II. TINJAUAN PUSTAKA

Distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ adalah salah satu distribusi probabilitas kontinu. Distribusi ini pertama kali diperkenalkan McDonald dan Newey (1988) untuk mengestimasi parameter regresi. Distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ secara luas digunakan dalam bidang ekonomi dan keuangan.

Salah satu bentuk khusus dari distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ adalah distribusi $t(\mu, \tau, v)$ dengan $p = 2$ dan distribusi Laplace untuk $p = 1$ dan $q \rightarrow \infty$. Distribusi t-Student merupakan bentuk khusus dari distribusi normal untuk sampel ukuran kecil $(n < 30)$ yang menyebar normal dengan rataan nol. Ditribusi Laplace merupakan salah satu kasus distribusi simetris dengan ukuran pemusatan Laplace sama dengan mean, median, modus, dengan varians $2\sigma^2$.

2.1 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam berbagai analisis statistika. Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham de Moivre dalam artikelnya pada tahun 1733 sebagai pendekatan distribusi binomial untuk n besar.

Definisi 2.1 Distribusi Normal

Menurut Hogg dan Craig (1995) peubah acak X dikatakan berdistribusi normal, jika memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & -\infty < x < \infty \\ 0\ , & selainnya \end{cases}$$

Dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $\sigma > 0$.

2.2 Distribusi t-Student

Distribusi t-student merupakan bentuk khusus dari distribusi normal untuk sampel ukuran kecil $(n < 30)$ yang menyebar normal dengan rataan nol. Distribusi ini ditemukan oleh W.S. Gosset (1876-1936) dari Inggris yang menerbitkan hasil kerjanya dengan nama samaran yaitu student. Oleh karena itu distribusi ini dikenal sebagai distribusi t-student.

Bukti :

Misal $X \overset{bsi}{\sim} N(0,1)$ dan $Y \overset{bsi}{\sim} \chi^2(v)$

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{V}}} \quad \rightarrow \quad X = T\sqrt{\frac{Y}{V}}$$

Fungsi kepekatan peluang distribusi normal baku:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Fungsi kepekatan peluang distribusi *chi-square* :

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \qquad 0 < x < \infty$$

Maka fungsi densitas atau fungsi kepekatan peluang bersama diperoleh sebagai berikut :

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} . \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}} e^{-\frac{y}{2}-\frac{1}{2}x^2} y^{\frac{v}{2}-1} \qquad (2.1)$$

Misalkan

$U = Y$

$X = T\sqrt{\frac{U}{V}}$

Substitusikan permisalan diatas ke dalam fungsi kepekatan peluang bersama pada persamaan (2.1), selanjutnya matriks jacobian diperoleh sebagai berikut :

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{du} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{dy}{du} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{t}{2\sqrt{uv}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

Fungsi kepekatan peluang bersama dari T dan U adalah :

$$f(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}} u^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{u}{v}}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$$f(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}} v^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)}$$

Fungsi kepekatan peluang marginal dari T adalah :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}}} v^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)} du$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)} du \qquad (2.2)$$

Misalkan

$$\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{v}\right) = r$$

$$u = \frac{2r}{1+\frac{t^2}{v}}$$

$$\mathcal{J} = \frac{2}{1+\frac{t^2}{v}}$$

$$|\mathcal{J}| = \frac{2}{1+\frac{t^2}{v}}$$

Substitusikan permisalan diatas ke dalam fungsi kepekatan peluang dari T pada persamaan (2.2) sehingga diperoleh :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \left(\frac{2r}{1+\frac{t^2}{v}}\right)^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-r} \frac{2}{\left(1+\frac{t^2}{v}\right)} dr$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{v}}\right)^{\frac{v+1}{2}} r^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-r} dr$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{v}}\right)^{\frac{v+1}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{v+1}{2}-1} e^{-r} dr$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) 2^{\frac{v}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{1 + \frac{t^2}{v}} \right)^{\frac{v+1}{2}} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) 2^{\frac{v+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{v+1}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) v^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) v^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{(v+1)}{2}}}$$

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{(v+1)}{2}}} \qquad (2.3)$$

Fungsi marginal dari T dalam persamaan (2.3) merupakan fungsi kepekatan peluang distribusi t-student dengan derajat bebas v.

Definisi 2.2 Distribusi *t*-Student

Peubah acak kontinu X dikatakan berdistribusi t dengan derajat bebas v, jika memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$f(x; v) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\ \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{\left(\frac{v+1}{2}\right)}} ; & -\infty < x < \infty \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

dimana $v > 0$ (Sahoo, 2008).

2.3 Distribusi $\boldsymbol{t(\mu, \tau, v)}$

Distribusi $t(\mu, \tau, v)$ merupakan pengembangan dari distribusi t-student dengan parameter skala $\tau = \sigma/\sqrt{2}$.

Definisi 2.3 Distribusi $\boldsymbol{t(\mu, \tau, v)}$

Distribusi $t(\mu, \tau, v)$ memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$t(x|\mu, \tau, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\tau\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\tau^2 v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

Dimana fungsi kepekatan peluang ini sama dengan distribusi t-student dengan derajat bebas $v = 2q$ dan parameter skala $\tau = \sigma/\sqrt{2}$ (Chan, Choy, dan Makov, 2007).

2.4 Distribusi *Generalized t*

Distribusi *generalized* t merupakan pengembangan dari distribusi t. Distribusi ini digunakan secara luas dalam bidang ekonomi dan keuangan.

Definisi 2.4 Distribusi *Generalized t*

Menurut McDonald dan Newey (1988), distribusi *generalized* t memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$GT(x;\, \mu, \sigma, p, q) = \frac{p}{2q^{\frac{1}{2}}\sigma B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left(1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right)^{q+\frac{1}{p}}}$$

Dimana $\mu \in$ □ adalah parameter lokasi, $\sigma > 0$ adalah parameter skala, $p > 0$ dan $q > 0$ keduanya merupakan parameter bentuk dan $B(\cdot)$ adalah fungsi beta (Chan, Choy, dan Makov, 2007).

2.5 Distribusi Laplace

Distribusi Laplace kadang-kadang disebut distribusi eksponensial ganda, karena dapat dianggap sebagai dua distribusi eksponensial (dengan parameter lokasi tambahan). Seperti dalam kasus distribusi simetris lainya, seperti distribusi normal dan distribusi logistic, ukuran pemusatan Laplace sama dengan mean, median, dan modus.

Definisi 2.5 Distribusi Laplace

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Laplace, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)$$

dengan μ merupakan bilangan real dan $\sigma > 0$ (Sahoo, 2008).

2.6 Distribusi *Chi-Square*

Distribusi *chi-square* seringkali digunakan dalam statistika inferensia, seperti dalam uji hipotesis, atau dalam penyusunan selang kepercayaan. Salah satu penggunaan distribusi ini adalah uji *chi-square* untuk kebersesuaian (*goodness of fit*).

Definisi 2.6 Distribusi *Chi-Square*

Menurut Sahoo (2008) peubah acak X dikatakan berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas v, jika memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\, x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

2.7 Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Pada penelitian ini fungsi gamma dan fungsi beta digunakan untuk mempermudah dalam mencari momen ke-r dari distribusi *generalized* t, distribusi t, distribusi t-student dan distribusi Laplace.

Definisi 2.7 Fungsi Gamma

Fungsi gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ didefinisikan sebagai :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$$

dimana n adalah bilangan real positif $(n > 0)$.

Lemma 2.1

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Bukti :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}\ dx$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \tag{2.4}$$

Misalkan

$y = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x = y^2$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{x}\, dy = dx \quad \rightarrow \quad 2y\, dy = dx$

$x = 0$ maka $y = 0$

$x = \infty$ maka $y = \infty$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.4) sehingga diperoleh :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}.\, 2y}{y}\, dy$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

Misalkan

$u = rcos\theta$

$v = rsin\theta$

$r = u^2 + v^2$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{du}{dr} & \frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{dr} & \frac{dv}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r(cos^2\theta + sin^2\theta) = r$$

Sehingga

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}.r\, dr\, d\theta$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}.2r\, dr\, d\theta$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr^2\right) d\theta$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Gamma(1)\, d\theta$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Definisi 2.8 Fungsi Beta

Misal α dan β adalah dua bilangan real positif. Fungsi beta $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan sebagai :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}dx$$

Teorema 2.1

Misal α dan β adalah dua bilangan real positif, maka :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

dimana

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$$

Bukti :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}\,dy\right) \tag{2.5}$$

Misalkan

$x = u^2 \quad \rightarrow \quad dx = 2u\,du$

$y = v^2 \quad \rightarrow \quad dy = 2v\,dv$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.5) sehingga diperoleh :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty u^{2\alpha-2}e^{-u^2}\,2u\,du\right)\left(\int_0^\infty v^{2\beta-2}e^{-v^2}\,2v\,dv\right)$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty u^{2\alpha-1} v^{2\beta-1} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv \tag{2.6}$$

Misalkan

$u = r\cos\theta$

$v = r\sin\theta$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.6) sehingga diperoleh :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (r\cos\theta)^{2\alpha-1} (r\sin\theta)^{2\beta-1} e^{-(r^2)} r\, dr\, d\theta$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1} e^{-(r^2)} r\, dr\, d\theta$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty (r^2)^{\alpha+\beta-1} e^{-r^2}\, dr^2\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1}\, d\theta\right)$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2\alpha-1} (\sin\theta)^{2\beta-1}\, d\theta\right) \tag{2.7}$$

Misalkan

$t = \cos^2\theta \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$

$dt = \frac{1}{2}(-\sin(2\theta)).\,2\, d\theta \quad \rightarrow \quad dt = -\sin(2\theta)\, d\theta \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{1}{-\sin(2\theta)} dt$

Untuk $\theta = 0$ maka $t = 1$

Untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$ maka $t = 0$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.7) sehingga diperoleh :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\left(\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt\right)$$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

Akibat 2.1

Untuk setiap α dan β positif, fungsi beta adalah simetris. Yaitu :

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

Bukti :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad (2.8)$$

Misalkan

$y = 1 - x \quad \rightarrow \quad dy = -dx$

$x = 0$ maka $y = 1$

$x = 1$ maka $y = 0$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.8) sehingga diperoleh :

$$B(\alpha,\beta) = \int_1^0 (y-1)^{\alpha-1}y^{\beta-1}(-dy)$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\beta-1}(y-1)^{\alpha-1}dy$$

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

Akibat 2.2

Untuk setiap α dan β positif, fungsi beta dapat diekspresikan sebagai

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\,du$$

Bukti :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x)^{\alpha-1}}.(1-x)^{\alpha+\beta-2}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1}.(1-x)^{\alpha+\beta-2}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha+\beta}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)^{\alpha+\beta}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha+\beta}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx \qquad (2.9)$$

Misalkan

$$u = \frac{x}{1-x}$$

$$du = \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

$x = 0$ maka $u = 0$

$x = 1$ maka $u = \infty$

Substitusikan permisalan tersebut ke dalam persamaan (2.9) sehingga diperoleh :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\, du$$

2.8 Momen ke-r

Momen ke-r dari suatu peubah acak digunakan sebagai salah satu cara untuk mendapatkan nilai momen dari suatu distribusi.

Definisi 2.9 Momen ke-r

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen ke-r di sekitar titik asal dari peubah acak X didefinisikan sebagai :

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, .f(x)\, dx$$

(Hogg dan Craig, 1995).

2.9 Ekspansi Deret MacLaurin

Pada penelitian in deret MacLaurin digunakan untuk menyelesaikan fungsi e^{tx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi.

Teorema 2.2 Deret MacLaurin

Misalkan f adalah fungsi dimana turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang memuat a. Jadi, untuk setiap x di dalam I berlaku :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Persamaan di atas disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$.Jika $a = 0$, maka bentuk deret dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots$$

Deret tersebut disebut sebagai ekspansi deret MacLaurin bagi fungsi $f(x)$

Dengan menggunakan ekspansi deret MacLaurin maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut :

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!}$$

(Purcell,Varberg, dan Rigdon, 2003).

2.10 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak digunakan sebagai salah satu cara untuk mendapatkan nilai momen dari suatu distribusi. Fungsi pembangkit momen memiliki bentuk yang sederhana, namun tidak semua distribusi peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen.

Definisi 2.10 Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari peubah acak X didefinisikan sebagai :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x)\, dx$$

(Hogg dan Craig, 1995).