II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Dasar

Definisi 2.1.1 Sampling

Sampling adalah proses pengambilan atau memilih n buah elemen/objek/unsur dari populasi yang berukuran *N* (Walpole,1995).

Definisi 2.1.2 Populasi

Populasi adalah Kumpulan lengkap dari elemen-elemen yang sejenis akan tetapi dapat dibedakan berdasarkan karekteristiknya (Walpole,1995).

Definisi 2.1.3 Kerangka Sampel

Kerangka sampel adalah daftar yang memuat seluruh elemen/anggota populasi, sebagai dasaruntuk penarikan sampel random (Walpole,1995).

Definisi 2.1.4 Sampel

Sampel merupakan bagian dari populasi. Elemen anggota sampel, merupakan anggota populasi dimana sampel diambil. Jika $\boldsymbol{N}$ banyaknya elemen populasi, dan n banyaknya elemen sampel, maka $n < N$ (Walpole,1995).

Definisi 2.1.5 Ruang contoh

Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan dan dilambangkan dengan huruf *S* (Walpole,1995).

Definisi 2.1.6 Peubah Acak

Suatu fungsi yang nilainya berupa bilangan nyata yang ditentukan oleh setiap unsur dalam ruang contoh (Walpole,1995).

2.2 Peubah Acak

Peubah Acak Diskrit dan Kontinu

Peubah acak *X*, dengan ruang sampel *Ω* yang mengandung jumlah titik contoh yang terhingga atau suatu barisan yang tidak pernah berakhir tetapi yang sama banyaknya dengan bilangan cacah. Diberikan suatu fungsi *f*(*x*) sedemikian hingga:

1. $f(x) > 0,\ x \in \Omega$
2. $\sum_{\Omega} f(x) = 1$
3. Peluang suatu himpunan *A*, P(*A*), $A \subset \Omega$, berlaku

   $P(A) = \Pr(X \in \Omega) = \sum_{\Omega} f(x)$ maka *X* dikatakan peubah acak diskrit dan

   f(*x*) disebut dengan fungsi kepekatan peluang (fkp) *X*.

Peubah acak *X*, dengan ruang sampel *Ω* yang mengandung tak hingga banyaknya titik contoh yang sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis. Diberikan suatu fungsi *f*(*x*) sedemikian hingga :

1. $f(x) > 0,\ \forall\, x \in \Omega$

2. $\int_{\Omega} f(x)dx = 1$

3. Peluang suatu himpunan *A*, P(*A*), $A \subset \Omega$, dapat ditulis

   dengan $P(A) = \Pr(X \in \Omega) = \int_{\Omega} f(x)dx$

maka *X* dikatakan peubah acak kontinu dan *f*(*x*) disebut dengan fungsi kepekatan peluang (fkp) *X*.

2.3 Nilai Ekspektasi Peubah Acak

Nilai Rata-rata Peubah Acak

Jika peubah acak diskrit *X* mempunyai fkp *f*(*x*), maka nilai rata-rata peubah acak diskrit *X* adalah :

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x) = \mu$$

dan nilai-nilai rata-rata peubah acak kontinu *X* adalah :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \mu$$

Nilai Variansi Peubah Acak

Variansi peubah acak atau var(*X*) dinotasikan dengan $\sigma^2{}_x$, dan dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sigma^2{}_x &= E\left((X-\mu)^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E\left(X^2\right) - \mu^2
\end{aligned}$$

2.4 Pengambilan Sampel

Perlakuan anggota populasi dalam pengambilan sampel:

1. Sampling dengan pengembalian

   Jika dari populasi berukuran N diambil sampel berukuran n dengan pengembalian, maka semuanya dan N^n buah sampel yang mungkin diambil.

2. Sampling tanpa pengembalian

   Jika dari populasi berukuran N diambil sampel berukuran n tanpa pengembalian, maka banyaknya sampel yang dapat diambil adalah:

$$^{N}C_{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

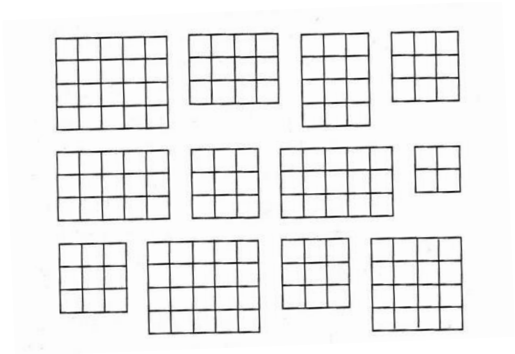
2.5 Penduga Efisien

Salah satu sifat penduga yang baik adalah ragam minimum. Penduga yang baik dengan ragam lebih kecil dari penduga lainnya dikatakan sebagai penduga relatif lebih efisien (Miller & Miller, 1999).

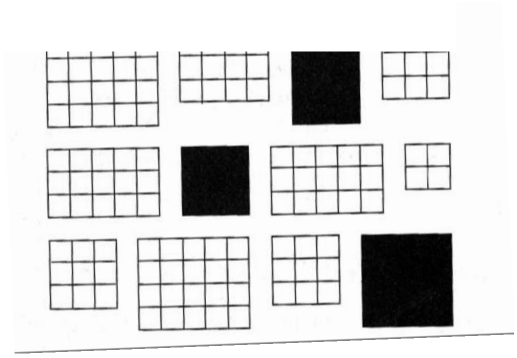
2.6 Penarikan Sampel Berkelompok

Definisi 2.6 Penarikan Sampel Berkelompok

Penarikan sampel berkelompok mengambil beberapa kelompok secara acak dari populasi, dan kemudian mengambil semua unsur dari setiap kelompok untuk dijadikan sampel (Lohr, 1999)



Gambar 1. Populasi yang terdiri dari *M* Kelompok



Gambar 2. Pengambilan 3 Kelompok secara Acak

2.7 Penarikan Sampel Berkelompok tanpa Pengembalian

Sebuah sampel berukuran *m* unit dipilih tanpa pengembalian dengan metode Horvitz-Thompson, Brewer dan Murthy.

Misalkan :

π_i = probabilita bahwa unit ke-*i* ada dalam sampel

π_{ij} = probabilita bahwa unit ke-*i* dan ke-*j* keduanya berada dalam sampel

Hubungan berikut terpenuhi:

$$\sum_{i=1}^{M} \pi_i = m \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{M} \pi_{ij} = (m-1)\pi_i \tag{2.7.1}$$

Bukti

Misalkan t_i merupakan variabel acak, dimana :

$$t_i = \begin{cases} 1; & jika\ unit\ i\ berada\ dalam\ sampel \\ 0; & jika\ unit\ i\ tidak\ dalam\ sampel \end{cases}$$

dan

$$t_i t_j = \begin{cases} 1; & jika\ unit\ i\ dan\ j\ berada\ dalam\ sampel \\ 0; & selainnya \end{cases}$$

Dan didefinisikan

$P(t_i = 1) = \pi_i$ dan $P(t_i = 1\ dan\ t_j = 1) = \pi_{ij}$

Karena ukuran sampel adalah m,

$$\sum_{i=1}^{M} t_i = m\,.$$

Begitu juga,

$$\begin{aligned} E(t_i) &= \sum_{i=1}^{M} P(t_i = 1)\, t_i + P(t_i = 0)\, t_i \\ &= \pi_i \times 1 + \pi_i \times 0 \\ &= \pi_i \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(t_i^{\,2}) &= \sum_{i=1}^{M} P(t_i = 1)\, t_i^{\,2} + P(t_i = 0)\, t_i^{\,2} \\ &= \pi_i \times 1 + \pi_i \times 0 \\ &= \pi_i \end{aligned}$$

Sehingga,

$$m = E\left(\sum_{i=1}^{M} t_i\right) = \sum_{i=1}^{M}\left[E(t_i)\right] = \sum_{i=1}^{M}\pi_i$$

dan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M}\pi_{ij} &= \sum_{i=1}^{M}\left[1\times 1\times P\left(t_i = 1\ dan\ t_j = 1\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{M}\left[E\left(t_i\, t_j\right)\right] \\
&= E\left[\ t_i \sum_{j\neq i}^{M} t_j\ \right] \\
&= E\left[t_i\left(m - t_i\right)\right] \\
&= E\left[t_i m - \left(t_i\right)^2\right] \\
&= E\left(t_i m\right) - E\left(t_i\right)^2 \\
&= m\pi_i - \pi_i \\
&= \pi_i\left(m-1\right)
\end{aligned}$$

■

2.7.1 Metode Penduga Horvitz Thompson

Penduga Horvitz Thompson(1952) tentang jumlah populasi adalah :

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{i}^{m}\frac{y_i}{\pi_i} \qquad (2.7.2)$$

dengan y_i adalah pengukuran untuk unit ke-*i*.

Teorema

Jika $\pi_i > 0$, (i=1,2,3,…, M),

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{i}^{m}\frac{y_i}{\pi_i}$$

Adalah sebuah penduga tidak bias dari *Y*, dengan varians

$$V\left(\hat{Y}_{HT}\right)=\sum_{i=1}^{M}\frac{1-\pi_i}{\pi_i}y_i^2+2\sum_{i=1}^{M}\sum_{j>i}^{M}\frac{\left(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j\right)}{\pi_i\pi_j}y_iy_j \qquad (2.7.3)$$

Bukti :

Misalkan t_i (i = 1,2,…,M) merupakan sebuah variabel acak yang mempunyai nilai 1 jika unit ke-*i* diambil dan bernilai nol untuk lainnya. Maka t_i mengikuti distribusi bernoulli untuk sebuah sampel berukuran 1, dengan probabilita π_i.

Maka,

$$E(t_i)=\pi_i \qquad V(t_i)=\pi_i(1-\pi_i) \qquad (2.7.4)$$

Nilai kovarians t_it_j juga digunakan. Karena t_it_j adalah 1 hanya jika kedua unit muncul dalam sampel,

$$Kov(t_it_j)=E(t_it_j)-E(t_i)E(t_j)=\pi_{ij}-\pi_i\pi_j \qquad (2.7.5)$$

Karena y_i tetap dan t_i sebagai variabel acak, maka untuk $t_i = 1$ penduga populasi Horvitz-Thompson dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{Y}_{HT}=\sum_{i=1}^{m}\frac{y_i}{\pi_i}=\sum_{i=1}^{M}t_i\frac{y_i}{\pi_i}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}E\left(\hat{Y}_{HT}\right)&=E\left(\sum_{i=1}^{M}t_i\frac{y_i}{\pi_i}\right)\\&=\sum_{i=1}^{M}t_i\frac{y_i}{\pi_i}P(t_i=1)\\&=\sum_{i=1}^{M}\pi_i\frac{y_i}{\pi_i}\\&=\sum_{i=1}^{M}y_i=y\end{aligned} \qquad (2.7.6)$$

Berdasarkan definisi pada Lohr (1999) diketahui bahwa

$$V\left(\sum_{i=1}^{M} X_i\right) = \sum_{i=1}^{M} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{M}\sum_{j\neq i}^{M} Cov(X_i, X_j)$$

Maka:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_{HT}\right) &= V\left(\sum_{i=1}^{M} t_i \frac{y_i}{\pi_i}\right) \\ &= \sum_{i}^{M}\left(\frac{y_i}{\pi_i}\right)^2 V(t_i) + 2\sum_{i}^{M}\sum_{j>i}^{M} \frac{y_i}{\pi_i}\frac{y_j}{\pi_j} Kov(t_i t_j) \\ &= \sum_{i}^{M} \frac{(1-\pi_i)}{\pi_i} y_i^2 + 2\sum_{i}^{M}\sum_{j>i}^{M} \frac{(\pi_{ij} - \pi_i \pi_j)}{\pi_i \pi_j} y_i y_j \end{aligned} \qquad (2.7.7)$$

Ini membuktikan teorema.■

2.7.2 Metode Brewer

Dalam Cochran (1991), untuk m = 2 metode Brewer memberikan dan menggunakan pendugaan Horvitz-Thompson

$$\hat{Y}_{HT} = \frac{y_i}{\pi_i} + \frac{y_j}{\pi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_i}{\varphi_i} + \frac{y_j}{\varphi_j}\right) \qquad (2.7.8)$$

dimana nilai $\varphi_i < 0.5$. Brewer mengambil unit pertama dengan memperbaiki probabilita proporsional yaitu $\varphi_i(1-\varphi_i) / (1-2\varphi_i)$, dan unit keduanya dengan probabilita $\varphi_i / (1-\varphi_j)$, dimana j adalah unit yang diambil pertama kali. Pembagi yang dibutuhkan untuk mengubah $\varphi_i(1-\varphi_i) / (1-2\varphi_i)$ ke dalam probabilita sebenarnya adalah

$$D = \sum_{i=1}^{M} \frac{\varphi_i(1-\varphi_i)}{1-2\varphi_i} = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{i}^{M} \frac{\varphi_i}{1-2\varphi_i}\right) \qquad (2.7.9)$$

dengan probabilita bahwa unit ke-*i* berada dalam sampel adalah

$$\pi_i = 2\varphi_i \qquad (2.7.10)$$

Dengan memperhatikan (2.7.9),

$$\pi_{ij} = \frac{\varphi_i\varphi_j}{D}\left[\frac{1}{1-2\varphi_i} + \frac{1}{1-2\varphi_j}\right] = \frac{2\varphi_i\varphi_j}{D}\,\frac{(1-\varphi_i-\varphi_j)}{(1-2\varphi_i)(1-2\varphi_j)} \qquad (2.7.11)$$

Karena metode ini menggunakan perkiraan Horvitz Thompson, teorema dan kesimpulannya memberikan rumus untuk varians dan perkiraan varians dari $\hat{Y}_B$.

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_B\right) &= V\left(\sum_{i=1}^{M} t_i \frac{y_i}{\pi_i}\right) \\ &= \sum_{i}^{M}\left(\frac{y_i}{\pi_i}\right)^2 V(t_i) + 2\sum_{i}^{M}\sum_{j>i}^{M} \frac{y_i}{\pi_i}\frac{y_j}{\pi_j} Kov(t_i t_j) \\ &= \sum_{i}^{M} \frac{(1-\pi_i)}{\pi_i} y_i^2 + 2\sum_{i}^{M}\sum_{j>i}^{M} \frac{(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j)}{\pi_i\pi_j} y_i y_j \end{aligned} \qquad (2.7.12)$$

Dengan

$$E\left(\hat{Y}_B\right) = E\left(\sum_{i=1}^{M} \frac{t_i y_i}{\pi_i}\right) = \sum_{i=1}^{M} y_i = y \qquad (2.7.13)$$

Sementara itu, dalam Cochran (1991) untuk metode Brewer hanya dapat digunakan untuk ukuran sampel = 2, hal ini dikarenakan metode Brewer merupakan perlakuan khusus dari metode Horvitz-Thompson, dan jika ukuran sampel lebih dari 2, dapat dilakukan perluasan dari metode ini.

2.7.3 Metode Murthy

Metode ini menggunakan teknik pemilihan dimana unit-unitnya berturut-turut diambil dengan probabilita φ_i, $\varphi_j/(1-\varphi_i)$, $\varphi_k/(1-\varphi_i-\varphi_j)$ dan seterusnya. Penduga Murthy menghasilkan perkiraan tidak bias dan mempunyai varians yang lebih kecil.

Penduganya adalah :

$$\hat{Y}_M = \frac{\sum_{i}^{m} P(s \mid i) y_i}{P(s)} \qquad (2.7.14)$$

Dengan

P(s|i) : probabilita bersyarat memperoleh sekumpulan unit-unit yang telah diambil, dengan syarat bahwa unit ke-i telah diambil pertama kali.

P(s) : probabilita tidak bersyarat memperoleh sekumpulan unit-unit yang telah diambil.

Dengan

$$P(s \mid i) = \frac{\varphi_j}{1-\varphi_i} \qquad \sum P(s \mid i) = \frac{\sum_{j \neq i}^{M} \varphi_j}{1-\varphi_i} = 1 \qquad (2.7.15)$$

Untuk m = 2, sampelnya terdiri dari unit i dan j,

$$P(s \mid i) = \frac{\varphi_j}{1-\varphi_i}\ ; \qquad P(s \mid j) = \frac{\varphi_i}{1-\varphi_{ji}}$$

$$\begin{aligned} P(s) &= \pi_{ij} = \varphi_i\, P(s \mid i) + \varphi_j P(s \mid j) \\ &= \frac{\varphi_i\, \varphi_j\, (2-\varphi_i-\varphi_j)}{(1-\varphi_i)(1-\varphi_j)} \end{aligned} \qquad (2.7.16)$$

Sehingga ekspektasi dari metode Murthy adalah:

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{Y}_M\right) &= \sum P(s)\hat{Y}_M \\
&= \sum \left[\sum_{i=1}^{m} P(s \mid i) y_i\right] \\
&= \sum \left[P(s \mid 1) y_1 + P(s \mid 2) y_2 + \cdots + P(s \mid m) y_m\right] \qquad (2.7.17) \\
&= \sum P(s \mid 1) y_1 + \sum P(s \mid 2) y_2 + \cdots + \sum P(s \mid m) y_m \\
&= y_1 + y_2 + \cdots + y_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i = y
\end{aligned}
$$

dan ragam dari metode Murthy :

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{Y}_M\right) &= E\left[\left(\hat{Y}_M\right)^2\right] - \left[E\left(\hat{Y}_M\right)\right]^2 \\
&= \sum P(s)\left(\hat{Y}_M\right)^2 - \left(\sum P(s)\left(\hat{Y}_M\right)\right)^2 \\
&= \sum P(s)\left[\frac{\sum_{i}^{m} P(s \mid i) y_i}{P(s)}\right]^2 - \left[\sum y_i\right]^2 \qquad (2.7.18) \\
&= \sum \frac{\left(\sum_{i}^{m} P(s \mid i) y_i\right)^2}{P(s)} - \left[\sum y_i\right]^2
\end{aligned}
$$