

## I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah himpunan atau beberapa himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi atau beberapa operasi yang memenuhi aksioma-aksioma (sifat-sifat) tertentu. Aljabar modern mempelajari struktur-struktur tersebut dan didalam struktur aljabar harus memuat beberapa syarat yaitu, himpunan atau beberapa himpunan, operasi atau beberapa operasi, dan aksioma-aksioma yang memenuhi.

Struktur aljabar mempunyai beberapa tipe dan dibedakan menjadi beberapa macam, diantaranya adalah grupoid, semigrup, monoid, grup, ring, lapangan, ruang vektor dan modul.

Grupoid adalah salah satu struktur aljabar dengan satu himpunan dan satu operasi. Sebagai contoh, misalkan himpunan bilangan asli ( $\mathbb{N}$ ) dengan operasi penjumlahan biasa “+”(dinotasikan dengan  $(\mathbb{N}, +)$ ). Apabila struktur aljabar ini lebih dipersempit lagi, maka munculah struktur aljabar baru yang biasa disebut dengan semigrup.

Semigrup adalah salah satu struktur aljabar dengan satu himpunan dan satu operasi. Berbeda dengan grupoid, semigrup memiliki syarat bahwa operasi yang berlaku pada himpunan tersebut harus merupakan operasi yang tertutup dan

asosiatif. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat ( $\mathbb{Z}$ ) dengan operasi penjumlahan aritmatika yang biasa berlaku pada himpunan bilangan-bilangan bulat.

Setelah membahas tentang semigrup, terdapat struktur aljabar lain yang pengertiannya tidak jauh berbeda dengan grupoid dan semigrup. Struktur aljabar ini sering disebut monoid. Monoid adalah salah satu struktur aljabar dengan satu himpunan dan satu operasi, dengan syarat struktur aljabarnya harus merupakan semigrup dan himpunan tersebut harus memiliki elemen identitas.

Apabila syarat himpunannya lebih dipersempit lagi dimana setiap elemen didalam himpunan tersebut harus memiliki invers, maka ini dinamakan dengan grup. Dari sini kita dapat menarik kesimpulan bahwa, apabila struktur aljabar dengan satu himpunan dan satu operasi tersebut dikatakan grup maka struktur aljabar tersebut juga merupakan grupoid, semigrup dan monoid.

Terdapat struktur aljabar lain dengan satu himpunan dan dua operasi yang biasa disebut dengan ring. Apabila ring ini diperluas, maka ada struktur aljabar lain yang memenuhi disebut *field* (lapangan). Tapi, tidak menutup kemungkinan bahwa syarat yang berlaku pada ring juga berlaku pada *field* ditambah dengan syarat lain bahwa suatu himpunan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian harus merupakan grup komutatif, dan operasi perkaliannya bersifat distributif terhadap penjumlahan.

Berbeda dengan ruang vektor, ruang vektor adalah salah satu struktur aljabar dengan dua himpunan dan empat operasi. Ruang vektor merupakan struktur matematika yang dibentuk oleh sekumpulan vektor, yaitu objek yang dapat

dijumlahkan dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang dinamakan *skalar*. Operasi penjumlahan dan perkalian vektor harus memenuhi persyaratan tertentu yang dinamakan *aksioma*. Perumuman dari ruang vektor disebut modul.

Modul merupakan salah satu struktur aljabar dengan dua himpunan dan satu operasi. Modul juga bisa dipandang sebagai generalisasi dari grup Abel. Salah satu jenis modul adalah modul bersuplemen.

Terdapat berbagai jenis dari modul bersuplemen, diantaranya *amply supplemented modules* dan *weakly supplemented modules* yang dikenalkan oleh Zöschinger pada tahun 1970-an. Kemudian  $\oplus$ -*supplemented modules* yang dipelajari oleh A.Harmanci, P. F. Smith, W.Xue, R. Tribak dan A. Idelhadj pada tahun 1999. Kemudian pada tahun 2001 *cofinitely supplemented modules* dikenalkan oleh R. Alizade, P. F. Smith dan G. Bilhan. Bersama dengan E. Büyüksuk, R. Alizade pada tahun 2003 juga mempelajari *cofinitely weak supplemented modules* dan masih banyak lagi berbagai jenis dari modul bersuplemen salah satunya adalah modul *w-supplemented*.

Suatu modul  $M$  merupakan *w-supplemented* jika untuk setiap submodul semi sederhana dari  $M$  memiliki suplemen di  $M$  yang selanjutnya akan dibahas di dalam penelitian ini sifat-sifat yang berlaku pada submodul semi sederhana dari modul *w-supplemented*.

## **1.2 Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji karakterisasi modul *w-supplemented*.

### 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui sifat-sifat dari struktur aljabar, khususnya submodul semi sederhana.
2. Memberikan motivasi bagi pembaca dan peneliti untuk mengkaji lebih dalam permasalahan yang berhubungan dengan struktur aljabar.
3. Menambah pengetahuan tentang aljabar abstrak khususnya tentang modul  $w$ -*supplemented*.