MENGKONTRUKSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* MENJADI FUNGSI GREEN MENGGUNAKAN METODE VARIASI PARAMETER DAN METODE TRANFORMASI LAPLACE

(Skripsi)

Oleh

YUSNAENI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2010

MENGKONTRUKSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* MENJADI FUNGSI GREEN MENGGUNAKAN METODE VARIASI PARAMETER DAN METODE TRANFORMASI LAPLACE

Oleh

YUSNAENI

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2010

Judul Skripsi	: **MENGKONTRUKSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE-*n* MENJADI FUNGSI GREEN MENGGUNAKAN METODE VARIASI PARAMETER DAN METODE TRANSFORMASI LAPLACE**
Nama Mahasiswa	: **Yusnaeni**
No. Pokok Mahasiswa	: 0517031073
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Azis, M.Si.	**Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19610128 198811 2 001	NIP19620704 198803 1 002

MENGETAHUI

Ketua Jurusan	Ketua Program Studi Matematika
Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19620704 198803 1 002	NIP 19610128 198811 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ____________________

   Sekertaris : **Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ____________________

   Penguji

   Bukan Pembimbing : **Amanto, M.Si.** ____________________

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Dr. Sutyarso, M.S., M. Biomed.
   NIP. 19570424 198703 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 19 **Mei 2010**

ABSTRAK

MENGKONTRUKSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-*n* MENJADI FUNGSI GREEN MENGGUNAKAN METODE VARIASI PARAMETER DAN METODE TRANFORMASI LAPLACE

Oleh
Yusnaeni

Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi persamaan diferensial linier orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

Berdasarkan hasil penelitian didapat bahwa persamaan diferensial linier orde-*n* dapat dikontruksi menjadi fungsi Green dengan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace. Dari kontruksi dengan metode variasi parameter, solusi umum dari persamaan diferensial linier orde-*n*

$$y = y_h + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(x,t).\phi(t)\ dt$$

Sedangkan untuk metode transformasi Laplace, solusi umum dari persamaan diferensial linier orde *n*

$$y = y_h + \int_{0}^{x} f(t)w(x-t)dt$$

Kata Kunci: Persamaan diferensial linier orde-*n*, Fungsi Green, Variasi parameter, Transformasi Laplace

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pringsewu pada tanggal 26 Agustus 1987, anak keempat dari kelima bersaudara dari pasangan Bapak Suyanto Effendi dan Ibu Tri Munasih.

Penulis menyelesaikan Pendidikan di Sekolah Dasar Negeri 3 Kalirejo Lampung Tengah pada tahun 1999, Sekolah Lanjut Tingkat Pertama Negeri 1 Kalirejo Lampung Tengah pada tahun 2002, dan Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Sukoharjo pada tahun 2005. Pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung (FMIPA Unila) melalui jalur Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB). Sedangkan pada tahun 2008, penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Balai Diklat Pertanian Hajimena Lampung.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam Unit Kegiatan Mahasiswa Fakultas (UKMF) Natural dan Aliansi Pers Mahasiswa (APM) Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur dan kerendahan hati, skripsi ini penulis persembahkan untuk

1. Bapak dan ibuku, sebagai tanda hormat dan baktiku atas kesabaran dan doanya menantiku menjadi seorang sarjana;
2. Kakak-kakak dan adikku atas kasihnya yang tak terhingga;
3. Almamaterku, Universitas Lampung, yang menempa kedewasaanku.

MOTTO

In every valley there is a way to the top

(Disetiap lembah, pasti ada jalan menuju puncak)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Subhana wata'ala karena berkat limpahan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Mengkontruksi Persamaan Diferensial Linier Orde-n Menjadi Fungsi Green Mengunakan Metode Variasi Parameter dan Metode Transformasi Laplace*.

Inilah pekerjaan paling besar yang pernah penulis lakukan, maka selayaknya penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih kepada

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M. Si. selaku pembimbing pertama atas bimbingan, arahan, saran dan bantuannya selama penulis menyelesaikan skripsi ini;
2. Bapak Tiryono Ruby, M.Sc. Ph.D. selaku pembimbing kedua yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dengan sabar dan pengertian ;
3. Bapak Amanto, S.Si, M.Si. selaku pembahas dan pembimbing akademik yang telah memberikan masukkan dan saran kepada penulis;
4. Bapak Dr. Sutyarso, M.S. selaku Dekan FMIPA, beserta stafnya;
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika FMIPA Unila dan staf-stafnya;
7. Bapak Drs. Amir Supriyanto, M.Si yang telah memberikan ilmu pengetahuan *Green's Function* kepada penulis;

8. Sahabat-sahabatku: Anita, Yuni, Yulia, Hendra, Tri K, Pepi, Lika, Atma, Meilina, Nurma, Pita, Ita, Eka, Lela, dan Hani, terima kasih atas dorongan dan semangat yang diberikan selama ini;
9. Seluruh teman-teman UKMF Natural, APM Lampung, *Science Generation of Mathematics*'05 (*SIGMA*'05), *Community of Science Two Thousand and Six* (*COSMIX*), Wisma Annisa 1, LBPP LIA Bandar Lampung dan Lembaga Pendidikan Komputer PINUS atas persaudaraan dan doanya.

Demikian ucapan terima kasih penulis sampaikan, hanya Allah SWT yang dapat membalas dan memberi rahmat-Nya atas segala usaha dan bantuan yang telah diberikan kepada penulis.

Harapan penulis semoga skripsi ini tidak hanya dihargai sebagai suatu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains, akan tetapi sebagai suatu sumbangsih kepada mahasiswa yang ingin mengembangkan ataupun memperbaiki penelitian di dalam skripsi ini. Banyak sekali perkembangan dan perbaikkan menarik yang penulis temukan dan ingin sekali penulis lanjutkan. Akan tetapi tidak terlaksana dan semoga dapat dilanjutkan oleh mahasiswa yang tertarik.

Bandar Lampung, Mei 2010

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang 1
C. Tujuan Penelitian 3
D. Batasan Masalah 3
E. Manfaat Penelitian 3

II. LANDASAN TEORI

A. Persamaan Diferensial Biasa Linear Orde-*n* 4
B. Fungsi Green 8
C. Matriks 10
D. Transformasi Laplace 15

III. METODOLOGI PENELITIAN

A. Waktu dan Tempat Penelitian 19
B. Metode Penelitian 19

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Variasi Parameter 22
B. Metode Transformasi Laplace 32
C. Kelebihan Metode Fungsi Green 35

V. PENUTUP

A. Kesimpulan 41
B. Saran 41

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. Transformasi Laplace Invers 16

DAFTAR SIMBOL

$a_i(x)$	= Konstanta (i = 0, 1, 2, ..., n)
$\boldsymbol{f}$	= Fungsi batas
F, G	= Fungsi Laplace
D	= Daerah asal
$\hat{D}_x$	= Operator diferensial
$\boldsymbol{G}$	= Fungsi Green
$\boldsymbol{L}$	= Operator diferensial
S	= Nilai awal
W	= Wronskian
ϕ	= Fungsi batas
Δ	= Operator Laplace
δ	= Dirac delta

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu metode matematika yang banyak digunakan dalam ilmu pengetahuan seperti fisika, kimia, industri dan teknik mesin. Dalam bidang-bidang tersebut persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan suatu fenomena dunia nyata yang bersifat komplek. Dalam hal ini, persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan menentukan solusinya.

Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Artinya, jika fungsi dan turunan-turunannya disubtitusikan ke dalam persamaan, diperoleh suatu pernyataan yang benar. Jika suatu solusi dari persamaan diferensial tidak terdapat konstanta dapat diselesaikan dengan menggantikan nilai-nilai awal dan syarat batas yang diketahui (Harini, 2010).

Untuk menentukan solusi khusus dengan nilai batas sulit untuk diselesaikan. Ada dua metode yang digunakan yakni metode numerik dan analitik. Salah satu metode analitik yang digunakan adalah fungsi Green.

Fungsi Green dikembangkan oleh matematikawan Inggris, George Green pada tahun 1830. Fungsi Green digunakan untuk menyelesaikan nilai batas dan secara luas digunakan pada berbagai bidang keilmuan. Bidang keilmuan yang sering menggunakan fungsi Green yakni bidang fisika, seperti pada teori medan kuantum. Di mana teori medan kuantum melibatkan persamaan diferensial linear tak homogen. Ini dapat diartikan bahwa fungsi Green adalah solusi dasar untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier tak homogen.

Persamaan diferensial linier orde *n* memiliki bentuk:

$$a_n(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1.1)$$

di mana fungsi $f(x)$ dan $a_i(x)$ (i = 0, 1, ... , n) kontinu pada suatu selang I. Jika fungsi $f(x)$ dari persamaan tersebut identik dengan nol disebut persamaan homogen. Jika $f(x)$ tidak identik nol disebut persamaan tak homogen (Finizio dan Ladas, 1988).

Maka masalahnya adalah bagaimana menentukan solusi persamaan linier orde-*n* tak homogen dari nilai batas pada selang I. Sedangkan persamaan diferensial tersebut mengandung koefisien-koefisien konstan. Hal ini dapat ditentukan dengan mengkontruksi persamaan diferensial linier orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan dua metode yang seringkali digunakan pada koefisien-koefisien konstan. Kedua metode tersebut adalah metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

Berdasar latar belakang diatas, penelitian ini adalah mengkontrusi persamaan diferensial linier orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

B. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi persamaan diferensial linier orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

C. Batasan Masalah

Pada penelitian ini masalah dibatasi hanya mengkonstruksi persamaan diferensial orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

D. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini secara terperinci adalah:

1. Menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial orde-*n*.
2. Mempermudah dalam menentukan solusi persamaan diferensial untuk fungsi *f* sebarang.
3. Memberikan informasi efektifitas dan efesiensi fungsi Green dalam menyelesaikan masalah nilai batas persamaan diferensial orde-*n* dengan menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.

II. LANDASAN TEORI

A. Persamaan Diferensial Linier Orde-*n*

Definisi 2.1 Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

Definisi 2.2 Persamaan Diferensial Linear

Suatu persamaan diferensial dalam bentuk standar

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

Jika $f(x,y)$ dapat dituliskan sebagai $f(x,y) = -p(x)+q(\mathrm{x})$, persamaan diferensial tersebut adalah linear yang berbentuk

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.2}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Definisi 2.3 Orde dan Degree

Suatu persamaan diferensial biasa orde-*n* adalah persamaan berbentuk:

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ yang menyatakan hubungan antara peubah bebas *x*, peubah tak bebas *y*(*x*) dan turunannya yaitu $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke-*n*, maka persamaan diferensial tersebut mempunyai orde (tingkat). Jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad *k*, maka persamaan diferensial mempunyai derajad (Kartono, 2002).

Definisi 2.4 Persamaan Diferensial Linier Orde-*n*

Suatu persamaan diferensial linear orde-*n* adalah persamaan yang berbentuk

$$a_0(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

Di mana koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0$ dan $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang *I* dan bahwa koefisien pertama $a_n(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Selang *I* disebut selang definisi (selang asal) dari persamaan diferensial itu. Jika fungsi *f*(*x*) identik dengan nol, maka persamaan (2.3) homogen. Jika *f*(*x*) tak identik nol, persamaan (2.3) disebut takhomogen. Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0$ adalah tetap, persamaan (2.3) dikatakan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstanta (Finizio dan Ladas, 1998).

Definisi 2.5 Persamaan Diferensial Tak Homogen Orde-*n*

Misalkan $\boldsymbol{L}(\mathrm{y}) \equiv a_0(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ (2.4)

di mana $a_i(x)\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ adalah kontinu pada interval yang diinginkan. Dan $\phi y = f(x)$, maka dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{L}(y) = \phi y \tag{2.5}$$

Anggap y_p melambangkan solusi tertentu dari persamaan (2.5) dan anggap y_h solusi homogen atau komplementer mewakili solusi umum untuk persamaan homogen $\boldsymbol{L}(y) = 0$ (Bronson dan Costa, 2007).

Teorema 2.1 Solusi umum untuk $\boldsymbol{L}(y) = \phi y$ adalah

$$y = y_h + y_p \tag{2.6}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Bukti:

Jika $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ adalah solusi bebas linear dari $\boldsymbol{L}(y) = 0$ dan $y_p(x)$ adalah solusi partikuler dari $\boldsymbol{L}(y) = f(x)$, maka solusi umum $\boldsymbol{L}(y) = f$ adalah

$$y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) + y_p \tag{2.7}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstan. Jika y_p dan y_q adalah solusi dari $\boldsymbol{L}(y) = f$, maka

$$\boldsymbol{L}(y_q - y_p) = \boldsymbol{L}(y_q) - \boldsymbol{L}(y_p) = f - f = 0$$

$$y_q - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

$$y_q = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + y_p$$

Jadi benar bahwa $y = y_h + y_p$ ■

Definisi 2.6 Wronskian

Suatu himpunan fungsi { $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ } pada interval $a \le x \le b$, yang memiliki sifat bahwa setiap fungsi memiliki n-1 turunan pada interval ini, adalah determinan adalah

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Definisi 2.7 Metode Variasi Parameter

Suatu solusi tertentu dari persamaan diferensial linear orde ke-n

$$\boldsymbol{L}(y) = \phi y$$

memiliki bentuk

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n \quad (2.9)$$

di mana $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ diberikan dalam persamaan

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad (2.10)$$

dan $v_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dari x yang masih harus ditentukan. v_i ditentukan dengan menyelesaikan persamaan-persamaan linear berikut untuk memperoleh v_i' :

$$\begin{array}{lllll} v'_1 y_1 & + v'_2 y_2 & + \ldots + v'_n y_n & = 0 \\ v'_1 y'_1 & + v'_2 y'_2 & + \ldots + v'_n y_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ v'_1 y_1^{(n-1)} & + v'_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + v'_n y_n^{(n-1)} & = \phi(x) \end{array} \quad (2.11)$$

(Bronson dan Costa, 2007).

B. Fungsi Green

Definisi 2.9 Fungsi

Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek *X* dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal *f(x)* dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (Purcell, Varbeg dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.10 Diferensial

Andaikan $y = f(x)$ terdeferensiasi dari peubah bebas *x* dan andaikan bahwa *dx* dan *dy*. Maka, $\Delta(x)$ adalah kenaikkan sebarang peubah bebas *x*. *dx*, disebut diferensial peubah bebas *x*, sama dengan $\Delta(x)$. Di mana $\Delta(y)$ adalah perubahan aktual dalam peubah *y* sewaktu *x* berubah dari *x* berubah dari *x* ke $x + \Delta(x)$ yaitu $\Delta y = f\left(x + \Delta(x) - f(x)\right)$. *Dy*, disebut diferensial peubah tak-bebas *y*, yang didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$ (Purcell, Varbeg dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.11 Turunan

Turunan fungsi *f* adalah fungsi lain $f^{'}$ yang nilainya pada sebarang bilangan *c* adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada (Purcell, Varbeg dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.12 Integral

F suatu anti turunan dari *f* pada selang *I* jika $D_x F(x) = f(x)$ pada *I* yakni jika

F'(*x*) = $f(x)$ untuk semua *x* dalam *I* (Purcell, Varbeg dan Ringdon, 2004).

Definisi 2.13 Fungsi Green

Fungsi Green, ***G***(*x*) untuk operator-Δ dan wilayah batas *D* (domain *D*) pada titik $x_0 \in D$ adalah fungsi yang didefinisikan untuk $x \in D$ seperti bahwa

1. ***G***(*x*) memiliki turunan-turunan yang kontinu, kecuali pada titik
   $x = x_0$ yakni $\Delta \boldsymbol{G} = 0$
2. ***G***(*x*) = 0 untuk $x \neq X$
3. Fungsi ***G***(*x*) terbatas pada x_0 dan mempunyai turunan kontinu
   dimanapun (Strauss, 1992).

Definisi 2.14 Fungsi Green Persamaan Diferensial

Seandainya

$$\hat{D}_x f(x) = f(t) \qquad (2.12)$$

di mana $\hat{D}_x$ adalah operator diferensial. Maka solusi dari

$$\hat{D}_x \boldsymbol{G}(x,t) = \delta(x - t) \qquad (2.13)$$

dapat dihitung dengan

$$f(x) = \int \boldsymbol{G}(x,t)\, f(t)\, dt. \qquad (2.14)$$

(Gatti, dkk. , 2007)

Definisi 2.15 Fungsi Green Persamaan Diferensial Linear Orde-*n*

Fungsi $\boldsymbol{G}(x,t)$ dari persamaan (1.1) dikatakan fungsi Green untuk masalah nilai awal persamaan diferensial di atas jika memenuhi kondisi berikut ini:

1. $\boldsymbol{G}(x,t)$ terdefinisi pada daerah $R=I \times I$ dari semua titik (x,t) dengan x dan t terletak dalam selang I.
2. $\boldsymbol{G}(x,t), \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n \boldsymbol{G}}{\partial x^n}$, merupakan fungsi yang kontinu pada $R=I \times I$.
3. Untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $f \in C(I)$, fungsi

   $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(x,t) f(t)dt$ adalah solusi persamaan diferensial (1) yang

   memenuhi kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \ldots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

   (Sugiarto, 2002).

C. Matriks

Definisi 2.16 Matriks

Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Matriks ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

(Rorres, 2004).

Definisi 2.17 Determinan

Suatu hasilkali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks *A*, *n* x *n* adalah hasilkali dari *n* entri dari *A*, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama (Rorres, 2004).

Teorema 2.2 Jika *A* adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional maka det(*A*) = 0 (Rorres, 2004).

Bukti:

Anggap 1 + 1 ≠ 0 dalam *K*. Jika dipertukarkan dua baris yang identik, akan diperoleh matriks *A*. Oleh karena itu, $|A = |-|A|$, dan dengan demikian $|A|$ = 0. Sekarang anggap 1 + 1 = 0 dalam *K*. Maka $\sum \sigma$ = 1, di mana $\sigma = i_1, i_2, \ldots, i_n$ atau $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ untuk setiap $\sigma \in S_p$. Karena *A* memiliki dua baris yang identik, dapat mengatur suku-suku dari *A* menjadi pasangan-pasangan yang terdiri dari suku-suku yang setara. Karena setiap pasangan adalah 0, determinan *A* = nol. ■

Definisi 2.18 Minor dan Kofaktor

Jika *A* adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor anggota a_{ij} (Rorres, 2004).

Teorema 2.4 Perluasan Kofaktor

Determinan suatu matriks *A n x n* bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan; yaitu, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + ... + a_{nj} C_{nj}$$

adalah perluasan kofaktor di sepanjang kolom ke-*j*, dan

$$det(A) = a_{1i} C_{1i} + a_{2i} C_{2i} + ... + a_{ni} C_{ni}$$

adalah perluasan kofaktor di sepanjang kolom ke-*i* (Rorres, 2004).

Bukti:

Determinan dari matriks *A* yang berukuran *n x n* di mana $n > 1$ dinyatakan dengan

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

untuk *i* = 1, 2, 3, ... , *n*

jika sebarang matriks *A*, maka determinan dari *A*

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \; \dots \; a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \; \dots \; a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \qquad a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kofaktornya dapat ditentukan dengan menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} yang terdapat pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari susunan ”papan periksa”

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & +\dots \\ - & + & - & + & -\dots \\ + & - & + & - & +\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

di mana, $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}, C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = M_{22}$, dan sebagainya.

Misalkan matriks umum 3 x 3

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka matriks kofaktornya

$$C_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \; C_{12} = -\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, C_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}C_{11} - a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.3 Aturan Crammer

Jika Ax = $\boldsymbol{b}$ adalah suatu sistem dari n persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \qquad (2.16)$$

di mana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke-j dari A dengan entri-entri pada matriks

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(Rorres, 2004).

Bukti:

Diketahui bahwa $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$ dan $Ax = \boldsymbol{b}$

Maka,

$$\begin{aligned} Ax &= \boldsymbol{b} \\ x &= A^{-1}\boldsymbol{b} \\ x &= \frac{1}{\det(A)} adj(A)\boldsymbol{b} \\ x &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks yang diperoleh

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 c_{11} + b_2 c_{21} + \dots + b_n c_{n1} \\ b_1 c_{12} + b_2 c_{22} + \dots + b_n c_{n2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_1 c_{1n} + b_2 c_{2n} + \dots + b_n c_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka entri pada baris ke-*j* dari *x* adalah

$$x_j = \frac{b_1 c_1 j + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n j}{\det(A)}$$

Misal:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A_j) = b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \cdots + b_n c_{nj}$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad \blacksquare$$

D. Transformasi Laplace

Definisi 2.19 Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ merupakan statu fungsi dari t terdefinisi untuk $t > 0$. Kemudian

Integral; $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, jika ada dinamakan suatu fungsi dari s, katakan $F(s)$.

Fungsi $F(s)$ ini dinamakan transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinotasikan oleh

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (2.17)$$

Operasi yang baru ditunjukkan yang menghasilkan $F(s)$ dari fungsi $f(t)$ yang diberikan, disebut transformasi Laplace (Kartono, 2002).

Definisi 2.20 Transformasi Laplace Invers

Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ maka $f(t)$ dinamakan transformasi Laplace Invers dari $F(s)$ dan dinotasikan dengan $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$. Kemudian untuk mencari

$L^{-1}\{F(s)\}$ kita harus mencari suatu fungsi dari *t* yang transformasi Laplacenya adalah *F*(*s*) (Kartono, 2002).

Berikut adalah beberapa fungsi *F*(*s*) dan transformasi Laplace inversnya $L^{-1}\{F(s)\}$.

Tabel 2.1 Transformasi Laplace Invers

No.	$F(s) = L\{f(t)\}$	$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n = 0,1,2,\ldots$	$\frac{t^n}{n!}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
6.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

Definisi 2.21 Konvolusi

Konvolusi dari dua fungsi *f*(*x*) dan *g*(*x*) adalah

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{2.18}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Teorema 2.4 Konvolusi

Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ dan $L\{g(t)\} = G(s)$, maka

$$L\{\int_0^t f(u)g(t-u)dt\} = F(s)G(s) \tag{2.19}$$

Jika $L^{-1}\{f(t)\} = F(s)$ dan $L^{-1}\{g(t)\} = G(s)$, maka

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = L\{\int_0^x f(u)g(t-u)dt\} \tag{2.20}$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Bukti:

Diketahui bahwa $F(s) = \int_0^x e^{-su} f(u)du,\ G(s) = \int_0^x e^{-sv} g(v)dv$

maka,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= [\int_0^\infty e^{-su} f(u)du][\int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv \end{aligned}$$

Misalkan : $u+v=t$

$$v=t-u$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st} f(u)g(t-u)dudt$$

$$=\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}[\int_{u=0}^{t} f(u)g(t-u)du]dt$$

$$=L\{\int_{0}^{t} f(u)g(t-u)du\} \blacksquare$$

Teorema 2.5 Transformasi Laplace Dari Turunan

Transform Laplace dari turunan ke-*n* (*n* = 1, 2, 3, …) dari *y*(*x*) adalah

$$L[y^{n}(t)]=s^{n}Y(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0) \quad (2.21)$$

Jika kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ diberikan oleh

$$y(0)=c_0,\, y'(0)=c_1,\, \ldots,\, y^{n-1}(0)=c_{n-1} \quad (2.22)$$

maka (2.21) dapat ditulis ulang sebagai

$$L(y^{n}(x))=s^{n}Y(s)-c_0s^{n-1}-c_1s^{n-2}-\ldots-c_{n-2}s-c_{n-1} \quad (2.23)$$

(Bronson dan Costa, 2007).

Bukti :

Jika *n* = 2 maka

$$L[y''(t)]=\int_{0}^{\infty} e^{-st}y''(t)dt$$

Ambil $u = e^{-st}$ dan $dv = y''(t)dt$ maka $du = -se^{-st}dt$ dan $v = y'(t)$

$$
\begin{aligned}
L[y''(t)] &= e^{-st} y'(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty y'(t)(se^{-st} dt) \\
&= -y'(0) + s\int_0^\infty e^{-st} y'(t) dt \\
&= -y'(0) + sL[y'(t)] \\
&= -y'(0) + s(sY(s) - y(0)) \\
&= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)
\end{aligned}
$$

Jika kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ diberikan oleh

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1$$

Persamaan menjadi

$$L(y''(x)) = s^2 Y(s) - c_0 - c_1 \ \blacksquare$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

A. Waktu dan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil, tahun ajaran 2009/2010 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Universitas Lampung.

B. Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur dengan mengkaji jurnal-jurnal dan buku-buku teks yang berkaitan dengan bidang yang diteliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

a. Metode variasi parameter

1. Mengkaji persamaan diferensial linear orde-n dan solusi umumnya pada fungsi Green.
2. Menentukan solusi umum persamaan diferensial homogen.
3. Mengganti semua konstanta sembarang c dari solusi umum dengan fungsi tak diketahui v dari x pada solusi khusus .

4. Menentukan persamaan yang terdiri dari *n* persamaan dari konstanta dengan menggunakan aturan Cramer.
5. Menentukan determinan Wronskian dari persamaan yang didapat dan menggantikan kolom ke-*k* dengan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.
6. Setelah solusi umum fungsi Green persamaan diferensial didapat, akan ditunjukan bahwa fungsi Green $\boldsymbol{G}(x,t)$ untuk persamaan diferensial.

b. Metode transformasi Laplace

1. Transformasi Laplace pada kedua sisi dari persamaan diferensial, sehingga diperoleh aljabar $Y(s)$.
2. Mengambil transformasi Laplace invers untuk memperoleh $L^{-1}\{Y(s)\}$.
3. Dengan menggunakan teorema konvolusi, diperoleh solusi umum fungsi Green persamaan diferensial didapat, akan ditunjukan bahwa fungsi Green $\boldsymbol{G}(x,t)$ untuk persamaan diferensial.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Variasi Parameter

Sebuah persamaan diferensial linier orde-*n* memiliki bentuk:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (4.1)$$

di mana $a_i(x)(i = 0, 1, \ldots, n)$. Jika

$$a_i(x) = \frac{a_j(x)}{a_n(x)}$$

di mana (*j* = 0, 1, ... , *n*-1) dan $a_n(x) \neq 0$, maka

$$\frac{f(x)}{a_n(x)} = \phi(x) \qquad (4.2)$$

Didefinisikan operator diferesial ***L***(*y*) dengan

$$\boldsymbol{L}y \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y \qquad (4.3)$$

di mana $a_i(x)(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ adalah kontinu pada interval yang diinginkan.

Maka dapat ditulis ulang sebagai:

$$\boldsymbol{L}y = \phi(x) \qquad (4.4)$$

sehingga solusi umum untuk persamaan (4.4) adalah

$$y = y_h + y_p \qquad (4.5)$$

dengan y_h merupakan homogen atau komplementer mewakili solusi umum untuk persamaan homogen ***L***(y) = 0 dan y_p adalah solusi tertentu dari persamaan (4.4). Misalkan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ solusi basis untuk persamaan diferensial homogennya, maka

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \tag{4.6}$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan konstanta. Misalkan solusi tertentunya:

$$y_p = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 + \dots + v_n(x) y_n \tag{4.7}$$

di mana $y_i = y_i(x)(i = 1, 2, \dots, n)$ dan v_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ fungsi yang tidak diketahui dari *x*, yang masih harus ditentukan.

Untuk menentukan v_i, pertama-tama diselesaikan dengan persamaan linier berikut secara simultan. Sehingga diperoleh v_i':

$$\begin{aligned} v'_1\, y_1 + v'_2\, y_2 + \dots + v'_n\, y_n &= 0 \\ v'_1\, y'_1 + v'_2\, y'_2 + \dots + v'_n\, y_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v'_1\, y_1^{(n-1)} + v'_2\, y_2^{(n-1)} + \dots + v'_n\, y_n^{(n-1)} &= \phi(x) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$y_1(x), y_2(x), \dots,$ dan $y_n(x)$ adalah *n* solusi-solusi yang independen secara linier untuk persamaan ***L***(*y*) = 0 yang sama, maka wronskian-nya adalah bukan nol. Ini berarti sistem (4.8) mmemiliki determinan bukan nol dan dapat diselesaikan secara unik, untuk memperoleh $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

Sistem (4.8) merupakan sistem persamaan linier yang terdiri dari *n* faktor yang memiliki solusi unik dengan det (*A*) $\neq 0$, sehingga dengan aturan crammer v_i' menjadi:

$$v_i' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_{i-1}^{(n-1)} & \phi & y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} \tag{4.10}$$

di mana $i = 1, 2, \ldots, n, \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \phi \end{bmatrix}$ dan

$$\det(A_i) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_{i-1}^{(n-1)} & \phi & y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

sedangkan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

$\det(A) \neq 0$ merupakan determinan wronskian $w[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$.

Misalkan kolom ke-i diganti dengan $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, maka

$$v_i(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_{i-1}^{(n-1)} & 1 & y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4.13)$$

di mana $i = 1, 2, \ldots, n$.

Untuk itu, persamaan (4.10) dapat ditulis:

$$v_i'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots\ldots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1} & \ldots\ldots y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_{i-1}^{(n-1)} & 1 & y_{i+1}^{(n-1)} & \ldots\ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \phi}{w[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]} \qquad (4.14)$$

$$v_i'(x) = \frac{v_i(x).\phi(x)}{w[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]} \qquad (4.15)$$

$$v_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{v_i(t).\phi(t)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\, dt \qquad (4.16)$$

Subsitusi persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.7)

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{v_1(t).\phi(t)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\, dt\; y_1(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{v_2(t).\phi(t)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\, dt\; y_2(x) + \ldots$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{v_n(t).\phi(t)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\, dt\; y_n(x)$$

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \frac{v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\, .\phi(t)\, dt \qquad (4.17)$$

Misalkan

$$\frac{v_1(t)y_1(x)+v_2(t)y_2(x)+\ldots+v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)]}=\boldsymbol{G}(x,t) \qquad (4.18)$$

Maka

$$y_p=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{G}(x,t).\phi(t)\,dt \qquad (4.19)$$

Masukkan persamaan (4.15) ke dalam persamaan (4.5)

$$y=y_h+y_p$$

$$=y_h+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{G}(x,t).\phi(t)\,dt \qquad (4.20)$$

Jadi, solusi untuk persamaan diferensial linier orde *n* adalah

$$y=y_h+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{G}(x,t).\phi(t)\,dt \qquad (4.21)$$

Fungsi ***G***(*x*,*t*) dikatakan fungsi Green untuk masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde-*n* jika memenuhi kondisi berikut ini:

2. ***G(x,t)*** terdefinisi pada daerah *R=I x I* dari semua titik (*x*,*t*) dengan *x* dan *t* terletak dalam selang *I*.

2. $\boldsymbol{G}(x,t),\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial x},\frac{\partial^2\boldsymbol{G}}{\partial x^2},\ldots,\frac{\partial^n\boldsymbol{G}}{\partial x^n}$, merupakan fungsi yang kontinu pada *R=I x I*.

3. Untuk setiap x_0 dalam selang *I* dan fungsi $f\in C(I)$, fungsi

   $y_p(x)=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{G}(x,t)f(t)dt$ adalah solusi persamaan diferensial (4.1) yang

   memenuhi kondisi awal $y_p(x_0)=y_p'(x_0)=y_p''(x_0)=\ldots=y_p^{(n-1)}(x_0)=0$.

Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{G}(x,t) = \dfrac{v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t),\, y_2(t), \ldots, y_n(t)}$

merupakan fungsi Green untuk persamaan diferensial linier orde-n.

1. Seperti yang telah diketahui bahwa det(A)≠0 pada persamaan (4.12) merupakan determinan wronskian $w[y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)]$. Jadi jelas bahwa $w[y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0,\ \forall t\left[x_0, x\right]$ dan $\boldsymbol{G}(x,t)$ terdefinisi $\forall(x,t)$.

2. Persamaan diferensial linear orde-n merupakan persamaan yang memiliki fungsi kontinu dalam suatu interval I yang mengandung x_0.

   $\boldsymbol{G}(x,t) = \dfrac{v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t),\, y_2(t), \ldots, y_n(t)]}$ adalah fungsi Green

   yang didefinisikan oleh penyelesaian solusi dari persamaan diferensial linear orde n. Di mana $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)$ dan $y_1(x),\, y_2(x), \ldots,\, y_n(x)$ kontinu $\forall(x,t)$. Ini dikarenakan $y_1,\, y_2, \ldots,\, y_n$ dan turunan-turunannya kontinu sampai dengan orde ke n-1. Berikut adalah turunan-turunan dari $\boldsymbol{G}(x,t)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} = \frac{\left(\dfrac{\partial[v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t),\, y_2(t), \ldots, y_n(t)]}\right)}{\partial x}$$
$$= v_1(t)y_1'(x) + v_2(t)y_2'(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)'$$

$v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)$ dan $y_1'(x),\, y_2'(x), \ldots,\, y_n'(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2[v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \ldots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t), y_2(t), \ldots,\, y_n(t)]}\right)}{\partial x^2}$$
$$= v_1(t)y_1''(x) + v_2(t)y_2''(x) + \ldots + v_n(t)y''(x)$$

$v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ dan $y_1''(x), y_2''(x), \dots, y_n''(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

$\vdots$

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{G}}{\partial x^n} = \frac{\left(\dfrac{\partial^n [v_1(t)y_1(x) + v_2(t)y_2(x) + \dots + v_n(t)y_n(x)}{w[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]}\right)}{\partial x^n}$$

$$= v_1(t)y_1^{\,n}(x) + v_2(t)y_2^{\,n}(x) + \dots + v_n(t)y_n(t)$$

$v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ dan $y_1''(x), y_2''(x), \dots, y_n''(x)$ kontinu $\forall(x,t)$.

Jadi terbukti jika $\boldsymbol{G}(x,t)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2}, \dots, \dfrac{\partial^n \boldsymbol{G}}{\partial x^n}$ merupakan fungsi yang kontinu pada $R = I \times I$.

3. Setelah persamaan (4.12) dikontruksi menjadi fungsi Green, didapat solusi khususnya,

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(x,t)\, \phi(t)\, dt$$

Bila

$$y_p(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \boldsymbol{G}(x,t)\, \phi(t)\, dt \;= 0$$

dan

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \boldsymbol{G}(x,t)}{\partial x} \phi(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{G}(x,x)\, \phi(x)\, dt$$

Akan dibuktikan $\boldsymbol{G}(x,x) = 0$, $\forall(x)$.

$$\boldsymbol{G}(x,x) = \frac{y_1(x)v_1(x) + y_2(x)v_2(x) + \dots + y_n(x)v_n(x)}{w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}$$

$y_1v_1 + y_2v_2 + \dots + y_nv_n$ adalah persamaan linear yang membentuk matrik n

dan memiliki determinan yakni

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & 0 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & 1 & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= y_1 \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & \cdots & y_n \\ y_1' & 0 & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & 1 & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$y_n \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_2' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & 1 \end{vmatrix}$$

Determinan tersebut mengandung nilai *n* ganjil dan genap. Akan diperlihatkan bahwa semua elemen yang terkandung sama dengan nol. Untuk *n* ganjil,

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n$$

$$= y_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$y_n \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan sifat determinan, jika ada dua baris yang terdiri dari elemen-elemen yang sama, maka determinannya sama dengan nol. Maka, untuk *n* ganjil $y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n = 0$.

Untuk *n* genap,

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n$$

$$= -y_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} \ldots & & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} \ldots & & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} - \ldots -$$

$$y_n \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} \ldots & & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan sifat determinan, jika ada dua baris yang terdiri dari elemen-elemen yang sama, maka determinannya sama dengan nol. Maka untuk *n* genap $y_1 v_1 + y_2 v_2 + \ldots + y_n v_n = 0$

Karena $w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$ maka $\boldsymbol{G}(x,x) = 0$. Akibatnya

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \boldsymbol{G}(x,t)}{\partial x} \boldsymbol{\phi(t)} + \boldsymbol{G}(x,x) \, .\phi(x) \, dt$$ menjadi :

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt$$

$$y_p'(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt = 0$$

$$y_p''(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt + \frac{\partial \boldsymbol{G}(x,x)}{\partial x} \, .\phi(x)$$

$$y_p''(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt + 0 = 0$$

$\vdots$

$$y_p^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1} \boldsymbol{G}}{\partial x^{n-1}} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt + \frac{\partial^{n-2} \boldsymbol{G}(x,x)}{\partial x^{n-2}} \, .\phi(x)$$

$$y_p^{(n-1)}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{\partial^{n-1} \boldsymbol{G}}{\partial x^{n-1}} \boldsymbol{\phi(t)} \, dt + 0 = 0$$

Jadi terbukti untuk setiap x_0 dalam selang I dan fungsi $f \in C(I)$, fungsi

$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(x,t) f(t) dt$ adalah solusi persamaan diferensial (1) yang

memenuhi kondisi awal $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = y_p''(x_0) = \dots = y_p^{(n-1)}(x_0) = 0$

Setelah diselidiki, persamaan (4.21) memenuhi kondisi dikatakan fungsi Green. Untuk itu terbukti, bahwa solusi dari persamaan (4.1) merupakan fungsi Green setelah dikontruksi menggunakan metode variasi parameter.

B. Metode Transformasi Laplace

Diketahui bahwa persamaan diferensial linear orde *n* dengan koefisien-koefisien konstan:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

di mana $a_i(x)(i = 0, 1, \ldots, n)$ konstan dan semua nilai dari $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ dengan selang $x > 0$ dan $\dfrac{f(x)}{a_n(x)} = \phi(x)$.

Maka transform Laplace dari turunan ke-*n* $(n = 1,2,3,\ldots)$dari $y(x)$ adalah

$$a_n(x)L(y^n) + a_{n-1}(x)L(y^{n-1}) + \ldots + a_1(x)L(y') + a_0(x)L(y) = L(f(x)) \qquad (4.22)$$

di mana

$$L(y^{(n)}(x)) = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y(0) - \ldots - sy^{n-2}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

$$L(y^{(n-1)}(x)) = s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y(0) - \ldots - sy^{n-2}(0) - y^{(n-1)}(0) \qquad (4.23)$$

$$L(y'(x)) = sY(s) - y(0)$$

$$L(y(x)) = Y(s)$$

Jika kondisi awal untuk $y(x)$ pada $x = 0$ diberikan oleh

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \ldots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}$$

Persamaan (4.23) dapat disederhanakan menjadi

$$L(y^n(x)) = s^nY(s) - c_0s^{n-1} - c_1s^{n-2} - \ldots - c_{n-2}s - c_{n-1}$$

$$L(y^{n-1}(x)) = s^{n-1}Y(s) - c_0s^{n-2} - \ldots - c_{n-2}s - c_{n-1} \qquad (4.24)$$

$$\vdots$$

$$L(y'(x)) = sY(s) - c_0$$

$$L(y(x)) = Y(s)$$

Jika $c_0, c_1, \ldots, c_n$ adalah kontanta-konstanta yang diketahui adalah nol, maka persamaan (4.24) menjadi

$$L(y^n(x)) = s^nY(s)$$

$$L(y^{(n-1)}(x)) = s^{n-1}Y(s) \qquad (4.25)$$

$$\vdots$$

$$L(y'(x)) = sY(s)$$

Subsitusi persamaan (4.25) kedalam persamaan (4.22)

Sesuai definisi bahwa $L\big(f(x)\big) = F(s)$ maka persamaan (4.24) menjadi

$$a_n(x)s^nY(s) + a_{n-1}(x)s^{n-1}Y(s) + \ldots + a_1(x)sY(s) + a_0(x)Y(s) = F(s)$$

$$[a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{n-1} + \ldots + a_1(x)s + a_0(x)]Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s)\frac{1}{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \ldots + a_1s + a_0} \qquad (4.26)$$

Misalkan $\dfrac{1}{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \ldots + a_1 s + a_0} = W(s)^{-1}$ maka,

$$Y(s) = F(s).W(s)^{-1} \qquad (4.27)$$

Diketahui $Y(s) = L^{-1}(y(x))$

Berdasarkan definisi (2.19) bahwa $Y(s)$ dan $F(s)$ adalah transformasi Laplace dari $y(x)$ dan $f(x)$. Sudah pasti $F(s)$ diketahui dan persamaan (4.27) merupakan kebalikan dari $y(x)$.

Karena persamaan (4.1) untuk $x > 0$ maka solusi partikular dari persamaan (4.1) adalah

$$y_p(x) = f(x).w(x) = \int_0^x \phi(t)w(x-t)dt$$

Dan solusi umum dari persamaan (4.1) adalah

Dengan $w(x\text{-}t) = \boldsymbol{G}(x,t)$, dimana $\boldsymbol{G}(x,t)$ merupakan fungsi Green dari persamaan diferensial linier orde n.

$$y = y_h + \int_0^x f(t)w(x-t)dt$$

Selanjutnya akan dibutikan $w(x\text{-}t)$ adalah fungsi green.

1. $w(x\text{-}t)$ terdefinisi untuk $\forall(x,t)$. Karena $w(x\text{-}t)$ berada pada selang $(0,x)$, di mana x menuju titik t.

2. $w(x\text{-}t)$ kontinu $\forall(x,t)$ karena $\dfrac{1}{a_n(x)s^n + a_{n-1}(x)s^{(n-1)} + \ldots + a_1 s + a_0}$ memiliki diferensial yang kontinu sampai dengan orde ke-n-1dalam selang $(0, x)$.

3. $y(x) = y = y_h + \int_0^x f(t)w(x-t)dt$ adalah solusi dari persamaan (4.1). Dan memiliki kondisi awal $y(0) = y'(0) = ... = y^{n-1}(0) = 0$.

C. Kelebihan Metode Fungsi Green

Metode fungsi Green digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas kedalam bentuk integral. Metode fungsi Green digunakan jika fungsi Green diketahui dan jika integral dari persamaan diferensial dapat dievaluasi.

Metode fungsi Green merupakan solusi linear dari masalah-masalah persamaan diferensial tingkat tinggi. Jika digunakan pada persamaan diferensial linier orde-*n* dengan fungsi sembarang untuk nilai batas yang diketahui pada selang kontinu, maka dengan mudah akan didapatkan solusinya. Hal ini dikarenakan, fungsi Green memiliki turunan dengan model analitis dalam *Domain* pada fungsi *f* sebarang.

Contoh:

Kontruksi persamaan diferensial berikut ini

$$y'' + y = 2\cos x$$

menjadi fungsi Green dengan selang $x > 0$ melalui dua metode yakni

1. Metode variasi parameter
2. Metode transform Laplace

Diberikan nilai awalnya $y'(0) = 0, y(0) = 0$

Penyelesaian:

1. Metode variasi parameter

$$y''+y=2\cos x$$

Merupakan persamaan diferensial linier tak homogen orde dua dan derajad nol. Memiliki solusi umum $y = y_h + y_p$. Akan dicari 2 y_h terlebih dahulu, yang berarti mencari solusi umum persamaan diferensial homogen, yaitu

$$y''+y=0$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial ini

$$\lambda^2+1=0$$

Akar-akar persamaan karakteristik:

$\lambda_1=-i$ dan $\lambda_2=i$

Jadi, solusi homogennya:

$$y_h=C_1\sin x+C_2\cos x$$

Dalam masalah nilai awal

Untuk $y(0)=0$, ini berati bahwa x = 0 maka y = 0

$$\begin{aligned} y &= C_1\sin x+C_2\cos x \\ 0 &= C_1\sin 0+C_2\cos 0 \\ 0 &= C_2 \end{aligned}$$

Untuk $y^{'}(0)=0$, ini berati bahwa x = 0 maka $y^{'}$ = 0

$$\begin{aligned} y' &= C_1\cos x-C_2\sin x \\ 0 &= C_1\cos 0+C_2\sin 0 \\ 0 &= C_1 \end{aligned}$$

Didapat bahwa $C_1=0$ dan $C_2=0$

Nilai C_1 dan C_2 di subsitusi ke solusi homogen. Maka solusi homogennya:

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y_h = 0 \sin x + 0 \cos x$$

$$y_h = 0$$

Fungsi-fungsi v_1, v_2 dan v_3 ditentukan dari persamaan :

$$v^{'} \sin x + v' \cos x = 0$$

$$v'' \cos x - v^{'} \sin x = \frac{f(x)}{a_n(x)}$$

Untuk itu

$$y_1(x) = \sin x \qquad y_1(x) = \cos x$$

$$y_2(x) = \cos x \qquad y_2'(x) = -\sin x$$

Merupakan determinan wronskian dari persamaan homogen.

$$W[y_1(t), y_2(t), y_3(t)] = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= (\sin t - \sin t) - (\cos t \ \cos t)$$

$$= -\sin^2 t - \cos^2 t$$

$$= -(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= -1$$

Sekarang menentukan v_i, di mana i = 1, 2. Karena n genap, maka:

$$v_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ 1 & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= (0 - \sin t - \cos t 1)$$

$$= (0 - \cos t)$$

$$= -\cos t$$

$$v_2(t) = -\begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\sin t - 0)$$

$$= -\sin t$$

$$\boldsymbol{G}(x,t) = \frac{y_1(x)v_1(t) + y_2(x)v_2(t)}{w[y_1(x), y_2(x)]}$$

$$\boldsymbol{G}(x,t) = \frac{\sin x(-\cos t) + \cos x(-\sin t)}{-1}$$

$$= \sin x\ \cos t - \sin t \cos x)$$

Karena $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{a_n(x)}$, diketahui $f(t)$ = 2cos t dan $a_n(t) = 1$

Maka $\phi(x) = 2\cos x$, diperoleh:

$$y_p = \int_0^x \boldsymbol{G}(x,t)\phi(t)\,dt$$

$$= \int_0^x (\sin x \cos t - \sin t \cos x).(2\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^x \sin x.2\cos^2 t - \sin t.2\cos x\ \cos t dt$$

$$= 2\sin x \int_0^x \cos^2 t dt - 2\cos x \int_0^x \sin t \cos t dt$$

$$= 2\sin x \int_0^x \frac{1+\cos 2x}{2}\,dt - 2\cos x \int_0^x \frac{\sin 2x}{2}\,dt$$

$$= 2\sin x \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^x - 2\cos x \left(\frac{1-\cos 2t}{4} \right)_0^x$$

$$= 2\sin x \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} \right) - 2\cos x \left(\frac{\sin^2 x}{2} \right)$$

$$= \frac{2\sin^2 x \cos x}{2} + \frac{2x \sin x}{2} - \frac{2\sin^2 x \cos x}{2}$$

$$= x \sin x$$

Jadi $y_p = x\sin x$

Solusi umun persamaan diferensial ini adalah

$$y = y_h + y_p$$
$$y(x) = x\sin x$$

2. Metode Laplace

$$y'' + y = 2\cos x$$

Dengan mengambil transformasi Laplace dari kedua ruas persamaan diferensial dan dengan menggunakan syarat-syarat yang diberikan, kita peroleh

$$L(y'') + L(y) = L(2\cos x)$$

diberikan nilai awalnya $y'(0) = 0, y(0) = 0$, jadi

$$L(y''(x)) = s^2 Y(s) - sy'(0) - y(0)$$

$$L(y''(x)) = s^2 Y(s) - 0 - 0$$
$$= s^2 Y(s)$$

$$L(y(x)) = Y(s)$$

Maka

$$L(y'') + L(y) = L(2\cos x)$$

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1}$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 1)}$$

$$=\frac{2s}{(s^2+1)}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}$$

Karena $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos x$ dan $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin x$

Dengan teorema konvolusi diperoleh,

$$Y(s)=L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right\}$$

$$=\int_0^x 2\cos t.\sin(x-t)dt$$

$$=\int_0^x 2\cos t.(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$

$$=\int_0^x 2\cos t\sin x\cos t-2\cos x\cos t\sin t\,dt$$

$$=\int_0^x 2\cos^2 t\sin x-2\cos x\cos t\sin t\,dt$$

$$=2\sin x\int_0^x \cos^2 t\,dt-2\cos x\int_0^x \cos t\sin t\,dt$$

$$=2\sin x\int_0^x \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-2\cos x\int_0^x \frac{\sin 2t}{2}\,dt$$

$$=2\sin x\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{2}\right)_0^x-2\cos x\left(\frac{1-\cos 2t}{4}\right)_0^x$$

$$=2\sin x\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin x\cos x}{2}\right)-2\cos x\left(\frac{1-\cos 2x}{4}\right)$$

$$=\frac{2x\sin x}{2}+\frac{2\sin^2 x\cos x}{2}-2\cos x\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)$$

$$=\frac{2x\sin x}{2}+\frac{2\sin^2 x\cos x}{2}-\frac{2\sin^2 x\cos x}{2}$$

$$= x\sin x$$

Jadi solusi umunya adalah

$$y(x) = x\sin x$$

V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh kesimpulan bahwa

1. Persamaan diferensial dapat dikontruksi menjadi fungsi Green dengan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace.
2. Setelah dikontruksi, solusi umum dari persamaan diferensial linier orde-*n* adalah
   a. Metode variasi parameter

$$y = y_h + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{G}(x,t).\phi(t)\,dt$$

   b. Metode Transformasi Laplace

$$y = y_h + \int_{0}^{x} f(t)w(x-t)dt$$

B. Saran

Pada penulisan skripsi ini, permasalahan hanya dibatasi mengkontruksi persamaan diferensial linier orde-*n* menjadi fungsi Green menggunakan metode variasi parameter dan metode transformasi Laplace. Oleh karena itu, diperlukan penelitian lebih lanjut dalam hal yang sama dengan metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, R dan Costa, G. 2007. *Persamaan Diferensial.* Erlangga, Jakarta.

Fininzio, N dan Ladas, G. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Penerjemah Widiarti. ITB, Bandung.

Gatti, dkk. 2007. *Green's Functions*. ETSF, France. http://www.istm.cnr.it/ tanggal 23 Februari 2010.

Harini, M.A. 2005. *Transformasi Laplace Dari Masalah Nilai Batas Pada Persamaan Parsial*. UNNES, Semarang. http://digilib.unnes.ac.id/ tanggal 23 Februari 2010.

Howard, A dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Jilid 1, Edisi Kedua. Penerjemah Refina, Irzam, Harmein. Erlangga, Jakarta.

Sugiarto, Iwan. *Mengkontruksi Fungsi Green Persamaan Diferensial Linear Orde-n.* Jurnal Integral,Vol. 7, No. 1, April 2002.

Kartono. 2002. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Purcell, dkk. 2004. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Jilid 1, Edisi Kelima. Penerjemah Susila, I Nyoman, Kartasasmita, dkk. Erlangga, Jakarta.

Strauss, Walter. A. 1992. *Partial Diferential Equation An Introduction*. John Wiley and Sons, Inc, Canada.