IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Fungsi Euler

Definisi 4.1

Bilangan Totient sempurna (*Perpect Totient Number* atau PTN) adalah suatu bilangan bulat yang sama dengan jumlah dari iterasi Totientnya.

yaitu jika :

$$n = \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(n)$$

dengan

$$\varphi^i(n) = \begin{cases} \varphi(n) & i = 1 \\ \varphi\left(\varphi^{i-1}(n)\right) & ; 1 \geq 2(\text{yang lainnya}) \end{cases}$$

adalah fungsi iterasi Totient dan *c* bilangan bulat sedemikian hingga

$$\varphi^c(n) = 2$$

maka *n* adalah bilangan Totient sempurna.

Definisi 4.2

Contoh fungsi aritmatika :

$\tau\ (n)$ = Banyaknya pembagi positif dari *n*

$\sigma\ (n)$ = Jumlah semua pembagi positif dari *n*

σ_k (n) = Jumlah pangkat ke-*k* dari pembagi-pembagi positif dari n

$\varphi(n)$ = Banyaknya bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan *n* dan relatif prima terhadap *n*.

Definisi 4.3

Suatu fungsi aritmatika *f* di katakan multiplikatif jika *f(mn)=f(m) f(n)* bila *m* dan *n* koprima, artinya FPB *(m,n)* = 1.

Terorema 4.1

Jika *f (n)* multiplikatif, maka begitu juga dengan *f (n)* = $\sum_{d\,|\,n} f(d)$

Definisi 4.4

Fungsi mobius $\mu(n)$ didefinisikan sebagai :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{jika } n = 1 \\ u \text{ jika } a^2 \,|\, n \text{ untuk suatu } a > 1 \text{ tertentu} \\ (-1)^k, \text{jika } n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k, p_i \text{ adalah bilangan} - \text{bilangan prima yang berbeda} \end{cases}$$

Teorema 4.2

Jika *f(n)* = $\sum_{d\,|\,n} f(d)$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*, maka

$f(n) = \sum_{d\,|\,n} \mu(d) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*.

Teorema 4.3

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \text{dengan } n = {p_1}^{\alpha 1}{p_2}^{\alpha 2}\cdots {p_k}^{\alpha k}$$

Bukti :

Karena $\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n,$ maka menurut rumus inversi mobius :

$$\varphi(n) = \sum_{d\,|\,n} \mu(d) \cdot \left(\frac{n}{d}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Selanjutnya $\frac{\mu(d)}{d}$ adalah suatu fungsi multiplikatif, sehingga $\frac{\varphi(n)}{n}$ juga fungsi multiplikatif. Jadi $\varphi(n)$ adalah suatu fungsi multiplikatif. Sehingga untuk suatu bilangan prima p diperoleh :

$$\varphi(p^c) = \sum \mu(d)\left(\frac{p^c}{d}\right) = \sum_{f=0}^{c}\left(\frac{p^c}{p^f}\right)$$

$$= \mu(1)p^c + \mu(p)p^{c-1}$$

$$= p^c - p^{c-1}$$

$$= p^c\left(\frac{p-1}{p}\right) = p^c\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Jadi $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

Contoh 1 :

3 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi^c\ (\ 3\ ) =\ 2$.

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\ (\ 3\ ) =\ 3\ \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= 2$$

$n \sum_{i=1}^{c+1}\ \varphi^i(\ n\ )$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\ 3\ ) =\ \varphi\ (3\ ) +\ \ (\ \varphi^{(2-1)}(3)\ )$$

$$= 2 +\ \varphi\big(\varphi(3)\big)$$

$$= 2 +\ \varphi(2)$$

$$= 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 3$$

Terbukti untuk 3 adalah bilangan Totient sempurna

Contoh 2 :

9 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi^c(\,9\,) = 2$

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\,(\,9\,) = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 6$$

$$c = 2 \rightarrow \varphi\,(\,6\,) = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 2$$

$n \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\,n\,)$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\,9\,) = \varphi\,(9\,) + \left(\varphi^{3-1}(9)\right) = \varphi(\varphi^2(9))$$

$$= \varphi(9) + \varphi^{2-1}(9) + \varphi^{3-1}(9)$$

$$= 6 + \varphi(6) + \varphi^2(6)$$

$$= 6 + 2 + \varphi(\,2)$$

$$= 6 + 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$$= 9$$

Terbukti untuk 9 adalah bilangan Totient sempurna.

Contoh 3

81 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi(81) = 2$

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\,(81) \;=\; 81 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 54$$

$$c = 2 \rightarrow \varphi\,(54) \;=\; 54 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 54 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 18$$

$$c = 3 \rightarrow \varphi\,(18) \;=\; 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 6$$

$$c = 4 \rightarrow \varphi\,(6) \;=\; 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 2$$

$$n \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^{i}(\,n\,)$$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^{i}(\,81\,) = \varphi\,(81\,) + \varphi^{2}(81)) + \varphi^{3}(81) + \varphi^{4}(81)$$
$$= 54 + 18 + 6 + 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 54 + 18 + 6 + 2 + 1$$
$$= 81$$

Terbukti untuk 81 adalah bilangan Totient sempurna.

Contoh 4

111 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi^c(111) = 2$

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\ (111) \ = \ 111 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 81 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 72$$

$$c = 2 \rightarrow \varphi\ (72) \ = \ 72 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 72 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 24$$

$$c = 3 \rightarrow \varphi\ (24) \ = \ 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 8$$

$$c = 4 \rightarrow \varphi\ (8) \ = \ 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$c = 5 \rightarrow \varphi\ (4) \ = \ 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2$$

$$n \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\ n\ )$$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\ 111) = \varphi\ (111) + \varphi^2(111) + \varphi^3(111) + \varphi^4(111) + \ \varphi^5(111)$$

$$= 72 + 24 + 8 + 4 + 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 72 + 24 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$= 111$$

Terbukti untuk 111 adalah bilangan Totient sempurna.

Contoh 5

243 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi^c(243) = 2$

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\,(243) = 243 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 162$$

$$c = 2 \rightarrow \varphi\,(162) = 162 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 162 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 54$$

$$c = 3 \rightarrow \varphi\,(54) = 54 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 54 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 18$$

$$c = 4 \rightarrow \varphi\,(18) = 18 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 6$$

$$c = 5 \rightarrow \varphi\,(6) \;=\; 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 2$$

$$n \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^{i}(\,n\,)$$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^{i}(\,243) \;= \varphi\,(243) + \varphi^{2}(243) + \varphi^{3}(243) + \varphi^{4}(243) + \;\varphi^{5}(243)$$

$$= \;162 + 54 + 18 + 6 + 2 + 2\,\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 162 + 54 + 18 + 6 + 2 + 1$$

$$= 243$$

Terbukti untuk 243 adalah bilangan Totient sempurna.

Contoh 6

327 adalah bilangan Totient sempurna dengan bilangan bulat $\varphi^{c}(327) = 2$

Penyelesaian :

$$c = 1 \rightarrow \varphi\,(327) \;=\; 327 \;\cdot\; \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{109}\right)$$

$$= 327 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{108}{109}\right)$$

$$= 216$$

$$c = 2 \rightarrow \varphi\,(216) \;=\; 216 \;\cdot\; \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 216 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 72$$

$$c = 3 \rightarrow \varphi\,(72) \;=\; 72 \;\cdot\; \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 24$$

$$c = 4 \rightarrow \varphi\,(24) \quad = 24 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$= 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= 8$$

$$c = 5 \rightarrow \varphi\,(8) \quad = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4$$

$$c = 6 \rightarrow \varphi\,(4) \quad = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2$$

$$n \sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\,n\,)$$

$$\sum_{i=1}^{c+1} \varphi^i(\,327) = \varphi\,(327) + \varphi^2(327) + \varphi^3(327) + \varphi^4(327) + \varphi^5(327) + \varphi^6(327)$$

$$= 216 + 72 + 24 + 8 + 4 + 2 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 216 + 72 + 24 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$= 327$$

Terbukti untuk 243 adalah bilangan Totient sempurna.

4.2 Syarat Cukup Bilangan Totient Sempurna

Mohan dan Suryanarayana menemukan syarat cukup pada p prima tunggal untuk 3^2p dan 3^3p menjadi bilangan totient sempurna. Secara khusus misalkan b menjadi bilangan bulat tidak negatif. jika $q = 2^5 \cdot 3^b + 1$ dan $p = 2 \cdot 3^2q + 1$ keduanya bilangan prima maka 3^2p adalah bilangan totient sempurna. Jika

$q = 2^4 \cdot 3^b + 1$ dan $p = 2^2 q + 1$ dan keduanya bilangan prima maka $3^3 p$ adalah sebuah bilangan Totient sempurna.

Teorema 4.4

jika $b = 1$ dan $s = 2^5 \cdot 3^b + 1$ dan $r = 2 \cdot 3^2 s + 1$ dan $q = 2^4 \cdot 3r + 1$ dan $p = 2^5 \cdot q + 1$ dan $s, r, q. p$ semuanya bilangan prima maka $3^3 p$ adalah bilangan Totient sempurna.

Bukti :

Misalkan

$$s = 2^5 \cdot 3^b + 1$$
$$= 2^5 \cdot 3^1 + 1$$
$$= 97 \text{ (bilangan prima)}$$

$$r = 2 \cdot 3^2 s + 1$$
$$= 2 \cdot 3^2 97 + 1$$
$$= 1747 \text{ (bilangan prima)}$$

$$q = 2^4 \cdot 3r + 1$$
$$= 2^4 \cdot 3 \cdot 1747 + 1$$
$$= 83857 \text{ (bilangan prima)}$$

$$p = 2^5 \cdot q + 1$$
$$= 2^5 \cdot 83857 + 1$$
$$= 335429 \text{ (bilangan prima)}$$

Bukti dari teorema (4.4) dengan $b = 1$ diperoleh seperti di atas untuk nilai $s = 97,\ r = 1747,\ q = 83857,\ p = 335429$ dan bila semuanya merupakan

bilangan prima maka dikatakan sebuah bilangan otient sempurna $3^3p = 9056583$ Terbukti memenuhi syarat cukup bilangan Totinet sempurna.

4.3 PTN (Bilangan Totient Sempurna) Bentuk $3^k p$

Untuk menentukan PTN (Bilangan Totient Sempurna) bentuk 3^kp, $k \geq 2$, di pilih bilangan p dan q sedemikian hingga $q = 2^a 3^b + 1$ dan $p = 2^c 3^d q + 1$, $a, c \geq 1$ dan $b, d \geq 0$. Dengan subtitusi langsung diperoleh $3^k p = 2^{a+c} 3^{b+d+k} + 2^c 3^{d+k} + 3^k$ Di lain pihak diperoleh :

$$
\begin{aligned}
s(3^k p) &= 2^{c+1} 3^{d+k-1} q + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-2} + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-3} + 2^{a+c+1} + \cdots \\
&\quad + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{d+k-1} (2^a 3^b + 1) + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-2} + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-3} + \cdots \\
&\quad + 2^{a+c+1} + \cdots + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{d+k-1} + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-1} + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-2} + 2^{a+c+1} 3^{b+d+k-3} \\
&\quad + \cdots + 2^{a+c+1} + 2^{a+e} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{d+k-1} + 2^{a+c+1} (3^{b+d+k-1} + 3^{b+d+k-2} + \cdots + 3 + 1) + 2^{a+c+1} \\
&\quad + 2^{a+e} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{b+k-1} + 2 \cdot 2^{a+c} \cdot \frac{1}{3} (3^{b+d+k} + 3^{b+d+k-1} + \cdots + 3) + 2^{a+c} \\
&\quad + 2^{a+c-1} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{b+k-1} + 2 \cdot 2^{a+c} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \left(\frac{3^{b+d+k} - 1}{3 - 1} \right) + 2 \left(\frac{2^{a+c} - 1}{2 - 1} \right) + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{b+k-1} + 2^{a+c} \cdot \frac{1}{3} (3^{b+d+k} - 1) + 2 \cdot 2^{a+c} - 2 + 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{b+k-1} + 2^{a+c} 3^{b+d+k} - 2^{a+c} + 2 \cdot 2^{a+c} - 1 \\
&= 2^{c+1} 3^{b+k-1} + 2^{a+c} 3^{b+d+k} + 2^{a+c} - 1
\end{aligned}
$$

Diasumsikan $3^k p$ PTN, maka :

$$\Leftrightarrow \quad 3^k p = s(3^k p)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{a+c}3^{b+d} + 2^c 3^{d+k} + 3^k = 2^{c+1}3^{b+k-1} + 2^{a+c}3^{b+d+k} + 2^{a+c} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{c+1}3^{d+k-1} + 2^{a+c} - 2^c 3^{d+k} = 3^k + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^c(2 \cdot 3^{d+k-1} - 3^{d+k} - 2^a) = 3^k + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^c\left(\frac{2}{3} \cdot 3^{d+k} - \frac{1}{3} \cdot 3^{d+k-1}\right) = 3^k + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^c(2^a - 3^{d+k-1}) = 3^k + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a, c \geq 1 \quad , \quad b, d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^c(2^a - 3^{d+k-1}) = 3^k + 1$$

$$a, c \geq 1 \quad ; \quad b, d \geq 0 \quad k \geq 2$$

maka : $a > 1$ dan $c = 1$

$$2^c(2^a - 3^{d+k-1}) = 3^k + 1 \tag{4.1}$$

Jelas $a > 1$ dan $c = 1$ atau $c = 2$ untuk *k* genap atau ganjil

Jika *k* = 2, maka ruas kanan persamaan (4.1) menjadi :

$3^2 + 1 = 10$, maka $c = 1$, sehingga diperoleh

$$2^a - 3^{d+1} = 5 \tag{4.2}$$

Karena $2^a \equiv 2 \pmod 3$, maka *a* harus ganjil.

$$a = 1 \Rightarrow 2^1 \equiv 2 \pmod 3$$

$$a = 3 \Rightarrow 2^3 \equiv 2 \pmod 3$$

maka,

$$\left\langle \begin{matrix} a = 3 \Rightarrow d = 0 \\ a = 5 \Rightarrow d = 2 \end{matrix} \right\rangle \text{ sebagai solusi}$$

jika,

$$a > 5$$

$$2^a\, 3^{d+1} = 5$$

$$3^{d+1} = 2^a + 5$$

maka,

$$3^{d+1} \equiv 123 \pmod{128}$$

Sehingga diperoleh $d + 1 \equiv 11 \pmod{32}$ selanjutnya $3^{d+1} \equiv 7 \pmod{17}$ dan jadi $2^a \equiv 7 + 5 \equiv 12 \pmod{17}$⇒ tidak mungkin , maka solusi persamaan (4.1) hanya $a = 3$ dan $a = 5$, $d = 2$, $d = 0$.

Untuk k = 3 maka persamaan (4.1) menjadi

$2^c(2^a - 3^{d+2}) = 28$, $c = 2$

maka diperoleh :

$$2^a - 3^{d+2} = 7 \qquad (4.3)$$

Karena $d \geq 0$, maka jelas bahwa $a > 3$. Karena $2^a \equiv 1 \pmod 3$ dan $3^{d+2} \equiv 1 \pmod 8$, maka a dan d keduanya genap.

selanjutnya dapat dituliskan :

$a = 2a$ dan $d = 2\delta$

sehingga persamaaan (4.3) menjadi

$2^{2\alpha} - 3^{2\delta+2} = 7$

⇔$(2^\alpha)^2 - (3^2)^{\delta+1} = 7$

⇔$(2^\alpha)^2 - \left(3^{\delta+1}\right)^2 = 7$

⇔(2^α-3^(δ+1)) $(2^\alpha - 3^{\delta+1})$=7 (4.4)

Karena 7 bilangan prima, maka dri persamaan (4.4) diperoleh :

$2^\alpha - 3^{\delta+1} = 1$

$$2^{\alpha} + 3^{\delta+1} = 7 \qquad (4.5)$$

Eliminasi dan subtitusi terhadap persamaan (4.5) adalah

$$\begin{array}{r} 2^{\alpha} - 3^{\delta+1} = 1 \\ 2^{\alpha} + 3^{\delta+1} = 7 \\ \hline 2 \cdot 2^{\alpha} = 8 \\ 2^{\alpha} = y \\ \alpha = 2 \end{array} + \qquad \begin{array}{r} 2^{\alpha} - 3^{\delta+1} = 1 \\ 2^{\alpha} + 3^{\delta+1} = 7 \\ \hline -2 \cdot 3^{\delta+1} = 6 \\ 3^{\delta+1} = 3 \\ 3^{\delta+1} = 3^{1} \\ \delta + 1 = 3^{1} \\ \delta = 0 \end{array} +$$

Sehingga dihasilkan : $\alpha = 2$, $\delta = 0$, maka $a = 4$ dan $d = 0$ Selanjutnya akan ditunjukkan tidak ada solusi untuk persamaan (4.1) jika $k \geq 4$.

- Misalkan k genap , $k \geq 4$ Maka $c = 1$ pilih $x = a + 1$ dan $y = d + k - 1$ sehingga menjadi :

$$2(2^{x-1} - 3^{y}) = 3^{k} + 1$$

$$2^{x} - 2 \cdot 3^{y} = 3^{k} + 1 \qquad (4.6)$$

dengan $x \geq 3$, $y \geq 3$ dari persaman (4.6) diperoleh $2^{x} \equiv 1 (\text{mod } 27)$, $x \equiv 0$ (mod 18) karena $2^{18} \equiv 1 (mod\ 19)$, maka dari persamaan (4.6) dihasilkan :

$\rightarrow 2 \cdot 3^{y} = 3^{k}$ (mod 19) sehingga

$$\left(\frac{3}{19}\right)^{y} = \left(\frac{-23^{y}}{19}\right) = \left(\frac{3^{k}}{19}\right)$$

Dari persamaan (4.1) juga diperoleh $-2 \cdot 3^{y} \equiv 2$ (mod 8), sehingga y ganjil. hal ini kontradiksi karena k genap, y ganjil dan $\left(\frac{3}{19}\right) = -1$.

- Misalkan k ganjil , $k \geq 5$ maka $c = 2$, pilih $x = a + 2$ dan $y = d + k$ sehingga persamaan (4.1) menjadi :

$$2^x - 4 \cdot 3^y = 3^k + 1 \qquad (4.7)$$

Dengan $x, y \geq 4$

Ada dua kasus yang diperhatikan :

a). Jika $k \equiv 1 (\text{mod } 4)$, maka $-4 \cdot 3^y \equiv 3^k + 1 \equiv 4 \ (\text{mod } 16)$ yang berakibat y ganjil, juga diperoleh $x \equiv 0 \ (\text{mod } 18)$. karena

$2^{18} \equiv 1$ (mod 7), maka

$-4 \cdot 3^y \equiv 3^k (\text{mod } 7)$, sehingga

$3^{y+1} \equiv 3^k$ (mod 7), ini tidak mungkin karena $y + 1$ genap k ganjil.

b). Jika $k \equiv 3 (\text{mod } 4)$, maka $-4 \cdot 3^y \equiv 3^k + 1 \equiv 12 \ (\text{mod } 16)$ sehingga y genap, Jika

$y \equiv 0$ (mod 4), maka

$2^x \equiv 4 \cdot 3^y + 3^k + 1$ ini berakibat x ganjil

$\equiv 4 + 2 + 1 \equiv 2$ (mod 5) ini berakibat x ganjil.

Tetapi dari persamaan (4.1), $2^x \equiv 1$ (mod 3), sehingga x genap terjadi kontradiksi.

Berdasarkan uraian di atas dapat dinyatakan teorema berikut :

Tidak ada PTN berbentuk $3^k p, k \geq 4$ dengan $q = 2^a 3^b + 1$ adalah prima dan $a, c \geq 1$ dan $b, d \geq 0$.