# II. LANDASAN TEORI

Pada bilangan ini diterangkan materi yang berkaitan dengan penelitian, diantaranya konsep bilangan sempurna, bilangan bulat, bilangan prima,faktor bilangan bulat dan kekongruenan.

## 2.1 Keterbagian Bilangan Bulat

Secara umum, apabila α bilangan bulat dan *b* bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan *q* dan *r* sedemikian hingga :

$\alpha = qb + r\ ,\ 0 \leq r < b$

dalam hal ini, *q* disebut hasil bagi dan *r* sisa pada pembagian "α dibagi dengan *b* ". Jika $r = 0$ maka dikatakan α habis dibagi *b* dan ditulis $b \mid \alpha$. Untuk α tidak habis dibagi *b* ditulis $b \nmid \alpha$. (Burton, 1980)

**Sifat keterbagian pada bilangan bulat**

Secara umum apabila α bilangan bulat dan *b* bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan *q* dan r sedemikian sehingga :

$\alpha = qb + r, 0 \leq r < b$

dalam hal ini, *q* disebut hasil bagi dan *r* adalah sisa pada pembagian " α dibagi dengan *b*". jika $r = 0$ maka dikatakan α habis dibagi dengan *b* , dan ditulis $b \mid \alpha$. Untuk α tidak habis dibagi ditulis $b \nmid \alpha$.

Konsep di atas dapat dinyatakan dalam definisi berikut :

**Definisi 2.1.1**

Bilangan bulat α membagi habis bilangan bulat *b* (ditulis $\alpha \mid b$) jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat *k* sehingga $b = \alpha \cdot k$.

Jika α tidak membagi habis b maka $b \nmid \alpha$ ( Sukirman. 1997).

Contoh:

1. $3 \mid 18$, sebab $18 = 3k$ dengan k = 6
2. $3 \nmid 10$, sebab tidak ada bilangan bulat *k* sehingga $10 = 3k$. sifat-sifat penting keterbagian dinyatakan dalam teorema berikut :

**Teorema 2.1.1**

Untuk bilangan-bilangan bulat $\alpha, b, c$ dan *d* berikut :

1. $\alpha \mid 0$ , $1 \mid 0$, $\alpha \mid \alpha$
2. $\alpha \mid 1$, jika dan hanya jika $\alpha = 1$ atau $\alpha = -1$
3. jika $\alpha \mid b$ dan $b \mid c$ maka $\alpha \mid c$
4. jika $\alpha \mid b$ dan $b \mid c$ maka $\alpha \mid (b+c)$.
5. jika $\alpha b \mid c$, maka $\alpha \mid c$ dan $b \mid c$.
6. Jika $d \mid b$ maka $d \mid -b$.
7. Jika $\alpha \mid b$ dan $c \mid d$ mka $\alpha c \mid bd$.
8. Jika $\alpha \mid b$ maka $\alpha \mid cb$, untuk bilangan bulat *c* sebarangan.
9. Jika $\alpha \mid b$ dan $\alpha \mid c$ maka $\alpha ( bm + cn )$, untuk sebarang bilangan bulat *m* dan *n*.

(Burton,1980).

**Bukti:**

1) Untuk α $\mid$0, ada suatu bilangan bulat *m* sehingga *αm = 0*

   karena *α ≠ 0*, maka haruslah *m = 0* sehingga α $\mid$0. Untuk 1 $\mid$ α, *1 · m =α* ,

   haruslah *m = α* sehingga 1 $\mid$α. Untuk α $\mid$α, *αm* = α., haruslah *m = 1* sehingga

   *α*|*α.*

2) Misalkan *α ≠1* , atau *α ≠ -1* maka *αm = 1*, karena α dan *m* bilangan bulat ,

   haruslah α dan *m* sama dengan ± 1.

3) Jika *α* $\mid$ *b* maka ada suatu bilangan *m* sehingga *αm = b* , dan jika *b* $\mid$ *c* maka

   ada suatu

   bilangan bulat *n* sehingga *bn = c*. jika α $\mid$b dan b $\mid$c maka berlaku :

   *αm · bn = bc*

   *αb · mn = bc (mn = k*, untuk setiap *k* bilangan bulat)

   *αk = c*

   Dengan demikian , benar bahwa α $\mid$c.

4) Dengan mengikuti sifat (3), maka

5) Jika αb $\mid$c, ada suatu bilangan bulat m sehingga dapat ditulis dengan

   *αb · m = c*

   *α · bm =c (bm = k,* untuk setiap *k* bilangan bulat )

   *α · k = c,* dapat ditulis dengan α $\mid$c

   *b · αm = c (αm = l*, untuk setiap *l* bilangan bulat )

   *b · l = c*

   Dengan demikian , benar bahwa b $\mid$ *c*

6) Dengan mengikuti sifat (2), jelas jika *d* $\mid$ *b.*

7) Jika *α* $\mid$ *b*, maka terdapat bilangan bulat *m* sehingga *αm = b*, dan jika *c* $\mid$ *d.*

Maka terdapat bilangan bulat $n$ sehingga $cn = d$

Jika $\alpha \mid b$ dan $c \mid d$ maka :

$\alpha m \cdot cn = bd$

$\alpha c \cdot mn = bd$ ($mn = k$, untuk setiap $k$ bilangan bulat)

$\alpha c \cdot k = bd$

dengan demikian, jika $\alpha \mid b$ dan $c \mid d$ maka $\alpha c \mid bd$

8) Jika $\alpha \mid b$, maka terdapat bilangan bulat $m$ sehingga $\alpha m = b$

$\alpha m = b$

$\alpha m \cdot c = b \cdot c$ (untuk $c$ bilangan bulat)

$\alpha \cdot cm = c \cdot b$ ($cm = k$, untuk setiap $k$ bilangan bulat )

$\alpha \cdot k = c \cdot b$

dengan demikian jika $\alpha \mid b$ maka $\alpha \mid cb$ untuk setiap $c$ bilangan bulat sebarang.

9) Jika $\alpha \mid b$, maka terdapat bilangan bulat $k$ sehingga $\alpha k = b$, dan jika $\alpha \mid c$ maka terdapat bilangan bulat $l$ sehingga $\alpha l = c$. maka berlaku :

$bm + cn = \alpha km + \alpha ln = \alpha (km + ln)$

$\alpha(km + ln) = bm + cn$

Dengan demikian jika $\alpha \mid b$ dan $\alpha \mid c$ maka $\alpha \mid ( bm = cn )$.

## 2.2 Faktor Persekutuan Terbesar

Dalam matematika Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan adalah bilangan bulat positif terbesar yang dapat membagi habis kedua bilangan itu.

**Definisi 2.2.1**

Cara mencari FPB dari beberapa bilangan yaitu dengan mengalikan faktor-faktor prima yang sama dan berpangkat terkecil

Contoh 2.2.1:

1. Mencari FPB dari 12 dan 20:

Faktor dari 12 = 1, 2, 3, 4, 6 dan 12

Faktor dari 20 = 1, 2, 4, 5, 10 dan 20

FPB dari 12 dan 20 adalah faktor sekutu (sama) yang terbesar, yaitu 4.

2. Mencari FPB dari 15 dan 25:

Faktor dari 15 = 1, 3, 5', dan 15

Faktor dari 25 = 1, 5, dan 25

FPB dari 15 dan 25 adalah faktor sekutu (sama) yang terbesar, yaitu **5**.

## 2.3 Bilangan Sempurna

**Definisi 2.3.1**

Bilangan sempurna adalah bilangan bulat positif yang merupakan penjumlahan dari pembagi positif sejati. Yaitu penjumlahan dari pembagi positif tidak termasuk bilangan itu sendiri**.** Arti lainnya, bilangan sempurna adalah bilangan yang merupakan setengah penjumlahan dari semua pembagi positif (termasuk bilangan itu sendiri), atau dikatakan $\sigma(n) = \Sigma n_i$ **.**

Contoh :

1. 6 → bilangan sempurna Sebab 6 = 1 + 2 + 3
2. 28→ bilangan sempurna sebab 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

**Faktor Bilangan Bulat**

**Definisi 2.3.1**

Jika α, b, dan c bilangan bulat, dan α · b = c disebut faktor c, atau pembagi c, sedangkan c disebut kelipatan α atau b .

Jadi ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15 dan ± 30 adalah faktor dari 30. Bilangan bulat dengan bilangan dua sebagai salah satu faktornya dinamai dengan bilangan bilangan bulat genap. Bilangan bulat genap dapat dinyatakan dengan 2*k*, dimana *k* adalah bilangan bulat.

Contoh :

Misalnya 6 = 2 · 3 ; -14 = 2 · (-7) dan 120 = 2 · 60 Dengan demikian, bilangan bulat ganjil dapat dinyatakan 2*k* + 1, misalnya 11 = 2 · 5 + 1 dan 17 = 2 · 8 + 1

**2.4 Bilangan Prima**

**Definisi 2.4.1**

Sebuah bilangan $p > 1$ disebut bilangan prima, atau prima sederhana jika faktor-faktornya hanya bilangan positif 1 dan p. bilangan bulat lebih besar dari *1* yang tidak prima dinamakan bilangan komposit. (Burton, 1980)

Contoh :

23 adalah bilangan prima Karena bilangan tersebut hanya habis dibagi 1 dan bilangan itu sendiri atau yaitu 23.

10 adalah bilangan komposit karena bilangan tersebut habis dibagi sama dengan 2 dan 5,selain 1 dan bilangan itu sendiri yaitu 10.

**Teorema 2.4.1**

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dan 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

**Bukti :**

Diambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Jika n suatu bilangan prima, maka $n \mid n$ . apabila *n* suatu bilangan komposit maka *n* mempunyai faktor selain 1 dan n sendiri, misalnya $d_{1,}$ yaitu $d_1 | n$ , maka ada bilangan bulat positif $n_1$ sedemikian hingga $n = d_1 n_1$ dengan $1 < n_1 < n$. jika $n_1$ suatu bilangan prima, maka $n_1$ membagi $n_1 | n$.

Tetapi jika $n_1$ suatu bilangan komposit, maka $n_1$ mempunyai faktor selain 1 dan $n_1$, misalnya $d_{2\,}$yaitu $d_2 | n_1$ sehingga ada bilangan bulat positif $n_2$ sedemikian sehingga $n_1$ ,misalnya $n_1 = d_{2.}$ dengan $1 < n_2 < n_1$. Jika $n_2$ suatu bilangan prima, maka $n_2 | n_1$ Karena $n_2 | n_1$ dan $n_1 | n$, maka $n_2 | n$, jadi n terbagi oleh suatu bilangan prima $n_{2.}$

**Definisi 2.4.2**

Dua bilangan bulat α dan *b* dikatakan relatif prima jika $\gcd(a, b) = 1$. Jika α dan *b* relatif prima, maka terdapat bilangan *m* dan *n* sedemikian sehingga

$m\alpha + nb = 1$

(Flath,1989)

**Definisi 2.4.3**

Misalkan $a_{1,} a_{2,} \cdots, a_n$ bilangan bulat tidak nol. Bilangan tersebut adalah pasangan relatif prima jika faktor persekutuan terbesarnya adalah 1 (Stark, 1970).

Contoh :

Bilangan bulat 4, 15, dan 77 pasangan relatif prima karena faktor persekutuan Terbesar (FPB) dari, 4, 15 = FPB dari 4,77 = 1.

**Teorema 2.4.2**

Jika *p* bilangan prima, dan $p|ab$ maka $p|a$ atau $p|b$ (sukirman 1997).

**Bukti :**

Karena $p$ bilangan prima, maka $p$ hanya mempunyai faktor-faktor *1* dan $p$. sehingga $(a,p) = 1$, maka $(a,p) = p$. untuk bilangan bulat sembarang jika $(a,p) = 1$, karena $p|ab$ maka $p|b$ jika $(a,p) = p$ maka $p|a$ . Jadi $p|a$ atau $p|b$.

## 2.5 Fungsi Euler $\phi$

Fungsi Euler $\varphi$ dituliskan dengan $\varphi(n)$ untuk $n \geq 1$ yang menyatakan jumlah bilangan bulat positif $< n$ yang relatif prima dengan *n*

Contoh : tentukan $\varphi(20)$, Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 20 adalah 1 sampai 19.di antara bilangan-bilangan tersebut, terdapat $\varphi(20) = 8$ buah yang relatif prima dengan 20, yaitu 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

## 2.6 Kekongruenan

Teori kekongruenan merupakan pendekatan lain untuk menjawab pertanyaan tentang konsep keterbagian. Konsep dan sifat-sifat keterbagian itu dapat dipelajari lebih mendalam lagi dengan menggunakan konsep kekongruenan. Kekongruenan merupakan cara lain untuk menelaah keterbagian dalam himpunan bilangan bulat.

**Definisi 2.6.1**

Misalkan α dan $b$ bilangan bulat dan n adalah bilangan bulat positif. Jika $|(a.b)$ , dikatakan bahwa α kongruen dengan b modulo n dan ditulis : $a \equiv b(mod\ n)$.

(Stark, 1970)

**Teorema 2.6.1**

Misalkan *n* bilangan bulat positif. Untuk semua bilangan-bilangan bulat *α*.

Berlaku :

1. $a \equiv b(mod\ n)$.
2. Jika $a \equiv b(mod\ n)$, maka $b \equiv a(mod\ n)$
3. Jika $a \equiv b(mod\ n)$, maka $\equiv c(mod\ n)$ maka $a \equiv c(mod\ n)$

(stark, 1970)

**Bukti :**

1) Untuk setiap bilangan bulat α, terdapat α – α $= 0 \cdot n$ , sehingga

   $a \equiv a(mod\ n)$

2) Sekarang jika $a \equiv b(mod\ n)$, maka α – $b = kn$ untuk setiap bilangan bulat $k$. sehingga, α – $b = -k(n)$) dan $k$ adalah bilangan bulat,

   maka :

   $b \equiv a(mod\ n)$

3) Misalkan $a \equiv b(mod\ n)$,maka $\equiv c(mod\ n)$ , maka terdapat bilangan bulat $k_1$ dan $k_2$ Yang memenuhi $a - b = k_1 n$ dan $b - c = k_2 n$. Maka berlaku :

   $\alpha - c = (\alpha - b) + (b + c) = k_1 n + k_2 n = (k_1 - k_2)n$ yang dapat dinyatakan dengan $a \equiv c(mod\ n)$

   Maka dikatakan teorema tersebut terbukti.