II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan konsep dasar (pengertian) tentang grup, ring, dan modul yang akan digunakan dalam pembahasan hasil penelitian.

2.1 Ring

Sebelum didefinisikan pengertian ring, diberikan beberapa definisi berikut :

Operasi biner adalah operasi yang akan mendasari pembentukan struktur grup. Berikut ini diberikan definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner)

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah suatu aturan yang mengawankan setiap pasang berurutan $(a,b) \in S$ x S dengan suatu elemen S.

$$* : S \times S \rightarrow S$$

$$(a, b) \rightarrow a * b \in S$$

(Fraleigh,2002).

Contoh :

1. Penjumlahan biasa "+" adalah suatu operasi biner pada himpunan bilangan real.

2. Perkalian biasa " · " adalah suatu operasi biner pada himpunan bilangan real.

Grup adalah salah satu dari beberapa struktur aljabar (suatu himpunan dengan operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu) yang paling sederhana dan merupakan dasar bagi struktur – struktur aljabar yang lebih tinggi, seperti ring, *field* (lapangan), ruang vektor, dan modul. Berikut ini diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.2 (Grup)

Grup adalah suatu himpunan *G* dengan operasi biner :

$$*: G \times G \rightarrow G$$

yang memenuhi tiga syarat berikut :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$ (asosiatif);

2. Terdapat $e \in G$ sehingga $a * e = e * a$ untuk semua $a \in G$ (adanya elemen identitas) ;

3. Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a, b, c \in G$ sehingga $a * b = b * a = e$ (adanya invers untuk setiap $a \in G$)

(Adkins &Weinstraub, 1992).

Contoh :

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan adalah grup.

Subgrup merupakan himpunan bagian dari grup. Berikut definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.3 (Subgrup)

Misalkan G adalah grup dan H adalah himpunan bagian tak kosong dari G. H adalah subgrup jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut ini :

1. Jika $a, b \in H$ maka $ab \in H$

2. Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

(Adkins &Weinstraub, 1992).

Contoh :

1. $\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari (R, +).

2. $\mathbb{Q}^{+}$ adalah subgrup dari ($\mathbb{R}^{+}, +$).

Konsep grup yang diuraikan di bagian sebelumnya melibatkan suatu himpunan dan sebuah operasi biner $*$. Sebuah operasi biner dirasa kurang untuk menyatakan sistem bilangan riil yang melibatkan 2 jenis operasi yang berbeda, yang biasa disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Untuk itu, didefinisikan ring sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 (Ring)

Suatu ring $(R, +, \cdot)$ adalah suatu himpunan R dengan dua operasi biner "+" dan "·" yang disebut dengan "penjumlahan" dan "perkalian", yang didefinisikan oleh R sedemikian sehingga axioma-axioma berikut ini terpenuhi :

a) $(R, +)$ adalah grup abelian.

b) Perkalian bersifat asosiatif, untuk semua $a, b, c \in R$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c) Untuk semua $a,b,c \in R$, berlaku sifat :

-hukum distributif kiri : $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

-hukum distributif kanan : $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b . c)$

Jika dalam perkalian :

d) $a \cdot b = b \cdot a$ untuk semua $a, b \in R$,

maka R dikatakan ring komutatif.

Jika R berisi suatu elemen 1_R sedemikian sehingga,

e) $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ untuk semua $a \in R$,

maka R dikatakan ring dengan identitas

(Hungerford, 1974).

Contoh :

1. Himpunan $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ adalah ring.
2. Misal R adalah himpunan fungsi yang bernilai real dalam selang interval [0, 1]. Penjumlahan dan perkalian dari dua fungsi f, g didefinisikan sebagai berikut $(f + g) \cdot (t) = f(t) + g(t)$, dan $(f \cdot g) \cdot (t) = f(t) \cdot g(t)$, maka R adalah ring.

Suatu himpunan bagian dari ring dikatakan subring jika himpunan tersebut merupakan ring dengan operasi yang sama dengan ring tersebut. Berikut definisi subring.

Definisi 2.1.5 (Subring)

Menurut (Rotman, 2003), S himpunan bagian dari ring komutatif R adalah subring dari R jika memenuhi :

1. $0 \in S$
2. Jika $a, b \in S$ maka $a - b \in S$
3. Jika $a, b \in S$ maka $ab \in S$

Contoh :

1. Setiap ring merupakan subring dari dirinya sendiri.
2. Himpunan $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{Z}$ merupakan subring dari $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q}$ merupakan subring dari $\mathbb{R}$.

Lapangan pada dasarnya adalah ring dengan beberapa sifat tambahan, yaitu komutatif terhadap operasi penjumlahan dan setiap elemennya (kecuali nol) mempunyai invers terhadap operasi perkalian.

Definisi 2.1.6 (Lapangan (*Field*))

Misalkan (R, +, ·) adalah ring. (R, +, ·) disebut *field* jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. (R, +) merupakan grup komutatif
2. (R, ·) merupakan grup komutatif
3. Operasi perkalian " · " bersifat distributif terhadap penjumlahan " + "

(Lang, 1968).

Contoh :

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan lapangan.

2.2 Modul

Sebelum didefinisikan teori modul, diberikan definisi ruang vektor sebagai berikut :

Definisi 2.2.1 (Ruang vektor)

Suatu ruang vektor V atas lapangan K merupakan suatu himpunan objek (disebut vektor) yang dapat dijumlahkan dan digandakan dengan elemen di K, sedemikian sehingga penjumlahan yang berasal dari elemen V, berada di V, sedangkan perkalian dari elemen V dengan elemen yang berasal dari K, berada di elemen V, dan memenuhi sifat-sifat berikut ini :

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$, untuk setiap $u,v,w \in W$.

2. Ada elemen dari *V*, yang dilambangkan dengan *0*, sedemikian sehingga

$$0 + u = u + 0 = u$$

untuk setiap u $\in V$

3. Untuk setiap elemen *u* dari *V*, terdapat elemen (-1)*u* sedemikian sehingga

$$u + (-1)u = 0$$

4. $u + v = v + u$, untuk setiap $u,v \in V$.

5. $c(u + v) = cu + cv$, untuk suatu skalar *c*.

6. $(a + b)v = av + bv$, untuk suatu skalar *a,b*.

7. $(ab)v = a(bv)$, untuk suatu skalar *a,b*.

8. Untuk setiap $u \in V$, $1 \cdot u = u$ (*1* disini adalah bilangan *1*)

(Lang, 1968).

Contoh :

$\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor dengan 2-*tuple* karena memenuhi aksioma penjumlahan dan pergandaan ruang vektor.

Modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Pada modul, syarat skalar diperumum menjadi elemen pada suatu ring dan bukan lapangan. Dengan demikian ruang vektor merupakan suatu kasus khusus dari modul dan karena sifat modul yang lebih luas dari ruang vektor, maka ada berbagai sifat-sifat *trivial* pada ruang vektor menjadi *non-trivial* pada modul. Untuk mengawali pembahasan mengenai modul, berikut diberikan definisi tentang modul kanan dan modul kiri.

Definisi 2.2.2 (Modul)

Diberikan *R* merupakan ring dengan elemen identitas (tidak harus komutatif).

R-Modul kiri (atau modul kiri dari *R*) adalah sebuah grup abelian *M* dengan sebuah pemetaan perkalian skalar

$$\cdot\ : R \times M \to M$$

yang memenuhi aksioma berikut :

1. $a(m + n) = am + an$;
2. $(a + b)\, m = am + bm$;
3. $(ab)\, m = a\, (bm)$;
4. $1m = m$.

(Dalam aksioma ini, *a*,*b* adalah elemen dari *R* dan *m*,*n* adalah elemen dari *M*).

R-Modul kanan (atau modul kanan atas *R*) adalah grup abelian *M* dengan suatu perkalian skalar

$$\cdot\ : M \times R \to M$$

yang memenuhi aksioma berikut :

1. $(m + n)\, a = ma + na$;
2. $m\, (a + b) = ma + mb$;
3. $m\, (ab) = (ma)\, b$;
4. $m1 = m$.

(Dalam aksioma ini, *a*,*b* adalah elemen dari *R* dan *m*,*n* adalah elemen dari *M*).

(Adkins & Weinstraub, 1992).

Contoh :

1. Setiap grup abelian adalah *Z*-modul kiri.

2. Setiap ideal kiri dari *R* adalah *R*-modul.

3. Misal M adalah suatu modul atas ring R, maka M merupakan modul atas setiap subring R' dari R.

Submodul merupakan perluasan dari modul. Berikut definisi tentang submodul.

Definisi 2.2.3 (Submodul)

Diberikan M sebagai modul atas ring R. N dikatakan submodul jika N adalah subgrup dari M sehingga $an \in N$ untuk semua $a \in R$ dan $n \in N$.

(Adkins & Weinstraub, 1992)

Contoh :

Submodul dari R *R-modul* adalah ideal dari R.

2.3 Homomorfisma Modul

Modul faktor merupakan salah satu struktur yang digunakan pada pembahasan mengenai teorema utama homomorfisma. Sebelum didefinisikan teorema homomorfisma, berikut ini disajikan definisi modul faktor :

Definisi 2.3.1 (Modul Faktor)

Misalkan M merupakan R-modul dan misalkan $N \subseteq M$ merupakan submodul. Maka, N merupakan subgrup dari grup abelian M, sehingga dapat dibentuk faktor grup M/N. Didefinisikan suatu pemetaan perkalian skalar pada grup abelian M/N dengan $a(m + N) = am + N$ untuk setiap $a \in R, m + N \in M/N$. Karena N merupakan R-submodul dari M, pemetaan ini terdefinisi. Tentu saja, jika

$m + N = m' + N$ maka $m-m' \in N$ sehingga $am-am' = a(m-m') \in N$ sehingga

$am + N = am' + N$. Hasil dari R-modul M/N dinamakan modul faktor dari M dengan N merupakan submodulnya.

(Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh :

$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{12}$

Homomorfisma modul yaitu suatu pemetaan dari suatu modul ke modul lain yang "mengawetkan" sifat-sifat operasi pergandaan skalar di kedua modul. Berikut diberikan definisi dari homomorfisma modul.

Definisi 2.3.2 (Homomorfisma Modul)

Misalkan A dan B adalah modul atas ring R. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah suatu homomorfisma R-modul dengan syarat :

(1) $f(a+c) = f(a) + f(c)$

(2) $f(ra) = rf(a)$, untuk setiap $a,c \in A$ dan $r \in R$

(Hungerford, 1974).

Contoh :

1. Untuk setiap modul pemetaan nol :

$$\theta : A \rightarrow B$$

$$a \mapsto 0 \ (a \in A)$$

merupakan homomorfisma modul. Setiap homomorfisma grup yang abelian adalah suatu homomorfisma Z-modul.

2. Misalkan G adalah suatu grup abelian dan misalkan $g \in G$. Jika $n \in Z$ maka definisi perkalian skalar ng

$$ng = \begin{cases} g + \cdots + g & \text{(sebanyak } n \text{ kali) jika } n > 0 \\ 0 & jika\ n = 0 \\ (-g) + \cdots + (-g) & \text{(sebanyak } n \text{ kali) jika } n < 0 \end{cases}$$

dengan menggunakan perkalian skalar ini G adalah suatu Z-modul. Selanjutnya, jika G dan H adalah grup abelian dan $f : G \rightarrow H$ adalah suatu homomorfisma grup, maka f juga merupakan homomorfisma Z-modul karena (jika $n > 0$)

$$f(ng) = f(g + \ldots + g) = f(g) + \ldots + f(g) = n\, f(g).$$

2.4 Penjumlahan Langsung (*Direct Sum*)

Konsep jumlahan langsung (*direct sum*) merupakan suatu konsep untuk membentuk suatu modul yang "lebih luas" dari beberapa modul yang diberikan. Modul-modul tersebut akan isomorfis dengan suatu submodul pada modul yang "lebih luas" tersebut. Berikut ini disajikan definisi penjumlahan langsung.

2.4.1 Definisi Penjumlahan Langsung (*Direct Sum*)

Misalkan $M_1, \ldots, M_n$ adalah suatu koleksi terbatas dari R-modul. Himpunan produk kartesian $M_1 \times \ldots \times M_n$ dapat dibuat kedalam suatu R-modul berdasarkan operasi

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

dengan $0 \in M_i$. Dengan demikian, R-modul yang dibangun dinamakan penjumlahan langsung dari $M_1, \ldots, M_n$ dan dilambangkan dengan

$$M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \;\; (\text{atau } \oplus_{i=1}^{n} M_i).$$

Penjumlahan langsung memiliki suatu sifat homomorfisma yang penting, yang dapat digunakan untuk menggolongkan penjumlahan langsung. Untuk menggambarkan ini, anggap bahwa $f_i : M_i \rightarrow N$ adalah homomorfisma R-modul, sehingga terdapat pemetaan

$$f : M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \rightarrow N$$

didefinisikan oleh

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

(Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh :

Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_6$, maka $\{0\}$, $\{0,3\}$, $\{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6 \leq \mathbb{Z}_6$. Diperhatikan bahwa $\{0,3\} + \{0,2,4\} = \mathbb{Z}_6$ dan $\{0,3\} \cap \{0,2,4\} = \{0\}$. Dengan demikian submodul $\{0,3\}$ merupakan *direct summand* dari modul $\mathbb{Z}_6$.

Teorema 2.1.3

Jika M adalah suatu R-modul dan misalkan $M_1, \ldots, M_n$ adalah submodul dari M, sehingga

(1) $M = M_1 + \ldots + M_n$, dan

(2) Untuk $1 \leq i \leq n$,

$$M_i \cap (M_1 + \ldots + M_{i-1} + M_{i+1} + \ldots + M_n) = \{0\}.$$

maka,

$$M \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_n.$$

Bukti.

Misalkan $f_i : M_i \rightarrow M$ adalah pemetaan inklusi, dengan $f_i(x) = x$ untuk setiap $x \in M_i$ dan didefinisikan

$$f : M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \rightarrow M$$

dengan

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n.$$

f adalah suatu homomorfisma R-modul dan mengikuti dari syarat (1) bahwa f adalah surjektif. Sekarang anggap bahwa $(x_1, \ldots, x_n) \in Ker\,(f)$.

Jadi $x_1 + \ldots + x_n = 0$ sehingga untuk $1 \leq i \leq n$, diperoleh :

$$x_i = -(x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n).$$

Karena itu,

$$x_i \in M_i \cap (M_1 + \ldots + M_{i-1} + M_{i+1} + \ldots + M_n) = 0$$

sehingga $(x_1, \ldots , x_n) = 0$ dan *f* adalah isomorfisma.

(Adkins dan Weintraub, 1992).

2.5 Submodul Kecil (*Superflous Submodul*)

Suatu bagian penting dari teori didasarkan pada pengertian tentang submodul kecil dan epimorfisma kecil. Berikut definisi submodul kecil dan epimorfisma kecil.

Definisi 2.5.1 (Submodul Kecil)

Submodul $K \subseteq M$ disebut submodul kecil atau *superfluous* dalam *M*, ditulis $K \ll M$, jika untuk setiap submodul $L \subset M$, jika $K + L = M$ maka $L = M$.

Suatu epimorfisma $f : M \to N$ dikatakan epimorfisma kecil atau *superfluous epimorphism* jika $Ker\ f \ll M$, f juga disebut *small cover*.

Oleh karena itu, $K \ll M$ jika dan hanya jika proyeksi kanonik $M \to M/K$ adalah epimorfisma kecil.

(Clark, 2006).

Berikut ini merupakan sifat-sifat dari submodul kecil.

Misal *K*, *L*, *N* dan *M* merupakan *R-modul*.

(1) Jika $K \subset L \subset M$, maka $L \ll M$ jika dan hanya jika $K \ll M$ dan $L/K \ll M/K$.

(2) Jika $K_1, \ldots, K_n$ adalah submodul kecil dari *M*, maka $K_1 + \ldots + K_n$ juga merupakan submodul kecil di *M*.

(3) Jika $K \subset L \subset M$ dan L merupakan penjumlahan langsung di M, maka $K \ll M$ jika dan hanya jika $K \ll L$.

(4) Jika $K \ll M$, maka M dibangun secara berhingga jika dan hanya jika M/K dibangun secara berhingga.

(Clark, 2006).

Definisi 2.6 Submodul *Essential*

Suatu submodul *K* dari modul *M* yang tak nol dikatakan *essential* jika $K \cap L \neq 0$ untuk setiap submodul $L \subset M$.

(Clark, 2006).

Definisi 2.7 Radikal dari suatu modul

Radikal dari suatu *R-modul M,* dinotasikan dengan *Rad M* atau *Rad(M),* didefinisikan sebagai irisan dari semua submodul maksimal dari *M,*

$$Rad\ (M) = \bigcap \{K \subset M | K \text{ merupakan submodul maksimal di } M\}$$

dengan mengambil *Rad(M)* = *M,* ketika *M* tidak memiliki submodul maksimal. Perhatikan bahwa gagasan ini adalah sama dengan *socle M,* jumlah dari submodul minimal *M.*

(Clark, 2006).

Dapat ditunjukkan bahwa *Rad(M)* merupakan jumlah dari semua submodul kecil dari *M.* Meskipun demikian, *Rad(M)* tidak perlu merupakan submodul kecil di *M.* Untuk mengilustrasikan ini, catat bahwa setiap submodul berhingga yang dibangun dari $\mathbb{Z} - modul\ \mathbb{Q}$ adalah kecil tetapi penjumlahan mereka adalah □ (bukan merupakan submodul kecil dari □).

Catat bahwa *Rad(M)* = 0 jika dan hanya jika irisan dari semua submodul maksimal dari *M* adalah 0 atau *M* adalah *subdirect product* dari modul sederhana.

(Clark, 2006).

Contoh :

Ambil $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z} - modul$, maka *R*ad ($\mathbb{Z}$) = 0.

Lemma 2.7.1 (Radikal dari suatu modul)

Jika *M R*-modul dan pemetaan $f : M \rightarrow N$ adalah homomorfisma modul, maka

$$f(Rad\ M) \subset Rad\ N.$$

(Wisbauer, 1991).

Definisi 2.8 (Socle (*M*))

Soc (*M*) didefinisikan sebagai penjumlahan dari semua submodul sederhana dari *M* dan dapat terlihat bertepatan dengan irisan dari semua submodul *essential* dari *M*.

$$Soc\ (M) = \sum \{K \subset M | K \text{ merupakan submodul semisederhana di } M\}$$

(Clark, 2006).

Contoh :

Misalkan $\mathbb{Q}$ merupakan $\mathbb{Q} - modul$. Maka $Soc\ (\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Definisi 2.9 (*Cosmall*)

Diberikan submodul $K \subset L \subset M$, submodul $K \subset L$ dinamakan *cosmall* di *M* jika $L/K \ll M/K$; dinotasikan dengan $K \underset{M}{\overset{cs}{\rightarrow}} L$.

(Clark, 2006).

Definisi 2.10 Modul Semilokal

Suatu modul M dikatakan modul semilokal jika *M/Rad M* merupakan modul semisederhana.

(Clark, 2006).

2.11 Modul Bersuplemen

Misalkan M merupakan modul kiri atas ring *R* dengan $M \neq 0$.

Berikut ini akan diberikan definisi mengenai modul bersuplemen.

Definisi 2.11.1 (Modul Bersuplemen)

Untuk setiap submodul $N, L \subset M,$ persamaan berikut ini adalah ekuivalen :

(a) N merupakan elemen minimal dalam himpunan-himpunan submodul

$$\{K \subset M \mid L + K = M\};$$

(b) $L + N = M$ dan $L \cap N \ll N.$

Jika hal ini terpenuhi, maka *N* dinamakan *suplemen* dari L di *M*.

(Clark, 2006).

Contoh :

$\mathbb{Z}\ modul\ \mathbb{Z}$ merupakan modul bersuplemen.

Berikut ini akan diberikan definisi terkait modul bersuplemen lemah.

Definisi 2.11.2 (Modul Bersuplemen Lemah)

Suatu submodul $N \subset M$ dinamakan modul bersuplemen lemah dari suatu submodul L dari *M* jika syarat berikut terpenuhi:

1. $N + L = M$
2. $N \cap L \ll M$

(Clark, 2006).

Berikut ini akan diberikan definisi tentang modul sederhana.

Definisi 2.12 (Modul Sederhana)

Suatu M modul atas ring R dinamakan modul sederhana apabila $M \neq 0$ dan submodul dari M hanya $\{0\}$ dan M itu sendiri.

(Wisbauer, 1991).

Contoh :

Modul $\{0\}$ merupakan modul sederhana.

Berikut ini akan diberikan definisi tentang modul semisederhana.

Definisi 2.13 (Modul Semisederhana)

Suatu modul M dikatakan semisederhana jika modul tersebut merupakan penjumlahan langsung dari submodul sederhananya.

(Clark, 2006).

Contoh :

Modul $\{0\}$ merupakan modul semisederhana.

Berikut ini akan diberikan definisi tentang modul *w-supplemented*

Definisi 2.14 (Modul *w-supplemented)*

Suatu modul M dikatakan *w-supplemented* jika untuk setiap submodul semi sederhana dari M memiliki suplemen di M (Bilhan, 2013).

Contoh :

$\mathbb{Z}\ modul\ \mathbb{Z}$ merupakan modul *w-supplemented*.