II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep-konsep Matriks

Definisi Matriks

Suatu matriks didefinisikan dengan huruf kapital yang dicetak tebal, misalnya **A, B, X, Y**. Elemen-elemen di dalamnya disebut skalar yang berasal dari lapangan F. Kita asumsikan lapangannya adalah bilangan real, kecuali untuk syarat yang sudah ditentukan sebelumnya. Himpunan bilangan real dinotasikan dengan R. Matriks **A** memiliki element yang dinotasikan dengan a_{ij} , dimana *j* merupakan banyaknya kolom, dan *i* merupakan banyaknya baris.

$$\mathbf{A} = [\, a_{ij} \,]$$

Suatu matriks identitas dinotasikan dengan **I** (untuk menunjukkan ukuran dari matriks identitas, biasanya digunakan notasi $\mathbf{I}_n$ untuk merepresentasikan matriks identitas *n x n*), dan **0** untuk notasi dari matriks null.

Inverse Matriks

Misalkan **A** adalah matriks bujur sangkar, jika ada matriks **B** sedemikian sehingga **AB** = **I**, maka **B** disebut sebagai inverse dari matriks **A**, dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$. Jika **AB** = **I**, maka dapat ditunjukkan pula bahwa **BA** = **I**. Dimana bila ada matriks **B** sedemikian sehingga **AB** = **BA** = **I**. Matriks **A** yang memiliki inverse dikatakan non-singular, sebaliknya apabila matriks **A** tidak memiliki inverse maka dikatakan singular.

Transpose Matriks

Jika baris dan kolom dari matriks **A** saling bertukar, menghasilkan matriks yang disebut sebagai transpose dari **A** dan dinotasikan sebagai **A**'. Jika **A** memiliki ukuran *m x n*, maka **A'** memiliki ukuran *n x m*.

Rank Matriks

Matriks $\mathbf{A}_{nxm}$ dikatakan mempunyai rank r $\leq$ min (m,n). Jika submatriks nonsingular terbesarnya adalah *r x r*.

Trace Matriks

Suatu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama dikatakan matriks bujur sangkar, jika **A** matriks n x n maka trace (**A**) didefinisikan sebagai berikut :

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Generalized Inverse

Misalkan **A** adalah matriks m x n, jika ada matriks $\mathbf{A}^{-}$ yang memenuhi kondisi berikut,

a. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
b. $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-} = \mathbf{A}^{-}$
c. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-})' = \mathbf{A}^{-}\mathbf{A}$
d. $(\mathbf{A}^{-}\mathbf{A})' = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-}$

jika terpenuhi kondisi a) maka $\mathbf{A}^{-}$ disebut *generalized inverse* (g-inverse) dari **A.** Jika terpenuhi kondisi a) dan b) maka disebut *generalized reflexive inverse* dari **A,** dan apabila keempat kondisi tersebut terpenuhi maka disebut sebagai *Moore-Penrose pseudoinverse* (Graybill, 1983).

2.2 Definisi Desain Model

Model Linear Umum

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (1)$$

dimana,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

dinamakan desain model jika dan hanya jika **X** terdiri dari angka 0 dan 1, dan **X** memiliki bentuk tertentu. Dari (1) dengan rank [**X**] = k :

a. Jika p = k maka model dikatakan model berperingkat penuh

b. Jika k < p maka model dikatakan model berperingkat tak penuh

(Usman dan Warsono, 2009).

2.3 Definisi Fungsi *Estimable*

Misalkan dalam model linear umum $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, fungsi linear dari parameter $\boldsymbol{\beta}$, misalkan $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ dikatakan *estimable* jika dan hanya jika terdapat penduga tak bias $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}$ yang merupakan fungsi linear $\mathbf{Y}_i$ dari **Y** (Usman dan Warsono, 2009).

2.4 Karakteristik Estimabilitas

2.4.1 Teorema 1

(Karakteristik Estimabilitas Berdasarkan Matriks X)

Vektor **Lβ** adalah *estimable* dimana **L** adalah kombinasi linear dari baris **X**,

Y =Xβ + ε, jika dan hanya jika salah satu kondisi berikut terpenuhi :

a. **L = BX**, untuk sebarang matriks **B**

b. $\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{L}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X})$

c. $\boldsymbol{r}\{\boldsymbol{X}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{L})$, untuk suatu g-inverse $\boldsymbol{L}^{-}$

d. $\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}^{-}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$ untuk suatu g-inverse $\boldsymbol{X}^{-}$

e. $\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}_{l}^{-}$ adalah invarian untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X}_{l}^{-}$

f. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}_{l}^{-})$ adalah invarian untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X}_{l}^{-}$

g. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}_{l}^{-}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{L})$ untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X}_{l}^{-}$

Jika salah satu dari kondisi tersebut terpenuhi maka (c), (d), (f), dan (g) memenuhi untuk semua g-inverse $\boldsymbol{L}^{-}$ dan $\boldsymbol{X}^{-}$

(Alalouf and Styan, 1979).

2.4.2 Lemma 1

Untuk matriks kesesuaian **E** dan **F** dan untuk sebarang pilihan masing-masing g-inversenya $\boldsymbol{E}^{-}$ dan $\boldsymbol{F}^{-}$

a. $\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{r}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}^{-}\boldsymbol{E})\} = \boldsymbol{r}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^{-}\boldsymbol{F})\} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F})$

b. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{-})\boldsymbol{F}\} = \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-})\boldsymbol{E}\} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F})$

Bukti :

Karena matriks $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{F}\boldsymbol{E}^{-} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ adalah nonsingular, didapatkan

a. $$\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{G}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix}\right\} = \boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}^{-}\boldsymbol{E})\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{r}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}^{-}\boldsymbol{E})\}$$

$$\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{G}'\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix}\right\} = \boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^{-}\boldsymbol{F})\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}^{-}\boldsymbol{F})\} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F})$$

b. $$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})\boldsymbol{G}\} = \boldsymbol{r}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-})\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-})\boldsymbol{E}\} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})\boldsymbol{G}'\} = \boldsymbol{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{-})\boldsymbol{F}\end{pmatrix} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{r}\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{-})\boldsymbol{F}\}$$

(Marsaglia and Styan, 1974).

2.5 Uji Hipotesis

2.5.1 Teorema 2

Misal diberikan hipotesis**,** $\mathbf{H_0} : \mathbf{L\beta} = \mathbf{0}$ **vs** $\mathbf{H_1} : \mathbf{L\beta} \neq \mathbf{0}$**,** dimana $\mathbf{L\beta}$ merupakan kombinasi linear *estimable*. Model terbatas yang digunakan untuk memperoleh jumlah kuadrat karena hipotesis adalah,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

Bukti :

Misalkan **F** full rank matriks $p\ x\ \overline{p-k}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})$, catatan bahwa $\mathbf{F'F} = \mathbf{I}_{p\text{-}k}$,

misalkan **L’** matriks p x p [**L’,F**] , dimana $\mathbf{K}^{-1}$ = [$\boldsymbol{L}^{-}$**,F],** maka model linear-nya dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}\\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{XFF}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}\end{aligned}$$

pada saat hipotesis nolnya bernilai benar, $\mathbf{L\beta} = \mathbf{0}$ maka modelnya menjadi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \mathbf{XFF}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}\\ &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}\end{aligned}$$

model tersebut merupakan model yang diinginkan.

Jumlah kuadrat karena galat untuk model terbatas adalah

$$\boldsymbol{SSE_R} = \boldsymbol{y}'[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})]^{-}]\mathbf{y}$$

jumlah kuadrat karena galat untuk model linear adalah

$$\boldsymbol{SSE} = \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-})\boldsymbol{y}$$

dengan menggunakan *Principle of Conditional Error*, jumlah kuadrat karena hipotesisnya adalah

$$\boldsymbol{SSH_0} = \boldsymbol{SSE_R} - \boldsymbol{SSE} = \boldsymbol{y}'\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})]^{-}\}\,\boldsymbol{y}$$

(Milliken, 1971)

2.5.2 Teorema 3

Misalkan :

$$Q_1 = \boldsymbol{\sigma}^{-2}\boldsymbol{y}'\{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})]^{-}\}\,\boldsymbol{y}$$

$$Q_2 = \boldsymbol{\sigma}^{-2}\boldsymbol{y}'[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-}]\boldsymbol{y}$$

dan

$$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{N_n}(\boldsymbol{X\beta}, \boldsymbol{\sigma^2 I_n})$$

maka Q_1 adalah peubah acak berdistribusi nonsentral khi-kuadrat dengan derajat bebas *k* dan parameter nonsentralitas

$$½\,\sigma^2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}'^{-}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})]^{-})\boldsymbol{X}\boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta}$$

Q_2 adalah peubah acak berdistribusi sentral khi-kuadrat dengan derajat bebas *n-k* , dan Q_1 dan Q_2 adalah independen.

Bukti :

Untuk bentuk kuadrat **y'Ly** suatu peubah acak berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas *r*, matriks bentuk kuadratik **L**, harus idempoten dengan rank *r*.

Kondisi ini dengan mudah dapat diperiksa untuk Q_1 dan Q_2. Parameter nonsentralitas dari bentuk kuadratiknya adalah

$$½\, \sigma^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}')\ \boldsymbol{L}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y})$$

Parameter nonsentralitasnya dengan mudah dapat diperoleh untuk Q_1 dan Q_2. Produk dari dua matriks bentuk kuadrat adalah nol, yang merupakan syarat dan perlu agar kedua bentuk kuadratik independen (Milliken, 1971).

2.6 *Echelon* Baris Matriks X

Asumsikan model linear (1), **b'β** adalah fungsi *estimable* jika ada vektor **a**, *n x 1* sedemikian sehingga **b' = a'X** [Graybill, 1976]. Sebagai contoh, jika $\boldsymbol{\beta}' = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_p]$ dan kita tertarik untuk menduga $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ *estimable* jika ada **a** sedemikian sehingga **a'X** = [1, 0, ..., 0]. Bilamana **X** berperingkat penuh, $\mathbf{(X'X)^{-1}}$ ada, dan baris-baris matriks *p x n* ,$\mathbf{(X'X)^{-1}X'}$ sebagai himpunan vektor yang diperlukan karena $\mathbf{\{(X'X)^{-1}X'\}X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$. Dengan kata lain semua parameter **β** *estimable* jika **X** berperingkat penuh.

Jika **X** tidak berperingkat penuh, kita dapat mereduksinya ke dalam bentuk *echelon* baris untuk menentukan parameter **β** yang *estimable*. Materi ini mencakup rangkaian operasi matriks, seperti mengurangi baris satu sama lain, atau mengurangi dengan mengalikan baris satu sama lain, atau mengalikan baris dengan konstanta, atau pertukaran dua baris. Tujuannya untuk mendapatkan *k x p* submatriks terbesar [dimana rank(**X**) = k] berada dalam bentuk *echelon* baris dan sisa barisnya merupakan vektor nol. Setiap operasi baris ekuivalen dengan perkalian **X** oleh *n x n* matriks berperingkat penuh. Sebagai contoh, menggantikan baris kedua **X** dengan selisih antara baris kedua dan pertama ekuivalen dengan perkalian **X** oleh **A**, dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

Dengan melakukan operasi matriks yang sesuai, katakan *r* kali, bentuk *echelon* baris dari **X** dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathbf{A_r A_{r\text{-}1} \ldots A_1 X = X^*},$$

dimana setiap $\mathbf{A}_j$ adalah peringkat penuh matriks *n x n* dan X* ada dalam *echelon* baris. Dengan mendefinisikan $\mathbf{A} = \mathbf{A_r A_{r\text{-}1} \ldots A}_1$, perhatikan bahwa **A** adalah peringkat penuh matriks *n x n* , dan **AX** = **X***. Karena **X*** ada dalam *echelon* baris, bagian bawah submatriks (*n – k*) *x p* menjadi matriks null, oleh sebab itu kita hanya tertarik pada baris pertama *k* dari **X*** dan baris pertama *k* dari A.

Dengan mendefinisikan $\mathbf{X}_{\boldsymbol{k}}^*$ sebagai baris pertama *k* dari **X***, dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{X}_{\boldsymbol{k}}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_k^* \end{bmatrix},$$

dimana x_i^* adalah vektor *p x 1* untuk i = 1, 2, ..., k. Dengan cara yang sama, definisikan $\mathbf{A}_k$ sebagai baris pertama *k* dari **A**, dan

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_k' \end{bmatrix},$$

dimana a_i adalah vektor *n x 1* untuk i = 1, 2, ..., k. Berdasarkan definisi estimabilitas, setiap $\boldsymbol{x_i^*\beta}$ adalah fungsi *estimable* karena $\boldsymbol{a_1'}\mathbf{X} = \boldsymbol{x_i^{*\prime}}$ **u**ntuk i = 1, 2, ..., k.

Echelon baris matriks **X*** dapat diinterpretasikan sebagai berikut, misalkan kita ingin mengetahui estimabilitas dari $\boldsymbol{\beta_j}$ ($1 \leq j \leq p$). Pertama temukan baris **X*** dimana pertama entri *j – 1* adalah 0 dan entri ke-*j* nya 1. Jika sisa entri *p – j* adalah 0, maka $\boldsymbol{\beta_j}$ *estimable*. Tetapi jika, sisa entri *p – j* adalah 0 kecuali entri ke (*j* + 1) nya 1, maka $\boldsymbol{\beta_j} + \boldsymbol{\beta_{j+1}}$ *estimable* karena setiap baris **X*β** adalah fungsi *estimable* (Elswick, 1991).