II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang berubah dari waktu ke waktu (Farlow,et al., 2002). Salah satu tujuan utama dari sistem dinamik adalah mempelajari perilaku dari penyelesaian sistem di sekitar titik setimbang (*equilibrium*). Untuk mempelajari perilaku dari penyelesaian sistem tersebut digunakan suatu pendekatan yang disebut analisis kestabilan. Analisis kestabilan adalah kajian atas proses perkembangan suatu sistem yaitu seberapa jauh perkembangan sistem yang dimodelkan menyimpang dari titik keseimbangan yang dicapainya. Analisis ini dapat dilakukan dengan beberapa cara seperti melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik kesetimbangan dari persamaan diferensial. Titik kesetimbangan dan kestabilannya dapat memberikan informasi mengenai perilaku penyelesaian dari persamaan diferensial tak linear.

2.2 Sistem Autonomous

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\lambda}) \qquad (2.1)$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n \qquad\qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x},\lambda) \\ f_2(\vec{x},\lambda) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x},\lambda) \end{pmatrix} \in R^n$$

dimana fungsi-fungsi f tidak bergantung secara eksplisit pada waktu, disebut sistem *autonomous* (Finizio dan Ladas, 1988).

2.3 Kesetimbangan dan Kestabilan

Titik kesetimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panfilov, 2004). Secara matematis definisi titik kesetimbangan dapat dituliskan pada definisi berikut.

Definisi 2.1.1

Titik $(\vec{x}^*)$ disebut titik kesetimbangan pada sistem (2.1) jika

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Selanjutnya, untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan digunakan konsep kestabilan yang dituliskan pada definisi berikut.

Definisi 2.1.2

Titik kesetimbangan $(\vec{x}^*)$ disebut stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga setiap penyelesaian $\vec{x}(t)$ pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$.

Semua titik kesetimbangan $(\vec{x}^*)$ dikatakan tak stabil jika titik tersebut tak stabil.

Definisi 2.1.3

Titik kesetimbangan $(\vec{x}^*)$ disebut stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan terdapat δ_0 sedemikian hingga setiap penyelesaian $\vec{x}(t)$ yang pada $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

berlaku untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi

$$\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

(Finizio dan Ladas, 1988)

2.4 Linearisasi Sistem

Definisi stabil dan tidak stabil terlalu sulit digunakan untuk menentukan kestabilan suatu sistem yang tak linar. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah melalui pendekatan analisis bentuk linearisasinya.

Fungsi pada persamaan (2.1) dihampiri dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan

$$\vec{f}(\dot{\vec{x}}) \approx \vec{f}(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{x}^*)$$

Karena $(\vec{x}^*)$ adalah titik kesetimbangan maka

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Oleh karena itu, sistem persamaan (2.1) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{d\dot{\vec{x}}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x} - \vec{x}^*) \qquad (2.2)$$

Sistem linear (2.2) dapat diberikan dalam bentuk matriks

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1{}^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_1{}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_n{}^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_n{}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(x^*)$$

Karena

$\dot{\vec{x}} = (\vec{x} - \vec{x}^*)$ maka

tulis $(\vec{x} - \vec{x}^*) = h$

sehingga persamaan (2.2) menjadi

$$\dot{h} = J(x^*)\,h$$

$$\dot{h} = A\,h \qquad (2.3)$$

dengan $A = J(x^*)$

Matriks $J(x^*)$ di atas disebut dengan matriks Jacobian (Khamsi, 2004).

Misalkan nilai eigen matriks Jacobian $J(x^*)$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dengan vektor eigen yang bersesuaian $\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \cdots \quad \overrightarrow{v_n}$

Dengan menggunakan transformasi $h = PU$, dimana

$$P = [\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \cdots \quad \overrightarrow{v_n}]$$

maka persamaan (2.3) menjadi

$$P\dot{U} = APU \qquad (2.4)$$

Dalam hal P memiliki invers dan mendiagonal maka persamaan (2.4) menjadi

$$\dot{U} = P^{-1}APU$$

$$\dot{U} = DU \qquad (2.5)$$

dengan D adalah matriks diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

solusi umum dari persamaan (2.5)

$$U_i = c_i e^{\lambda_i t}$$

sehingga penyelesaian umum dari persamaan $h = PU$ adalah

$$\vec{h}(t) = PU$$

$$= [\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \cdots \quad \overrightarrow{v_n}] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\, \overrightarrow{v_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\, \overrightarrow{v_2} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\, \overrightarrow{v_n}$$

dengan λ_i adalah nilai eigen, c_i adalah konstanta, dan $\overrightarrow{v_i}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$.

Kriteria kestabilan dari persamaan (2.3) dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks $J(x)$. Dalam hal nilai eigen riil dan berbeda semua maka sistem akan stabil asimtotis jika nilai eigen matriks Jacobian $J(x)$ berupa bilangan real negatif. Jika semua nilai eigen berupa bilangan real positif maka sistem akan tidak stabil. Kemudian jika salah satu nilai eigen bernilai negatif dan yang lain bernilai positif maka sistem tersebut dikatakan *saddle* (dan tidak stabil) (Hurewicz, 1961).

2.5 Nilai Eigen

Definisi :

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol v pada R^n disebut vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika $A\vec{v}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\vec{v}$; jelasnya,

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A, dan $\vec{v}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A, $n \times n$, dituliskan kembali $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ sebagai

$$A\vec{v} = \lambda I\vec{v}$$

atau secara ekuivalen

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 \qquad (2.4)$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu penyelesaian taknol dari persamaan ini. Persamaan (2.4) memiliki penyelesaian taknol jika hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan ini disebut persamaan karakteristik *(characteristic equation)* matriks A; skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A. Apabila diperluas lagi, $det(A - \lambda I)$ adalah sebuah polinomial dalam variabel λ berderajat

n yang disebut sebagai polinomial karakteristik *(characteristic polynomial)* matriks A (Howard, 2004).

Matriks A dengan $i = 1,2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ dapat ditulis dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$de\,t(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$