II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika

Model Matematika adalah uraian secara matematika (sering kali menggunakan fungsi atau persamaan) dari fenomena dunia nyata seperti populasi, permintaan untuk suatu barang, kecepatan benda jatuh, konsentrasi dalam reaksi kimia, harapan hidup seseorang pada waktu lahir, atau biaya reduksi emisi. Tujuan model adalah memahami suatu fenomena dan mungkin membuat prakiraan tentang perilaku di masa depan (Stewart, 1999).

2.2 Proses Penyusunan Model Matematika

Proses penyususan model matematika dapat dilakukan dengan tahap-tahap sebagai berikut :

1. Mendeskripsikan masalah nyata yang akan dimodelkan.
2. Mengidentifikasi faktor-faktor atau variabel-variabel penting.
3. Menyederhanakan masalah nyata dengan membuat asumsi-asumsi yang logis atau dengan menggunakan dalil-dalil dalam ilmu-ilmu terkait misalnya ilmu fisika, biologi, rekayasa dan lain sebagainya.
4. Menterjemahkan masalah nyata tersebut dengan bahasa ilmu matematika. Setelah diterjemahkan, maka akan diperoleh model matematika misalnya

dalam bentuk persamaan linier, persamaan nonlinier, persamaan diferensial, pertidaksamaan, bentuk optimisasi, bentuk matrik, bentuk statistika dan lain sebagainya.

5. Menyelesaikan model matematika. Untuk menyelesaikan model matematika yang diperoleh, kita perlu mengetahui mengenai bidang-bidang matematika terkait seperti bidang aljabar, analisis matematika, pemrograman komputer dan lain-lain.
6. Menginterpretasikan model matematika, misalnya bisa geometris, interpretasi fisik, dan lain-lain.
7. Apabila model sudah dianggap cocok, maka biasanya model matematika dianggap baik dan layak digunakan. Sebaliknya jika model dianggap belum cocok untuk kasus tertentu, maka model perlu dimodifikasi.
8. Modifikasi model matematika.

(Widodo, 2011)

2.3 Model Pertumbuhan Populasi

Sebuah model untuk pertumbuhan populasi didasarkan pada asumsi bahwa populasi bertambah dengan laju yang sebanding dengan besarnya populasi. Ini merupakan asumsi yang masuk akal untuk populasi bakteri atau hewan dalam kondisi ideal (lingkungan takterbatas, nutrisi yang mencukupi, tidak adanya pemangsa, imunitas terhadap penyakit).

Identifikasi dan nama variabel-variabel dalam model ini yaitu :

= waktu

= banyaknya individu dalam populasi

= angka pertumbuhan populasi

Laju pertumbuhan populasi adalah turunan — . Jadi diasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi sebanding dengan besarnya populasi, dapat dituliskan sebagai persamaan :

— (2.1)

(Stewart, 1999)

2.4 Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen umum :

Definisi :

=

Fungsi eksponen asli :

Fungsi eksponen asli didefinisikan sebagai invers dari logaritma asli dan dinyatakan oleh ekp. Jadi :

(Purcell et al, 2003)

2.5 Model Populasi Eksponensial

Misalkan menunjukkan ukuran populasi pada waktu menunjukkan jumlah kelahiran per individu per satuan waktu, dan menunjukkan jumlah kematian per individu per satuan waktu [ ] .

Maka perubahan populasinya adalah sebagai berikut :

$$[\quad\quad\quad] \qquad (2.2)$$

Bagi persamaan (2.2) dengan . Jika mendekati nol, maka diperoleh :

$$(2.3)$$

Dengan adalah tingkat pertumbuhan intrinstik dari populasi. Model (2.2) menggambarkan populasi akan tumbuh secara *eksponensial* jika dan akan menurun secara *eksponensial* jika (Hallam and Levin, 1986).

2.6 Pertumbuhan Eksponensial

Definisi laju pertumbuhan eksponensial adalah :

$$(2.4)$$

Secara umum laju pertumbuhan ini bergantung pada waktu. Itu berarti dikalkulasi pada interval dari panjang waktu . Berdasarkan definisi ini laju pertumbuhan juga bergantung pada ukuran interval waktu. Kemungkinan yang lebih menarik adalah laju pertumbuhan saat itu

$$(2.5)$$

Laju pertumbuhan populasi yaitu laju perubahan dalam populasi setiap individu.

Dengan kata lain laju perubahan populasi, sebanding dengan laju pertumbuhan R waktu populasi N. Sebagai model pertama, diasumsikan laju pertumbuhan adalah tetap. Jika laju pertumbuhan adalah tetap , maka pertumbuhan populasi digambarkan dengan solusi untuk persamaan diferensial linier orde pertama dengan koefisien tetap

— (2.6)

Yang memenuhi kondisi awal

(2.7)

Solusi secara *eksponensial*

(2.8)

Digambarkan dalam gambar berikut :

Gambar 1. Pertumbuhan Populasi

Gambar 2. Peluruhan Populasi

Pada gambar 1 jika > 0 sebuah pertumbuhan populasi jika laju pertumbuhan bernilai positif.

Sedangkan pada gambar 2 jika 0 peluruhan populasi *eksponensial* jika laju pertumbuhan bernilai negatif (Ini sangat tepat atau cocok pada waktu awal =0) (Haberman, 1977).

2.7 Persamaan Diferensial Orde Satu

Pengertian turunan dalam subbab ini yang akan digunakan dianggap sudah diketahui dengan baik sehingga tidak dimasukkan. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan satu atau lebih peubah tak bebas terhadap satu atau lebih peubah bebasnya. Misalkan $y = F(x, y)$ dan $f(x, y)$

turunan pertama dari y. Hubungan antara perubahan y, $F(x)$, dan $f(x,y)$ yang dinotasikan dengan $dy = f(x,y)dx$ merupakan suatu persamaan diferensial. Berikutnya akan diberikan definisi persamaan diferensial orde satu.

Definisi : *Diberikan persamaan diferensial orde satu :*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.10}$$

Dimana f *adalah fungsi kontinu pada domaian* $D \subset R^2$ *dan* $(x_0, y_0) \subset D$.

Untuk mengetahui ketunggalan solusi dari persamaan diferensial orde satu *(2.10)* maka diberikan teorema di bawah ini :

Teorema : *Diketahui persamaan diferensial orde satu (2.10) yaitu :*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Memenuhi :

1. fungsi f *kontinu pada domaian* $D \subset R^2$

2. $\frac{\partial f}{\partial y}$ *kontinu pada* D *dan* $(x_0, y_0) \subset D$

Maka terdapat dengan tunggal penyelesaian Φ *dari persamaan diferensial (2.10) pada interval* $|x - x_0| \leq h$ *dengan* h *cukup kecil serta memenuhi kondisi:*

$$\Phi(x_0) = y_0$$

Pada persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ di atas. Jika fungsi $f(x,y)$ merupakan suatu fungsi linier maka persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial linier orde satu. Jika fungsi $f(x,y)$ merupakan suatu fungsi nonlinier maka persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial nonlinier orde satu (Ross, 1984).

2.8 Metode Pemisahan Variabel

Langkah 1. Tulis kembali persamaan :

$$— \quad —— \qquad (2.11)$$

dalam bentuk yang terpisah :

$$(2.12)$$

Langkah 2. Integralkan masing - masing sisi dari persamaan (2.12) untuk menemukan solusi implisit.

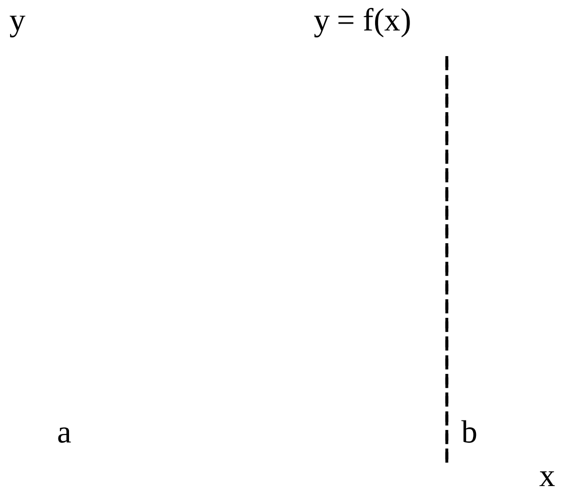
$$\int \qquad \int \qquad (2.13)$$

dengan c adalah suatu konstanta bebas.

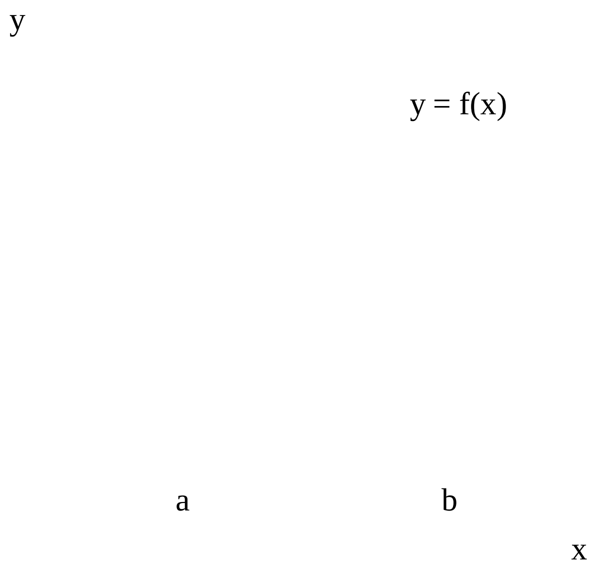
Langkah 3. Jika mungkin selesaikan y dalam bentuk solusi implisit untuk memperoleh solusi eksplisit (Farlow, 1994).

2.9 Maksimum dan Minimum Pada Fungsi

Jika suatu fungsi berlaku untuk batas-batas tertentu yaitu dimana , mempunyai kemiringan ke bawah seperti terlihat pada gambar 3, maka fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menurun (*decreasing function*). Dalam hal ini fungsi y menurun pada saat nilai x bertambah sehingga kemiringan kurva yaitu — . Sebaliknya apabila fungsi itu mempunyai kemiringan ke atas atau meningkat seperti terlihat pada gambar 4, maka fungsi tersebut dinamakan fungsi yang menaik (*increasing function*). Dalam hal ini fungsi y menaik pada saat nilai x bertambah, sehingga kemiringan kurva yaitu



Gambar 3. Grafik Fungsi Menurun



Gambar 4. Grafik Fungsi Menaik

(Assauri, 1995)

2.10 Kredit

Definisi :

Penyediaan uang atau tagihan yang dapat dipersamakan dengan itu, berdasarkan persetujuan atau kesepakatan pinjam meminjam antara bank dengan pihak lain yang mewajibkan pihak peminjam melunasi hutangnya setelah jangka waktu tertentu dengan pemberian bunga.

Unsur-unsur kredit :

1. Kepercayaan
2. Kesepakatan
3. Jangka waktu
4. Resiko
5. Balas jasa

Jenis-jenis kredit :

1. Dilihat dari segi kegunaan
    a. Kredit investasi
    b. Kredit modal kerja
2. Dilihat dari segi jangka waktu
    a. Kredit jangka pendek
    b. Kredit jangka menengah
    c. Kredit jangka panjang
3. Dilihat dari segi sektor usaha
    a. Kredit pertanian
    b. Kredit peternakan

c. Kredit industri
d. Kredit pertambangan
e. Kredit pendidikan
f. Kredit profesi
g. Kredit perumahan
h. Dan sektor-sektor lainnya

(Kasmir, 2002)

2.11 Bunga Bank

Bunga bank dapat diartikan sebagai balas jasa yang diberikan oleh bank yang berdasarkan prinsip konvensional kepada nasabah yang membeli atau menjual produknya. Bunga bagi bank juga dapat diartikan sebagai harga yang harus dibayar kepada nasabah (yang memiliki simpanan) dan harga yang harus dibayar oleh nasabah kepada bank (nasabah yang memperoleh pinjaman). (Kasmir, 2002)

Jenis Bunga :

1. Bunga Sederhana
2. Bunga Majemuk

Sistem bunga :

1. Flat
2. Efektif

(Stephen, 1991)

2.12 Bunga Sederhana

Dengan konsep bunga sederhana, besarnya bunga dihitung dari nilai pokok awal (dikalikan dengan tingkat bunga (dan waktu (. Perhitungan bunga ini dilakukan satu kali saja yaitu pada akhir periode atau pada tanggal pelunasan. Secara matematis, hal ini dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut :

(2.15)

Dengan (bunga sederhana)

(pokok)

(tingkat bunga/tahun)

(waktu dalam tahun)

Karena satuan adalah tahun, jika waktu diberikan dalam bulan maka dapat menggunakan persamaan sebagai berikut :

Jumlah bulan / 12

Sedangkan jika diberikan dalam hari, akan ada dua metode dalam mencari nilai , yaitu :

1. Metode Bunga Tepat (*Exact Interest Method*) atau Sie dengan

   = Jumlah hari/365

2. Metode Bunga Biasa (*Ordinary Interest Method*) atau Sio dengan

   Jumlah hari/360

(Frensidy, 2007)

2.13 Bunga Majemuk

Dengan bunga majemuk, bunga yang jatuh tempo ditambahkan ke nilai pokok pada akhir setiap periode perhitungan bunga untuk mendapatkan pokok yang baru. Perhitungan bunga untuk periode berikutnya akan didasarkan pada nilai pokok baru ini dan bukan pada nilai pokok awal, demikian seterusnya. Periode perhitungan bunga adalah periode bunga dihitung untuk ditambahkan ke pokok periode perhitungan bunga, dapat dinyatakan dalam bulanan, triwulanan, semesteran atau tahunan.

Untuk mempermudah perhitungan bunga majemuk, digunakan notasi sebagai berikut :

nilai pokok awal

nilai akhir

jumlah periode perhitungan bunga

frekuensi perhitungan bunga dalam setahun

tingkat bunga nominal tahunan dengan periode perhitungan kali per tahun

tingkat bunga per periode perhitungan bunga

Perhatikan bahwa tingkat bunga — selalu digunakan dalam perhitungan bunga majemuk.

Dengan menggunakan notasi dan definisi di atas, persamaan dari bunga majemuk dapat dinyatakan sebagai berikut:

(2.16)

Faktor disebut faktor majemuk (Frensidy, 2007).

2.14 Laba

Analisis Biaya Volume Laba (BVL) adalah metode dasar untuk menganalisa bagaimana hubungan antara tiga faktor yaitu biaya, pendapatan, dan laba. Model BVL adalah :

Laba = Pendapatan – Total Biaya

Total Biaya meliputi elemen biaya tetap dan biaya variabel.

Pendapatan = Biaya Tetap + Biaya Variabel + Laba

(Ambarriani, 2000)