II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Beta

Definisi 2.1

Fungsi beta dinyatakan dengan B(α,β) didefinisikan sebagai berikut:

Untuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, maka :

$$B(\alpha,\beta) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

Untuk setiap $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, fungsi beta adalah simetrik:

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

(Prasanna Sahoo, 2008)

2.2 Distribusi *Generalized* Beta II

Definisi 2.2

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized* beta II dengan parameter (a,b,p,q), jika fungsi kepekatannya adalah :

$$f(x) = \frac{|a|x^{ap-1}}{b^{ap}B(p,q)(1+(\frac{x}{b})^{a})^{p+q}} \quad ; untuk\ 0 < x < \infty$$

Dimana B(p,q) merupakan Fungsi Beta yang didefinisikan sebagai berikut :

$$B(p,q) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$$

(James B. McDonald, Yexio J.Xu,1995)

2.3 Momen ke-r

Definisi 2.3

Momen dari peubah acak X dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu_r^{'} = \mathrm{E}(X^r) = \begin{cases} \sum_{x} x^r f\ (x) & ;\ \text{bila x diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f\ (x)\ dx & ;\ \text{bila X kontinu} \end{cases}$$

Untuk r =1, 2, 3, 4, ….r……

Jika r=1, maka E(X) di sebut momen pertama dari peubah acak X, jika r=2, maka E(X^2) disebut momen kedua dari peubah acak X dan seterusnya.

(Prasanna Sahoo, 2008)

Selain dapat dicari langsung dari Definisi 2.3, tersedia cara lain, cara ini memerlukan penggunaan fungsi pembangkit momen.

2.3.1 Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah suatu peubah acak dengan fungsi kepekatan peluanya nya adalah f(x). sebuah fungsi M: R→ R, maka fungsi pembangkit momen didefinisikan dengan :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f\ (x) & ; \quad \text{bila x diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f\ (x) dx & ; \quad \text{bila x kontinu} \end{cases}$$

(Prasanna Sahoo, 2008)

2.4 Fungsi Karakteristik

Definisi 2.4

Fungsi karakteristik (φ_x) dari peubah acak X, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itx}, dimana i adalah bagian imaginer dan t R dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \varphi_x : R \to C \\ \varphi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \end{cases}$$

dimana $\varphi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = E\{\cos(tX) + i \sin(tX)$

$$= E \cos(tX) + Ei \sin(tX)$$

Dan F_x merupakan fungsi kumulatif dari distribusi X, sedangkan f_x merupakan fungsi kepakatan peluang dari distribusi X.

(Edward J. Dudewicz & Satya N.Mishra, 1995)

2.5 Cumulants

Definisi 2.5

Cumulants k_r didefinisikan sebagai

$$\ln\ \varphi_x(t) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} k_r \frac{(it)^r}{r!}$$

Dengan menggunakan deret MacLaurin maka didapat :

$$\ln\ \varphi_x(t) = (it)\mu_1' + \frac{1}{2!}(it)^2\left(\mu_2' - {\mu_1'}^2\right) + \frac{1}{3!}(it)^3$$

$$(2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3') + \frac{1}{4!}(it)^4(-6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_1'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' +$$

$$\mu_4') + \frac{1}{5!}(it)^5\left[24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' +\right.$$

$$\left.5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'\right] + \cdots$$

Dimana μ_n' momen baku, maka dapat ditulis kembali sebagai ;

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu_2' - {\mu_1'}^2$$

$$k_3 = 2{\mu_1'}^3 - 3\mu_1'\mu_2' + \mu_3'$$

$$k_4 = -6{\mu_1'}^4 + 12{\mu_1'}^2\mu_2' - 3{\mu_2'}^2 - 4\mu_1'\mu_3' + \mu_4'$$

$$k_5 = 24{\mu_1'}^5 - 60{\mu_1'}^3\mu_2' + 20{\mu_1'}^2\mu_3' - 10\mu_2'\mu_3' + 5\mu_1'\left(6{\mu_2'}^2 - \mu_4'\right) + \mu_5'$$

.

.

.

$$k_r = \mu_r' - \sum_{n=1}^{r-1} \binom{r-1}{n-1} k_n \mu_{r-n}'$$

(Abramowitz and Stegun, 1972)

2.6 Ekspansi Deret MacLaurin

Pada penelitian ini, deret MacLaurin digunakan untuk menyelesaikan fungsi e^{tx} dan e^{itx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi *generalized* beta II.

Teorema Deret MacLaurin

Misalkan f adalah fungsi di mana turunan ke (n+1).$f^{(n+1)}$(x), ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka l yang mengandung a. Jadi, untuk setiap x di dalam l berlaku : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$ (2.1)

Persamaan (2.1) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada persamaan (2.1) menjadi :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \quad (2.2)$$

Dan bentuk deret pada persamaan (2.2) disebut sebagai ekspansi deret MacLaurin bagi fungsi $f(x)$.

Dengan memuat persamaan (2.2) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)} = 1$

$f'(x) = te^{tx}$ $\qquad$ $f'(0) = te^{t(0)} = t$

$f''(x) = t^2e^{tx}$ $\qquad$ $f''(0) = t^2e^{t(0)} = t^2$

Sehigga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003)