II. LANDASAN TEORI

Distribusi Gamma adalah salah satu keluarga distribusi probabilitas kontinu. Distribusi ini merupakan distribusi fungsi padat yang terkenal luas dalam bidang matematika. Distribusi gamma berasal dari fungsi gamma yang sudah dikenal luas dan juga dipelajari dalam banyak bidang matematika.

Salah satu bentuk khusus dari distribusi gamma (α, θ) adalah distribusi khi-kuadrat $\chi^2(v)$ dengan $\alpha = \frac{v}{2},\ \theta = 2$. $\chi^2(v)$ didefinisikan sebagai jumlah kuadrat dari peubah-peubah acak yang bebas dan menyebar normal dengan rataan nol dan ragam satu. Distribusi $\chi^2(v)$ bergantung pada derajat bebasnya, untuk setiap derajat bebas terdapat satu sebaran $\chi^2(v)$.

2.1 Distribusi Khi-Kuadrat

Distribusi Khi-Kuadrat ini seringkali digunakan dalam statistika inferensial, seperti dalam uji hipotesis, atau dalam penyusunan selang kepercayaan. Salah satu penggunaan distribusi ini adalah uji khi-kuadrat untuk kebersesuaian (*goodness of fit*) suatu distribusi pengamatan dengan distribusi teoretis, kriteria klasifikasi analisis data yang saling bebas, serta pendugaan selang kepercayaan untuk simpangan baku populasi berdistribusi normal dari simpangan baku sampel.

Definisi 2.1 Distribusi Khi-Kuadrat

Menurut Hogg dan Tanis (2001) jika X merupakan peubah acak berdistribusi gamma (α, θ). Fungsi densitas dari X yaitu :

$$f(x) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\theta}} x^{\alpha-1} ; 0 \leq x < \infty$$

Jika $\theta = 2$ dan $\alpha = \frac{v}{2}$, dimana v bilangan bulat positif, maka fungsi densitasnya menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{v}{2}-1} ; 0 \leq x < \infty$$

Dikatakan bahwa X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas v, dilambangkan dengan $\chi^2(v)$. Diketahui bahwa rataan sama dengan derajat bebas.

$\mu = v$

Bukti:

$$\mu = E(x) = \int_0^{\infty} x \,.\, f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \,.\, \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{v}{2}-1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{v}{2}} .\; e^{-\frac{x}{2}} \, dx \tag{2.1}$$

Misalkan

$y = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad dx = 2dy$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$x = \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty$

Substitusikan pemisalan tersebut ke dalam persamaan (2.1) sehingga diperoleh:

$$\mu = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\infty} (2y)^{\frac{v}{2}}\, e^{-y}\; 2dy$$

$$\mu = v \qquad \blacksquare$$

$$E(x) = v \tag{2.2}$$

Ragam sama dengan dua kali derajat bebasnya. Nilai ragam dari distribusi khi-kuadrat sebagai berikut:

$$\sigma^2 = 2v$$

Bukti:

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \tag{2.3}$$

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 \,.\; f(x)\; dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \,.\; \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}\, x^{\frac{v}{2}-1}\; dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{v}{2}+1}\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx \tag{2.4}$$

Misalkan

$$y = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad dx = 2dy$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$x = \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty$$

Substitusikan pemisalan tersebut ke dalam persamaan (2.4) sehingga diperoleh:

$$E(x^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{\infty} (2y)^{\frac{v}{2}+1}\, e^{-y}\, 2dy$$

$$E(x^2) = 2v\,.\left(\frac{v}{2}+1\right) \tag{2.5}$$

Substitusikan persamaan (2.2) dan (2.5) pada persamaan (2.3) sehingga diperoleh:

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= 2v\,.\left(\frac{v}{2}+1\right) - [v]^2$$

$$Var(x) = 2v \qquad \blacksquare$$

2.2 Distribusi *Generalized Log-Logistic*

Distribusi *generalized log-logistic* (*GLL*) merupakan salah satu model perumuman yang memiliki potensi yang baik untuk menyesuaikan dengan data kelangsungan hidup. Dengan menggunakan distribusi *generalized log-logistic* sebagai distribusi perumuman dilakukan pendekatan dengan distribusi Khi Kuadrat.

Definisi 2.2 Distribusi *Generalized Log-Logistic*

Menurut Warsono (2011) suatu peubah acak X dikatakan berdistribusi GLL dengan parameter $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ atau dapat dinotasikan sebagai $X \sim GLLD(\alpha, \beta, m_1, m_2)$, dengan α sebagai parameter lokasi (*threshold*) yang menunjukkan lokasi waktu, di mana pada saat waktu tersebut, belum ada obyek pengamatan yang mati/rusak/gagal. Sedangkan β sebagai parameter skala yang menyatakan besarnya keragaman data berdistribusi GLL(m_1, m_2).

Fungsi kepekatan peluang dari distribusi GLL dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$g(x: \alpha, \beta, m_1, m_2) = \left(\frac{\alpha}{xB(m_1,m_2)}\right)[F(x)]^{m_1}[1 - F(x)]^{m_2}$$

untuk $\alpha \geq 0$ dan $\beta, m_1, m_2, x > 0$.

Dengan $F(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)}$ adalah fungsi distribusi log logistik.

Dengan memisalkan $w = F(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)}$ dan $dw = \left(\frac{\alpha}{x}\right)\frac{e^{-(\beta+\alpha \ln x)}}{\left(1+e^{-(\beta+\alpha \ln x)}\right)^2}\, dx$

maka fungsi distribusi dari GLL$(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ adalah:

$$G(x) = \frac{1}{B(m_1,m_2)}\int_0^{F(x)} w^{m_1-1}(1-w)^{m_2-1}dw$$

di mana $B(m_1, m_2)$ menyatakan fungsi beta lengkap dengan:

$x =$ peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu mati/rusak/gagal (*failure time*).

$B(m_1, m_2)$ = fungsi beta lengkap.

(m_1, m_2) = parameter bentuk yang menunjukkan laju kematian/kerusakan/kegagalan data berdistribusi GLL(m_1, m_2).

Untuk $m_1 = m_2 = 1$, distribusi GLL(m_1, m_2) berubah menjadi distribusi log-logistik.

Untuk $m_1 > m_2$, fungsi kepekatan peluang dari GLL(m_1, m_2) menjulur kearah positif.

Untuk $m_1 < m_2$, fungsi kepekatan peluang dari GLL(m_1, m_2) menjulur kearah negatif.

2.3 Ekspansi Deret Maclaurin

Pada penelitian ini deret Maclaurin digunakan untuk menyelesaikan fungsi e^{tx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized log-logistic*.

Teorema 2.1 Deret Maclaurin

Misalkan f adalah fungsi di mana turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang mengandung a. Jadi, untuk setiap x di dalam I berlaku: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (2.6)

Persamaan (2.6) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada persamaan (2.6) menjadi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \qquad (2.7)$$

Dan bentuk deret pada persamaan (2.7) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$.

Dengan menggunakan persamaan (2.7) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)} = 1$

$f'^{(x)} = t\, e^{tx}$ $\qquad$ $f'^{(0)} = t\, e^{t(0)} = t$

$f''^{(x)} = t^2\, e^{tx}$ $\qquad$ $f''^{(0)} = t^2\, e^{t(0)} = t^2$

dst.

Sehingga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \quad \cdots\cdots\cdots \qquad (2.8)$$

(Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003)

2.4 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak digunakan sebagai salah satu cara untuk mendapatkan nilai momen dari suatu distribusi. Fungsi pembangkit momen memiliki bentuk yang sederhana, namun tidak semua distribusi peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen.

Definisi 2.4 Fungsi pembangkit momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit mauun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x\ (t) = \ E\ (e^{tx})$$

Untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$.

Dari definisi di atas, dapat diuraikan dalam 2 kasus yang berbeda, yaitu untuk peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

a. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak diskrit

   Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_x\ (t) = \ E\ (e^{tx}) = \sum_{x \in X} e^{tx}\ p(x)$$

   Contoh :

$$p(x) = \frac{1}{4} \cdot \binom{2}{x}; x = 0,1,2$$

$$M_x\ (t) = \ E\ (e^{tx}) = \sum_{x \in X} e^{tx}\ P_x(X)$$

$$= \sum_{x=0}^{2} e^{tx} \cdot \frac{1}{4} \cdot \binom{2}{x}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + e^{t} \cdot \binom{2}{1} + e^{2t} \cdot \binom{2}{2}\right]$$

$$M_x(t) = \left(\frac{1}{4}\right) (1 + 2 \cdot e^{t} + e^{2t}); t \in R$$

b. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_x\,(t) = E\,(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\; dx$$

Contoh :

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\ \Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}.\, e^{-\frac{x}{\beta}}; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$M_x\,(t) = E\,(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\; dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\beta^{\alpha}.\ \Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}.\, e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}.\ \Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x(\frac{1}{\beta}-t)}\, dx \qquad (2.9)$$

Misalkan

$$y = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right)$$

$$y = x\left(\frac{1-\beta t}{\beta}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\beta y}{1-\beta t} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\beta}{1-\beta t}\, dy$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \qquad\qquad x = \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty$$

Substitusikan pemisalan tersebut ke dalam persamaan (2.9) sehingga diperoleh:

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{\beta}{1-\beta t}\, dy$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

Diketahui bahwa $\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$ merupakan fungsi gamma, yaitu $\Gamma(\alpha)$.

Sehingga diperoleh :

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

$M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}\, ; t < \frac{1}{\beta}$ (Herryanto dan Gantini, 2009)

Teorema 2.2 Fungsi Pembangkit Momen Distribusi *Generalized Log-Logistic*

Misalkan X suatu peubah acak berdistribusi $GLL(\alpha, \beta, m_1, m_2)$, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah sebagai berikut:

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{-\left(\beta/\alpha\right)}\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right)\Gamma\left(m_2 - \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)} \quad (2.10)$$

(Warsono, 2011).

Teorema 2.3 Ketunggalan untuk Fungsi Pembangkit Momen

i. Bila dua fungsi pembangkit momen dari dua peubah acak ada dan sama, maka kedua peubah acak tersebut mempunyai fungsi distribusi yang sama.

ii. Bila dua peubah acak mempunyai fungsi distribusi yang sama, maka (bila ada) fungsi pembangkit momennya juga sama. (Dudewicz & Mishra, 1995).

Teorema 2.4 *Limiting* Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan peubah acak Y_n memiliki fungsi distribusi $F_n(y)$ dan fungsi pembangkit momennya $M(t;n)$ ada pada selang $-h < t < h$ dan untuk semua n. Jika ada fungsi distribusi $F(y)$, yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momennya $M(t)$, terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 < h$, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$, maka Y_n memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi $F(y)$ (Hogg & Craig, 1995).

2.5 Kasus Khusus atau *Limiting GLL* $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$

Menurut Warsono., Usman, M., dan Nusyirwan (2000), bentuk hubungan distribusi *generalized log-logistic* $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ dengan distribusi lainnya sebagai kasus khusus atau *limiting* dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$GF(\mu, \sigma, m_1, m_2) = GLL\left(\alpha = \frac{1}{\sigma}, \beta = -\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right), m_1, m_2\right)$$

$$GB2(a, b, m_1, m_2) = GLL(\alpha = a, \beta = -a\ln(b), m_1, m_2)$$

$$GG(a, \gamma, m_1) = \lim_{m_2\to\infty} GB2\left(a, b = \gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}, m_1, m_2\right)$$

$$Log\ normal(\mu, \sigma) = \lim_{m_2\to\infty} GG\left(a, b = (\sigma^2 a^2)^{\frac{1}{a}}, m_1 = \frac{a\mu + 1}{\sigma^2 a^2}\right)$$

$$Weibull(a, \gamma) = GG(a, \gamma, m_1 = 1)$$

$$Gamma(\gamma, m_1) = GG(a = 1, \gamma, m_1)$$

$$Eksponensial(\gamma) = GG(a = 1, \gamma, m_1 = 1)$$