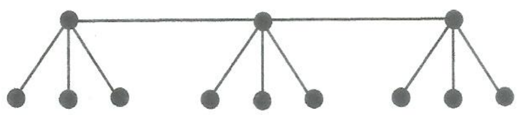
Gambar 6. Contoh graf bintang $K_{1,6}$

Graf pohon disebut graf bintang ganda (*double star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut berderajat a+1 dan b+1, dinotasikan dengan $S_{a,b}$, (Chartrand dkk., 1998)



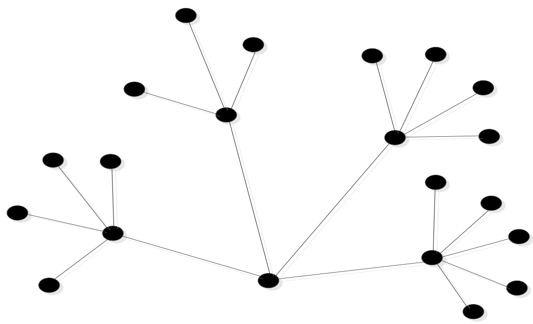
Gambar 7. Contoh graf bintang ganda $S_{3,4}$

Graf ulat (*caterpillar graf*) adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk., 1998).



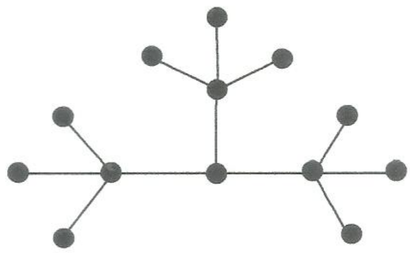
Gambar 8. Contoh graf ulat

Misalkan $G_i = K_{1,n_i}$ untuk setiap $i \in [1, k]$ dan $n_i \geq 1$. Graf amalgamasi bintang tak seragam, $S_{k,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$, untuk $k \geq 2$ adalah graf pohon yang diperoleh dengan menyatukan sebuah daun dari setiap graf G_i. Titik penyatuan tersebut dikatakan sebagai *titik pusat* dari $S_{k,(n_1,n_2,n_3,n_4)}$, dinotasikan dengan *x*. Titik – titik yang berjarak 1 dari titik pusat disebut dengan *titik antara*, dinotasikan dengan l_i untuk $i \in [1, k]$. Titik daun ke-j dari titik l_i dinotasikan dengan l_{ij} untuk $j \in [1, n_j - 1]$ (Carlson, 2006).



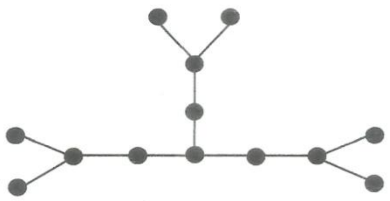
Gambar 9. Contoh graf amalgamasi bintang tak seragam $S_{4,(5,4,5,6)}$

Graf amalgamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah amalgamasi dari k buah graf bintang $K_{1,m}$ bila $n_i = m$, untuk setiap *i* (Asmiati dkk., 2011).



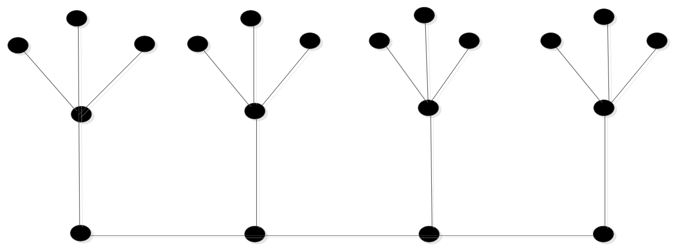
Gambar 10. Contoh graf amalgamasi bintang $S_{3,4}$

Graf pohon pisang, $B_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari *n* buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k ke suatu titik baru (Chen dkk.(1997)).



Gambar 11. Contoh graf pohon pisang $B_{3,4}$

Graf kembang api seragam, $F_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui sebuah lintasan (Chen dkk.(1997)).



Gambar 12.Contoh graf kembang api $F_{4,5}$

Selanjutnya diberikan beberapa teorema mengenai graf pohon sebagai berikut :

Teorema 2.2 (Harsfield dan Ringel, 1994) *Jika G adalah pohon dengan p titik (vertex) dan q sisi (edge), maka $p = q + 1$.*

Bukti: Jika G adalah pohon dengan satu sisi maka teorema benar untuk G. Asumsikan teorema benar untuk semua pohon dengan sisi kurang dari n, artinya untuk $q \leq n$, maka $p = n + 1$. Misal G pohon dengan n sisi. Pilih satu lintasan terpanjang di G dari a ke b . Titik a harus berderajat 1, karena kalau tidak lintasan akan menjadi lebih panjang atau terbentuk siklus di G . Selanjutnya buang titik a, akibatnya sisi terhubung dengan titik a terbuang. Sehingga, pohon terbentuk dengan $(p-1)$ dan $(n-1)$ sisi dengan asumsi $p-1=(n-1)+1$ diperoleh $p-1=n$ atau $p=n+1$. ■

Teorema 2.3 (Harsfield dan Ringel, 1994) *Graf G adalah pohon jika dan hanya jika ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik tersebut.*

Bukti:

(=>) Akan ditunjukkan graf G adalah pohon maka ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik.

Asumsikan G adalah pohon, misal v_1 dan v_2 titik-titik di G, maka pohon dapat dihubungkan lintasan v_1 ke v_2. Anggaplah terdapat dua lintasan dari v_1 ke v_2, $P_1 = v_1\, u_1\, u_2 \ldots u_i v_2$ dan $P_2 = v_1\, w_1\, w_2 \ldots w_m v_2$. Jika u_1 adalah jarak dari w_1, selanjutnya P_1 sampai ditemukan suatu titik yang terdapat dalam P_1 yang juga ada dalam P_2. Maka akan terdapat siklus . Jika $u_1 = w_1$, maka dapat dilihat pada u_2 . Untuk beberapa i, $u_i \neq w_i$, karena ada dua lintasan $v_1 v_2$ sebagai asumsi. Selanjutnya P_1 mulai dari u_{i-1} sampai ditemukan suatu titik yang ada dalam P_1 yang juga ada dalam P_2 dan selanjutnya pindah ke P_2 kembali ke u_{i-1}, dan akan didapatkan siklus lagi. Tetapi G adalah pohon, sehingga tidak ada siklus. Jadi asumsi bahwa ada dua $v_1 v_2$ lintasan salah.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan ada terdapat tepat satu lintasan di antara kedua titik maka graf G adalah pohon .

Asumsikan G adalah graf dengan tepat satu lintasan di antara dua titik . Pertama perhatikan G terhubung. Anggaplah bahwa G memuat siklus $v_1v_2 \ldots v_nv_1$. Jelas bahwa ada dua lintasan dari v_1 ke v_n. Ini kontradiksi , karena G mempunyai tepat satu lintasan di antara dua titik. Jadi graf G tidak memuat siklus dan G adalah pohon. ■

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk.(2002). Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Pewarnaan titik pada graf adalah $c = V(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}$ dengan syarat untuk setiap titik bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf *G* disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk.(2002). Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf *G* dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk *u* dan *v* yang bertetangga di *G*. Misalkan C_i himpunan titik – titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari *V(G)*. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah *k*-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2)$,..., $d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_1)$ = min $\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap

G mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut pewarnaan lokasi *G*. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari *G*, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Berikut ini Chartrand dkk.(2002) telah memberikan teorema dasar dari bilangan kromatik lokasi suatu graf.

Teorema 2.4 *(Chartrand dkk, 2002) Misalkan c adalah pewarnaan pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga d(u,w)=d(v,w) untuk setiap* $w \in V(G) - \{u, v\}$, *maka* $c(u) \neq c(v)$. *Secara khusus, jika u dan v titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga* $N(u) \neq N(v)$, *maka* $c(u) \neq c(v)$.

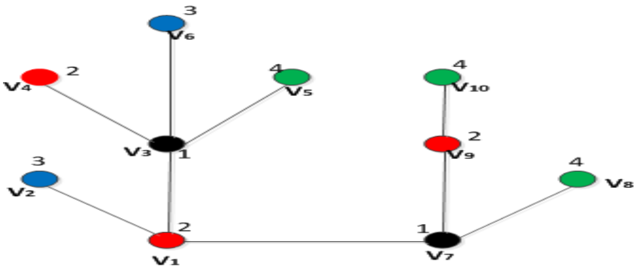
Bukti : misalkan *c* adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung *G* dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik – titik *G* ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik *u* dan *v* berada dalam kelas warna yang sama, misalkan C_i dari Π. Akibatnya $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, C_i) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga *c* bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$.■

Akibat dari teorema tersebut, dapat ditentukan batas bawah trivial bilangan kromatik lokasi graf.

Akibat 2.1 *(Chartrand dkk, 2002) Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka* $\chi_L(G) \geq k+1$.

Bukti : Misalkan *v* adalah satu titik yang bertetangga dengan *k* daun $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di *G*. Berdasarkan Teorema 2.4 , setiap pewarnaan lokasi di *G* mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1,2, \ldots, k$. Karena *v* bertetangga dengan semua x_i maka *v* harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k+1$. ■

Selanjutnya, akan diberikan contoh menentukan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf *G* seperti Gambar 13 berikut ini :



Gambar 13. Pewarnaan lokasi minimum pada graf *G*

Diberikan graf *G* seperti terlihat pada Gambar 13 akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf *G*. Karena terdapat titik v_3 yang memiliki 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$. (2.1.2)

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf *G*. Titik – titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut : $C_1 = \{v_3, v_7\}$; $C_2 = \{v_1, v_4, v_9\}$; $C_3 = \{v_2, v_6\}$; $C_4 = \{v_5, v_8, v_{10}\}$. Kode warnanya adalah $c_\Pi(v_1) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_2) = (2,1,0,3)$; $c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$; $c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_5) =$

$(1,2,2,0)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_7) = (0,1,2,1)$;$c_\Pi(v_8) = (1,2,3,0)$; $c_\Pi(v_9) = (1,0,3,1)$; $c_\Pi(v_{10}) = (2,1,4,0)$. Karena kode warna semua titik di $V(G)$ berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$ (2.1.3)

Berdasarkan Persamaan (2.1.2) dan (2.1.3) diperoleh $\chi_L(G) = 4$. ■

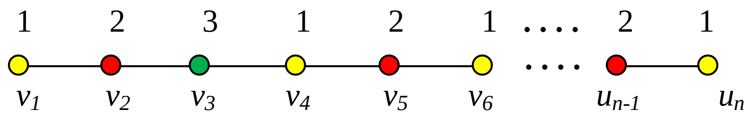
Teorema 2.5 *(Chartrand dkk, 2002) Misalkan k adalah derajat maksimum di graf G, maka* $\chi_L(G) \leq 1 + k$.

Bukti : Misalkan *v* adalah satu titik yang berderajat maksimum *k* daun x_1, x_2, ...x_k di *G*. Berdasarkan Teorema 2.4 dan Akibat 2.1, setiap pewarnaan lokasi di *G* mempunyai warna yang berbeda setiap x_i, i = 1, 2, 3,...,*k*. Karena *v* berderajat maksimum *k* dengan x_i, maka *v* harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \leq 1 + k$. ■

Berikut ini akan diberikan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf sederhana.

Teorema 2.6 *(Chartrand dkk, 2002) Bilangan kromatik lokasi graf lintasan* $P_n (n \geq 3)$ *adalah 3.*

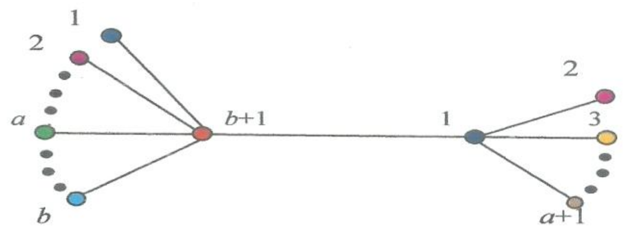
Bukti : Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelaslah bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.5 $\chi_L(G) \leq 1 + k$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$, maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $\chi_L(G) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■



Gambar 14. Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan P_n

Teorema 2.7 *(Chartrand dkk, 2002) Untuk bilangan bulat a dan b dengan* $1 \leq a \leq b$ *dan* $b \geq 2$ $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.

Bukti : Berdasarkan Akibat 2.4, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan (b+1) warna sebagaimana terlihat pada Gambar 14. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. ■



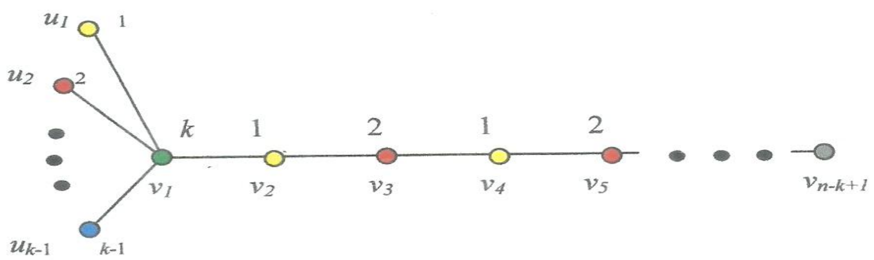
Gambar 15. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$

Chartrand dkk. (2003) telah mendapatkan bentuk graf pohon berorde $n \geq 5$ yang memiliki bilangan kromatik lokasi dari 3 sampai n, kecuali n-1, sebagaimana torema berikut ini.

Teorema 2.8 ***(****Chartrand dkk, 2002) Terdapat Pohon berorde* $n \geq 5$ *yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika* $k \in (3,4,\dots,n-2,n)$.

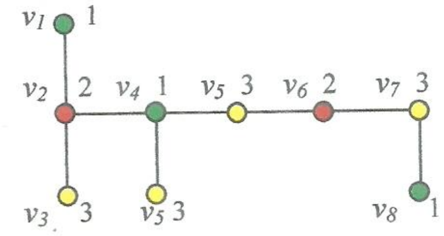
Bukti : Misalkan $k \in (3,4,\dots,n-2,n)$. Untuk $k = 3$, misalkan $T = P_n$; untuk $k = n$, misalkan $T = K_{1,n-1}$. Sehingga diasumsikan bahwa $4 \leq k \leq n$-2. Misalkan T didapat dari lintasan P_{n-k+1}: $v_1, v_2, \dots, v_{n-k+1}$ dengan menambahkan k-1 titik baru $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ dan hubungkan setiap u_i, untuk $1 \leq i \leq k-1$ (lihat Gambar 16). Jadi $\chi_L(T)$ adalah pewarnaan lokasi, $\chi_L(T) \leq k$. Berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(T) \geq k$, maka $\chi_L(T) = k$. ■

Pewarnaan Teorema 2.8 dapat diberikan sebagai berikut :



Gambar 16. Pohon T berorde *n* dengan $\chi_L(T) = k$

Selanjutnya akan diberikan beberapa definisi tentang titik dominan dan *clear* path yang diambil dari Asmiati dkk. (2012). Misalkan *c* adalah *k*-pewarnaan lokasi pada graf *G(V,E)* dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_1, \dots, C_1\}$ adalah partisi dari *V(G)* yang diinduksi oleh *c*. Titik $v \in V(G)$ dikatakan suatu titik dominan jika $d(v, C_i) = 1$, jika $v \notin C_i$. Suatu lintasan yang menghubungkan dua titik dominan di graf G disebut *clear path*, jika semua titik internalnya bukan merupakan titik dominan.



Gambar 17. Graf *G* dengan 3 titik dominan

Titik dominan pada Gambar 17 adalah v_2, v_4, dan v_7. *Clear path* pada Gambar 17 adalah lintasan yang menghubungkan v_4 dan v_7 dimana tidak terdapat titik dominan dalam titik internalnya. Karena graf *G* pada Gambar 17 mempunyai bilangan kromatik lokasi tiga, maka panjang *clear path* dari graf *G* ganjil.

Lemma 2.1 (Asmiati dkk. 2012) *Diberikan graf G dengan* $\chi_L(G) = k$ *maka terdapat paling banyak k titik dominan di G dan masing-masing titik dominan memiliki warna yang berbeda.*

Bukti : Misalkan $v \in G$ merupakan titik dominan dan *G* adalah graf terhubung, maka $d(v, C_i) = 0$ untuk $v \in C_i$ dan $d(v, C_i) = 1$untuk $v \notin C_i$. Karena $\chi_L(G) = k$, maka kelas partisi Π memuat *k* kelas warna, katakan $C_1, C_1, \ldots, C_1$ dan setiap $x \in G$ memiliki kode warna yang berbeda. Oleh karena itu, *G* paling banyak memuat sebanyak *k* titik dominan dan masing – masing titik dominan pada *G* memiliki kode warna yang berbeda. ■

Lemma 2.2 (Asmiati dkk. 2012) *Misalkan graf G dengan* $\chi_L(G) = 3$ *, maka panjang dari setiap clear path di G adalah ganjil.*

Bukti : Misalkan *G* adalah graf terhubung dan P adalah *clear path* yang menghubungkan 2 titik dominan *x* dan *y* di *G*. Asumsikan *c(x)* = 1 dan *c(y)=2*. Karena P adalah *clear path* maka warna dari titik titik didalamnya harus 1 dan 2 berturut-turut. Misalkan *x* dan *y* akan membentuk barisan alternating. Karena banyaknya titik dalam *clear path* P harus genap, maka panjang P ganjil. ■

Lemma 2.3 (Asmiati dkk. 2012) *Misalkan G adalah graf terhubung dengan* $\chi_L(G) = 3$ *Jika G memuat 3 titik dominan, maka terdapat 3 titik dominan dalam suatu lintasan.*

Bukti : Misalkan *G* adalah graf terhubung dan *x, y* dan *z* adalah tiga titik dominan dari graf *G*. *P* adalah lintasan yang menghubungkan *x* dan *z*. Asumsikan *y* tidak terdapat dalam lintasan *P*. Karena G adalah graf terhubung maka terdapat titik dalam *u*, sehingga *u* memiliki jarak terpendek (dibandingkan dengan titik dalam lainnya) ke *y*. Lintasan L_1 menghubungkan *x* ke *u* kemudian ke *y*. Sehingga lintasan L_1 adalah *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya lintasan tersebut adalah ganjil. Sekarang, pertimbangkan lintasan L_2 yang menghubungkan *y* ke *u* kemudian ke *z*. Maka, L_2 merupakan *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya adalah ganjil. Kedua fakta tersebut menyatakan panjang dari lintasan yang menghubungkan *x* ke *u* ditambah dengan panjang lintasan yang menghubungkan *u* ke *z* panjangnya adalah genap, kontradiksi. ■

Selanjutnya Asmiati (2012) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf kembang api tak seragam. Graf kembang api tak seragam, $F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$ diperoleh dari *n* buah graf bintang $S_{k_i}, i \in [1, n]$ dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_{k_i} melalui sebuah lintasan.

Misalkan $V(F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}) = \{ x_i, m_i, l_{ij} \mid i = 1,2,\dots, n; j=1,2,\dots,k_i - 2\}$ dan $E(F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}) = \{x_i x_{i+1} \mid i = 1,2,\dots, n-1\} \cup \{x_i y_i, m_i l_{ij} \mid i = 1,2,\dots, n; j=1,2,\dots,k_i - 2\}$. Jika $k_{maks} = maks\ \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ maka subgraf $S_{k_{maks}}$ disebut sebagai *subgraf bintang maksimum* pada graf kembang api $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$. Dalam hal terdapat *p* buah subgraf $S_{k_{maks}}$, maka masing-masing subgraf, dari kiri ke kanan, dinotasikan dengan $S^i_{k_{maks}}$, dengan $1 \leq i \leq p$.

Definisi 2.1 Misalkan S_{k_i} dan $S_{k_j} \subset F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$, dengan $1 \leq i \neq j \leq m$. Jika $k_i = k_j \neq k_{maks}$, sehingga

1. $d(x_i, x_m) = d(x_j, x_m)$, dengan x_m titik pusat dari $S_{k_{maks}}$, atau
2. $d(x_i, x_o) = d(x_j, x_p)$, dengan x_o dan x_p berturut-turut adalah titik pusat dari $S_{k_{maks}}$ yang berbeda,

   maka subgraf S_{k_i} dan S_{k_j} disebut *subgraf bintang berjarak sama*.

Teorema 2.9. *(Asmiati, 2012) Misalkan $S_{k_{maks}}$, adalah subgraf bintang maksimum dari $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ dan p menyatakan banyaknya subgraf $S_{k_{maks}}$, Maka, untuk $n_{maks} \geq 2$, bilangan kromatik lokasi graf kembang api $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ adalah*

$$\chi_L(F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}) = \begin{cases} k_{maks} - 1, & \text{jika } p \leq k_{maks} - 1, \\ k_{maks}, & \text{jika } p > k_{maks} - 1. \end{cases}$$

Bukti :

Kasus 1. Akan ditentukan batas bawah trivial untuk $p \leq k_{maks} - 1$. Karena banyaknya daun pada subgraf maksimal adalah $k_{maks} - 2$, maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}) \geq k_{maks} - 1$, untuk $p \leq k_{maks} - 1$.

Akan ditunjukkan bahwa kode warna semua titik di $F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$), untuk $p \leq k_{maks} - 1$ berbeda. Pandang sebarang dua daun berbeda u $\in V(S_{k_i})$ dan v $\in V(S_{k_j})$ dengan $c(u) = c(v)$.

- Jika $k_i = k_j = k_{maks}$ maka $c_\Pi(\mathrm{u}) = c_\Pi(\mathrm{v})$, karena terbedakan pada ordinat dari warna $m_i = m_j$.
- Jika salah satu dari k_i atau k_j adalah k_{maks} , misalnya $k_i = k_{maks}$ dan $k_j < k_{maks}$, maka kode warna dari u dan$v$ terbedakan pada warna daun di S_{k_i} yang tidak termuat di S_{k_j}

Berdasarkan berdasarkan semua kasus diatas, dapat disimpulkan bahwa kode warna dari semua titik di $F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}$, untuk $p \leq k_{maks} - 1$ berbeda. Jadi

$\chi_L(F_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}) = k_{maks} - 1$ untuk $p \leq k_{maks} - 1$. ■

Kasus 2. Akan ditentukan batas bawah trivial untuk $p > k_{maks} - 1$. Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh $\chi_L(F^*_{n,(k_1,k_2,\ldots,k_n)}) \leq k_{maks} - 1$. Tetapi, akan ditunjukkan bahwa $k_{maks} - 1$ warna tidaklah cukup untuk mewarnai. Untuk kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan- (k_{maks} – 1) lokasi c pada $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$, untuk $p > k_{maks} - 1$. Karena $p > k_{maks} - 1$, maka terdapat $i, j, i \neq j$, sedemikian sehingga $\{c(l_{ih}) / \; h = 1, 2, \dots, k_{maks} - 2\} = \{c(l_{jl}) / \; l = 1, 2, \dots, k_{maks} - 2\}$. Akibatnya, kode warna dari m_i dan m_j akan sama, suatu kontradiksi.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ untuk $p > k_{maks} - 1$. Untuk menunjukkan $\chi_L(F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}) \leq k_{maks}$, pandang pewarnaan lokasi c pada $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ sebagai berikut:

- $c(x_i) = 1$ jika i ganjil dan $c(x_i) = 3$ jika i genap;
- $c(m_1) = k_{maks}$ dan $c(m_i) = 2$ untuk i lainnya;
- Jika $A = \{1, 2, \dots, k_{maks}\}$, didefinisikan:

$$\{c(l_{ij}) / \; l = 1, 2, \dots, k_{maks} - 2\} = \begin{cases} A \backslash \{1, k_{maks}\} & \text{jika } i = 1, \\ A \backslash \{2, k_{maks}\} & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Mudah untuk menunjukkan bahwa kode warna semua titik di $F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ untuk $p > k_{maks} - 1$ berbeda. Akibatnya, c merupakan pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(F_{n,(k_1,k_2,\dots,k_n)}) = k_{maks}$, untuk $p > k_{maks} - 1$. ■