

## IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Asumsi yang digunakan dalam sistem mangsa-pemangsa

Dimisalkan suatu habitat dimana spesies mangsa dan pemangsa hidup berdampingan. Diasumsikan habitat ini dibagi menjadi dua daerah, yaitu daerah bebas dimana spesies mangsa dan pemangsa dapat bergerak bebas dan daerah perlindungan dimana mangsa dapat hidup tetapi pemangsa tidak diperbolehkan masuk ke dalam daerah tersebut. Dinamika mangsa-pemangsa ini di analisis dalam kasus, yaitu ketika pemangsa bergantung sepenuhnya pada mangsa.

### 4.2 Parameter-parameter dan deskripsinya

Parameter-parameter yang digunakan dalam model sistem mangsa-pemangsa adalah sebagai berikut :

$r$  = Koefisien laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate* yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi) spesies mangsa di daerah bebas

$s$  = Koefisien laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate* yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi) spesies mangsa di daerah perlindungan

$K$  = *Carrying Capacity* (kapasitas tampung yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat disokong oleh suatu lingkungan) pada daerah bebas

$L$  = *Carrying Capacity* (kapasitas tampung yaitu ukuran maksimum dari suatu populasi yang dapat disokong oleh suatu lingkungan) pada daerah perlindungan

$\beta_0$  = Koefisien tingkat kematian alami spesies pemangsa

$\beta_1$  = Koefisien tingkat penipisan spesies mangsa yang disebabkan oleh pemangsa

$\beta_2$  = Koefisien laju pertumbuhan spesies pemangsa karena interaksinya dengan mangsanya

$\sigma_1$  = Koefisien tingkat migrasi spesies mangsa dari daerah bebas ke daerah perlindungan

$\sigma_2$  = Koefisien tingkat migrasi spesies mangsa dari daerah perlindungan ke daerah bebas

### 4.3 Formulasi model matematika dari sistem mangsa-pemangsa

Kepadatan spesies mangsa pada daerah bebas dipengaruhi oleh faktor kelahiran, migrasi masuk (dari daerah perlindungan ke daerah bebas) dan migrasi keluar

(dari daerah bebas ke daerah perlindungan), interaksi antara mangsa dan pemangsa, serta interaksi antara spesies mangsa itu sendiri. Selanjutnya, kepadatan spesies mangsa di daerah perlindungan dipengaruhi oleh faktor kelahiran, migrasi masuk (dari daerah bebas ke daerah perlindungan) dan migrasi keluar (dari daerah perlindungan ke daerah bebas), serta interaksi antara spesies mangsa itu sendiri. Kemudian, kepadatan spesies pemangsa untuk setiap waktu  $t \geq 0$  dipengaruhi oleh faktor laju pertumbuhan spesies pemangsa dan kematian alami spesies pemangsa.

Dari uraian di atas, maka diperoleh model matematika sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 xz \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= Q(z) - \beta_0 z\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$x(0) \geq 0 ; y(0) \geq 0 ; z(0) \geq 0$$

$x(t)$  = Kepadatan spesies mangsa di daerah bebas

$y(t)$  = Kepadatan spesies mangsa di daerah perlindungan

$z(t)$  = Kepadatan spesies pemangsa untuk setiap waktu  $t \geq 0$

#### 4.4 Kasus : Ketika spesies pemangsa bergantung sepenuhnya pada spesies mangsa

Kepadatan spesies pemangsa dipengaruhi oleh faktor laju pertumbuhan spesies pemangsa dan kematian, maka pada

$$Q(z) = \beta_2xz \quad (4.2)$$

Sehingga

$$\frac{dz}{dt} = \beta_2xz - \beta_0z$$

Ini dapat diperiksa dengan model persamaan (4.1) ketika  $Q(z)$  memenuhi persamaan (4.2) memiliki tiga kesetimbangan yaitu  $E_0(0, 0, 0)$ ,  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  dan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

##### 4.4.1 Keberadaan kesetimbangan $E_0(0, 0, 0)$

Untuk kesetimbangan  $E_0(0, 0, 0)$ , maka persamaan pada model (1) berbentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1x + \sigma_2y - \beta_1xz = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1x - \sigma_2y = 0 \\ \frac{dz}{dt} &= \beta_2xz - \beta_0z = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Kesetimbangan  $E_0(0, 0, 0)$  ada karena

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

#### 4.4.2 Keberadaan kesetimbangan $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$

Untuk kesetimbangan  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ , maka persamaan pada model persamaan (4.1)

berbentuk :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

Dari persamaan (4.4) diperoleh persamaan  $\hat{x}$  sebagai berikut :

$$sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0$$

$$sy - \frac{sy^2}{L} + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0$$

$$sy - \frac{sy^2}{L} - \sigma_2 = -\sigma_1 x$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{sy^2}{L} - (s - \sigma_2)y \right) = x$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{s\hat{y}^2}{L} - (s - \sigma_2)\hat{y} \right) \quad (4.5)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.4) diperoleh persamaan  $\hat{y}$  sebagai berikut :

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y = 0$$

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x = -\sigma_2 y$$

$$\frac{rx - \frac{rx^2}{K} - \sigma_1 x}{-\sigma_2} = y$$

$$\left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) \frac{1}{\sigma_2} = y$$

$$\hat{y} = \frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{r\hat{x}^2}{K} - (r - \sigma_1)\hat{x}\right) \quad (4.6)$$

Kemudian substitusi nilai  $y$  ke persamaan (4.4)

$$\frac{s}{\sigma_2} \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) - \frac{s \left[\frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right)\right]^2}{L} + \sigma_1 x$$

$$- \frac{\sigma_2}{\sigma_2} \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) = 0$$

$$\frac{s}{\sigma_2} \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) - s \left(\frac{\frac{r^2 x^4}{\sigma_2^2 K^2} - \frac{(2r^2 - 2r\sigma_1)x^3}{\sigma_2^2 K} + \frac{(r^2 - 2r\sigma_1 + \sigma_1^2)x^2}{\sigma_2^2}}{L}\right)$$

$$+ \sigma_1 x - \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) = 0$$

$$\left(\frac{srx^2}{\sigma_2 K} - \frac{rsx}{\sigma_2} + \frac{s\sigma_1 x}{\sigma_2}\right) - \left(\frac{sr^2 x^4}{\sigma_2^2 K^2 L} - \frac{s(2r^2 - 2r\sigma_1)x^3}{\sigma_2^2 KL} + \frac{s(r^2 - 2r\sigma_1 + \sigma_1^2)x^2}{\sigma_2^2 L}\right)$$

$$+ \sigma_1 x - \left(\frac{rx^2}{K} - (r - \sigma_1)x\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{sr^2x^2}{\sigma_2K} - \frac{rsx}{\sigma_2} + \frac{s\sigma_1x}{\sigma_2} - \frac{sr^2x^4}{\sigma_2^2K^2L} + \frac{s(2r^2 - 2r\sigma_1)x^3}{\sigma_2^2KL} - \frac{s(r^2 - 2r\sigma_1 + \sigma_1^2)x^2}{\sigma_2^2L} \\
& + \sigma_1x - \frac{rx^2}{K} + (r - \sigma_1)x = 0 \\
& - \frac{sr^2x^4}{\sigma_2^2K^2L} + \frac{s(2r^2 - 2r\sigma_1)x^3}{\sigma_2^2KL} - \frac{s(r^2 - 2r\sigma_1 + \sigma_1^2)x^2}{\sigma_2^2L} + \frac{sr^2x^2}{\sigma_2K} - \frac{rx^2}{K} \\
& - \frac{s(r - \sigma_1)x}{\sigma_2} + \sigma_1x + (r - \sigma_1)x = 0 \quad \text{dikalikan dengan } -\frac{1}{x} \\
& \frac{sr^2x^3}{\sigma_2^2K^2L} - \frac{s(2r^2 - 2r\sigma_1)x^2}{\sigma_2^2KL} + \frac{s(r^2 - 2r\sigma_1 + \sigma_1^2)x}{\sigma_2^2L} - \frac{sr^2x}{\sigma_2K} + \frac{rx}{K} \\
& + \frac{s(r - \sigma_1)}{\sigma_2} - \sigma_1 - (r - \sigma_1) = 0 \\
& \frac{sr^2x^3}{\sigma_2^2K^2L} - \frac{2sr(r - \sigma_1)x^2}{\sigma_2^2KL} + \frac{s(r - \sigma_1)^2x}{\sigma_2^2L} - \frac{r(s - \sigma_2)x}{\sigma_2K} \\
& + \frac{(r - \sigma_1)(s - \sigma_2)}{\sigma_2} - \sigma_1 = 0 \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.7) dapat ditulis dalam bentuk

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dengan

$$\begin{aligned}
a &= \frac{sr^2}{\sigma_2^2K^2L} \\
b &= -\frac{s(2r^2 - 2r\sigma_1)}{\sigma_2^2KL}
\end{aligned}$$

$$c = \frac{s(r - \sigma_1)^2}{\sigma_2^2 L} - \frac{r(s - \sigma_2)}{\sigma_2 K}$$

$$d = \frac{(r - \sigma_1)(s - \sigma_2)}{\sigma_2} - \sigma_1$$

#### 4.4.3 Keberadaan kesetimbangan $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Untuk kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , maka persamaan pada model persamaan (4.1)

berbentuk :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 x z$$

$$\frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y \quad (4.8)$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta_2 x z - \beta_0 z$$

Dari persamaan (7.3) diperoleh persamaan  $\bar{x}$  sebagai berikut :

$$\beta_2 x z - \beta_0 z = 0$$

$$\beta_2 x z = \beta_0 z$$

$$x = \frac{\beta_0}{\beta_2}$$

$$\bar{x} = \frac{\beta_0}{\beta_2} \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.8) diperoleh persamaan  $\bar{y}$  sebagai berikut :



$$sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0$$

$$sy - \frac{sy^2}{L} + \sigma_1 x - \sigma_2 y = 0$$

$$-\frac{sy^2}{L} + (s - \sigma_2)y + \sigma_1 x = 0$$

$$-\frac{sy^2}{L} + (s - \sigma_2)y + \sigma_1 \frac{\beta_0}{\beta_2} = 0$$

Rumus *abc* untuk persamaan kuadrat, sehingga diperoleh

$$\bar{y} = \frac{1}{2s\beta_2} \left[ (s - \sigma_2) + \sqrt{(s - \sigma_2)^2 + 4s\sigma_1 L\beta_0\beta_2} \right] \quad (4.10)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.8) diperoleh persamaan  $\bar{z}$  sebagai berikut :

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \sigma_1 x + \sigma_2 y - \beta_1 xz = 0$$

$$\frac{rx - \frac{rx^2}{K} - \sigma_1 x + \sigma_2 \bar{y}}{\beta_1 x} = -z$$

$$\left( rx - \frac{rx^2}{K} - \sigma_1 x + \sigma_2 \bar{y} \right) \left( \frac{1}{\beta_1 x} \right) = -z$$

$$z = \frac{rx^2}{K\beta_1 x} - \frac{(r - \sigma_1)x}{\beta_1 x} - \frac{\sigma_2 \bar{y}}{\beta_1 x}$$

$$= \frac{r \frac{\beta_0^2}{\beta_2^2}}{K\beta_1 \frac{\beta_0}{\beta_2}} - \frac{(r - \sigma_1) \frac{\beta_0}{\beta_2}}{\beta_1 \frac{\beta_0}{\beta_2}} - \frac{\sigma_2 \bar{y}}{\beta_1 \frac{\beta_0}{\beta_2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{r\beta_0^2\beta_2}{K\beta_1\beta_0\beta_2^2} + \frac{(r-\sigma_1)\beta_0\beta_2}{\beta_0\beta_1\beta_2} + \frac{\sigma_2\bar{y}\beta_2}{\beta_0\beta_1} \\
&= \frac{\beta_2}{\beta_0\beta_1} \left( -\frac{r\beta_0^2}{K\beta_2^2} + (r-\sigma_1)\frac{\beta_0}{\beta_2} + \sigma_2\bar{y} \right) \\
\bar{z} &= \frac{\beta_2}{\beta_0\beta_1} \left( \sigma_2\bar{y} + (r-\sigma_1)\frac{\beta_0}{\beta_2} - \frac{r\beta_0^2}{K\beta_2^2} \right) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

#### 4.5 Analisis Kestabilan

Sistem persamaan awal merupakan sistem persamaan nonlinier, sehingga untuk mengetahui kestabilan masing-masing titik kesetimbangan pada sistem persamaan tersebut, maka digunakan hampiran pada bentuk pelinearannya.

Untuk persamaan pada kasus ketika spesies pemangsa bergantung sepenuhnya pada spesies mangsa, matriks Jacobian yang terbentuk adalah

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \sigma_1 - \beta_1z & \sigma_2 & -\beta_1x \\ \sigma_1 & s - \frac{2sy}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \beta_2z & 0 & \beta_2x - \beta_0 \end{bmatrix}$$

##### 4.5.1 Kesetimbangan $E_0(0, 0, 0)$

Di titik kesetimbangan  $E_0(0, 0, 0)$ , matriks Jacobian menjadi

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} r - \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_0 \end{bmatrix}$$

Kemudian nilai eigen  $J_{E_0}$  dapat diperoleh dengan cara berikut :

$$|J_{E_0} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \sigma_1 - \lambda & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_0 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4.12)$$

$$0 \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ s - \sigma_2 - \lambda & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} r - \sigma_1 - \lambda & 0 \\ \sigma_1 & 0 \end{vmatrix} \\ + (-\beta_0 - \lambda) \begin{vmatrix} r - \sigma_1 - \lambda & \sigma_2 \\ \sigma_1 & s - \sigma_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan (4.12) menghasilkan polinomial karakteristik berbentuk

$$(-\beta_0 - \lambda)[\lambda^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)\lambda + (rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)] = 0$$

$[\lambda^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)\lambda + (rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)]$  dengan akar-akarnya

$$\lambda_{12} = \frac{-(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s) \pm \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

$$= \frac{(r + s - \sigma_1 - \sigma_2) \pm \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{(r + s - \sigma_1 - \sigma_2) + \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(r + s - \sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\beta_0$$

$$\lambda_2 = \frac{(r + s - \sigma_1 - \sigma_2) + \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{(r + s - \sigma_1 - \sigma_2) - \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 - r - s)^2 - 4(rs - r\sigma_2 - s\sigma_1)}}{2}$$

Dari nilai-nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik, dapat terlihat bahwa

$$\lambda_1 < 0 \quad ; \quad \lambda_2 > 0 \quad ; \quad \lambda_3 < 0$$

Hal ini berarti bahwa titik kesetimbangan  $E_0(0, 0, 0)$  merupakan titik saddle (*saddle point*).

#### 4.5.2 Kesetimbangan $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$

Di titik kesetimbangan  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ , matriks Jacobian menjadi

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{x}}{K} - \sigma_1 & \sigma_2 & -\beta_1\hat{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\hat{y}}{L} - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, nilai  $J_{E_1}$  dapat diperoleh dengan cara berikut :

$$|J_{E_1} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{x}}{K} - \sigma_1 & \sigma_2 & -\beta_1\hat{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\hat{y}}{L} - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{x}}{K} - \sigma_1 - \lambda & \sigma_2 & -\beta_1\hat{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\hat{y}}{L} - \sigma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4.13)$$

$$0 \left| \begin{bmatrix} \sigma_2 & -\beta_1\hat{x} \\ s - \frac{2s\hat{y}}{L} - \sigma_2 - \lambda & 0 \end{bmatrix} - 0 \right| \left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{x}}{K} - \sigma_1 - \lambda & -\beta_1\hat{x} \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$+ (\beta_2\hat{x} - \beta_0 - \lambda) \left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{x}}{K} - \sigma_1 - \lambda & \sigma_2 \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\hat{y}}{L} - \sigma_2 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Persamaan (4.13) menghasilkan polinomial karakteristik berbentuk

$$(\beta_2\hat{x} - \beta_0 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 \right) \lambda \right.$$

$$\left. + \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} \right) \right]$$

$$= 0$$

Persamaan

$$\left[ \lambda^2 + \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 \right) \lambda \right.$$

$$\left. + \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} \right) \right] = 0$$

dengan memisalkan

$$P = 1$$

$$Q = \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 \right)$$

$$R = \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} \right)$$

Sehingga didapat persamaan

$$P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$$

dengan akar-akarnya

$$\lambda_{12} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}$$

$$\lambda_1 = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}$$

$$\lambda_2 = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = (\beta_2\hat{x} - \beta_0)$$

$$\lambda_2 = \left( \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \right)$$

$$\lambda_3 = \left( \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \right)$$

Dari nilai-nilai parameter yang digunakan pada simulasi numerik, dapat terlihat bahwa

Jika  $\beta_2 \hat{x} > \beta_0$  maka  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  merupakan titik saddle (*saddle point*), karena

$$\lambda_1 > 0 \quad ; \quad \lambda_2 < 0 \quad ; \quad \lambda_3 < 0$$

Jika  $\beta_2 \hat{x} < \beta_0$  maka  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  adalah stabil, karena

$$\lambda_1 < 0 \quad ; \quad \lambda_2 < 0 \quad ; \quad \lambda_3 < 0$$

#### 4.5.3 Kesetimbangan $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Di titik kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , matriks Jacobian menjadi

$$J_{\bar{E}} = \begin{bmatrix} r - \frac{2r\bar{x}}{K} - \sigma_1 - \beta_1\bar{z} & \sigma_2 & -\beta_1\bar{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\bar{y}}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \beta_2\bar{z} & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, nilai  $J_{E_1}$  dapat diperoleh dengan cara berikut :

$$|J_{\bar{E}} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\bar{x}}{K} - \sigma_1 - \beta_1\bar{z} & \sigma_2 & -\beta_1\bar{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\bar{y}}{L} - \sigma_2 & 0 \\ \beta_2\bar{z} & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\bar{x}}{K} - \sigma_1 - \beta_1\bar{z} - \lambda & \sigma_2 & -\beta_1\bar{x} \\ \sigma_1 & s - \frac{2s\bar{y}}{L} - \sigma_2 - \lambda & 0 \\ \beta_2\bar{z} & 0 & \beta_2\hat{x} - \beta_0 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} - \frac{2s\beta_1\beta_2\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{L} - \beta_1\beta_2\sigma_2\bar{x}\bar{z} - \beta_1\beta_2\bar{x}\bar{z}\lambda \right) \\
& + (\beta_2\bar{x} - \beta_0 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 + \beta_1\bar{z} \right) \lambda \right. \\
& + \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} \right. \\
& \left. \left. - s\beta_1\bar{z} + \frac{2s\beta_1\bar{y}\bar{z}}{L} + \beta_1\sigma_2\bar{z} \right) \right] = 0 \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Persamaan

$$\begin{aligned}
& \left[ \lambda^2 + \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 + \beta_1\bar{z} \right) \lambda \right. \\
& + \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} \right. \\
& \left. \left. - s\beta_1\bar{z} + \frac{2s\beta_1\bar{y}\bar{z}}{L} + \beta_1\sigma_2\bar{z} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

dengan memisalkan

$$\mathbf{A} = 1$$

$$\mathbf{B} = \left( \frac{2r\hat{x}}{K} + \frac{2s\hat{y}}{L} - r - s + \sigma_1 + \sigma_2 + \beta_1\bar{z} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} = & \left( rs - r\sigma_2 - s\sigma_1 - \frac{2rs\hat{x}}{K} - \frac{2rs\hat{y}}{L} + \frac{4rs\hat{x}\hat{y}}{KL} + \frac{2r\sigma_2\hat{x}}{K} + \frac{2s\sigma_1\hat{y}}{L} - s\beta_1\bar{z} \right. \\
& \left. + \frac{2s\beta_1\bar{y}\bar{z}}{L} + \beta_1\sigma_2\bar{z} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga didapat persamaan

$$\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C} = 0$$

Substitusi ke persamaan (4.15)



$$\left( \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} - \frac{2s \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{y} \bar{z}}{L} - \beta_1 \beta_2 \sigma_2 \bar{x} \bar{z} - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} \lambda \right) \\ + (\beta_2 \bar{x} - \beta_0 - \lambda)(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$$

$$\left( \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} - \frac{2s \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{y} \bar{z}}{L} - \beta_1 \beta_2 \sigma_2 \bar{x} \bar{z} - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} \lambda \right) \\ + [-A\lambda^3 + (\beta_2 \bar{x} A - \beta_0 A - B)\lambda^2 + (\beta_2 \bar{x} B - \beta_0 B - C)\lambda \\ + (\beta_2 \bar{x} C - \beta_0 C +)] = 0$$

$$-A\lambda^3 + (\beta_2 \bar{x} A - \beta_0 A - B)\lambda^2 + (\beta_2 \bar{x} B - \beta_0 B - C - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z})\lambda \\ + \left( \beta_2 \bar{x} C - \beta_0 C - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} - \frac{2s \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{y} \bar{z}}{L} - \beta_1 \beta_2 \sigma_2 \bar{x} \bar{z} \right) = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik polinomial yang berbentuk

$$-T\lambda^3 + U\lambda^2 + V\lambda + W = 0$$

dengan

$$T = A$$

$$U = (\beta_2 \bar{x} A - \beta_0 A - B)$$

$$V = (\beta_2 \bar{x} B - \beta_0 B - C - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z})$$

$$W = \left( \beta_2 \bar{x} C - \beta_0 C - \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{z} - \frac{2s \beta_1 \beta_2 \bar{x} \bar{y} \bar{z}}{L} - \beta_1 \beta_2 \sigma_2 \bar{x} \bar{z} \right)$$

Nilai-nilai eigen pada polinomial di atas sulit diperoleh untuk menentukan kestabilan pada titik kesetimbangan pada  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , karena terlalu banyak parameter yang ada, sehingga digunakan bantuan simulasi numerik.

#### 4.6 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan diberikan simulasi numerik untuk menggambarkan model mangsa pemangsa yang dimodelkan pada persamaan (4.1). Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan sebagai berikut :

No.	Parameter	Nilai
1	$r$	4
2	$s$	3,5
3	$K$	40
4	$L$	50
5	$\beta_0$	3
6	$\beta_1$	2
7	$\beta_2$	1
8	$\sigma_1$	2,5
9	$\sigma_2$	1,5

Sumber : Nonlinear Analysis (12) : 479-494, 2007

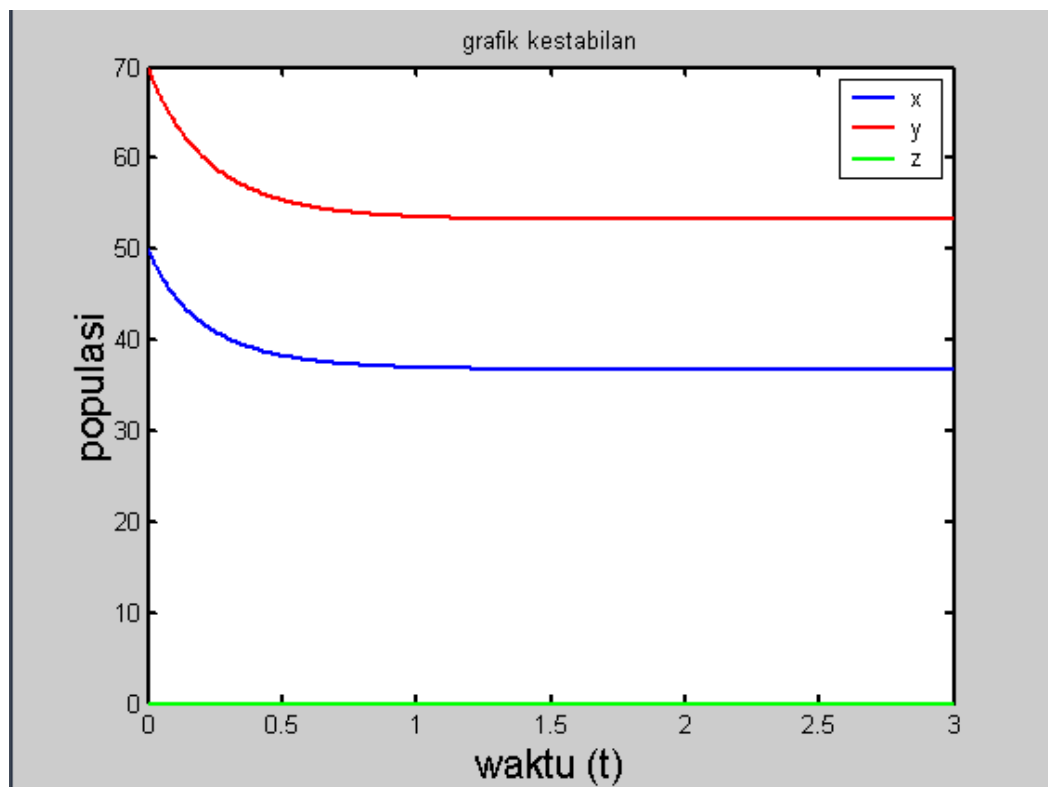
Pada kasus I ketika pemangsa bergantung sepenuhnya pada mangsanya, diketahui bahwa kesetimbangan  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  ada, dan diketahui nilai  $\hat{x} = 36,7429$  selanjutnya nilai  $\hat{y}$  dapat dihitung menggunakan persamaan (4.6) sehingga diperoleh nilai  $\hat{y} = 53,2598$ . Kemudian pada kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  diketahui ada dan nilai  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  dapat dihitung menggunakan persamaan (4.9) (4.10) (4.11), sehingga diperoleh nilai  $\bar{x} = 3, \bar{y} = 10,6406, \bar{z} = 3,2602$

Dari nilai-nilai  $\hat{x}, \hat{y}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  yang diperoleh, maka

1. Ketika pemangsa berada pada tingkat kestabilan nol ( $z = 0$ ), total kepadatan spesies mangsa pada tingkat kesetimbangan adalah 90,0027 yang diperoleh dari  $36,7429 + 53,2598$

2. Ketika pemangsa sangat bergantung pada mangsanya, maka kepadatan pemangsa adalah 3,2602 sedangkan total kepadatan mangsa telah menurun yaitu 76,3621 yang diperoleh dari  $90,0027 - 13,6406$

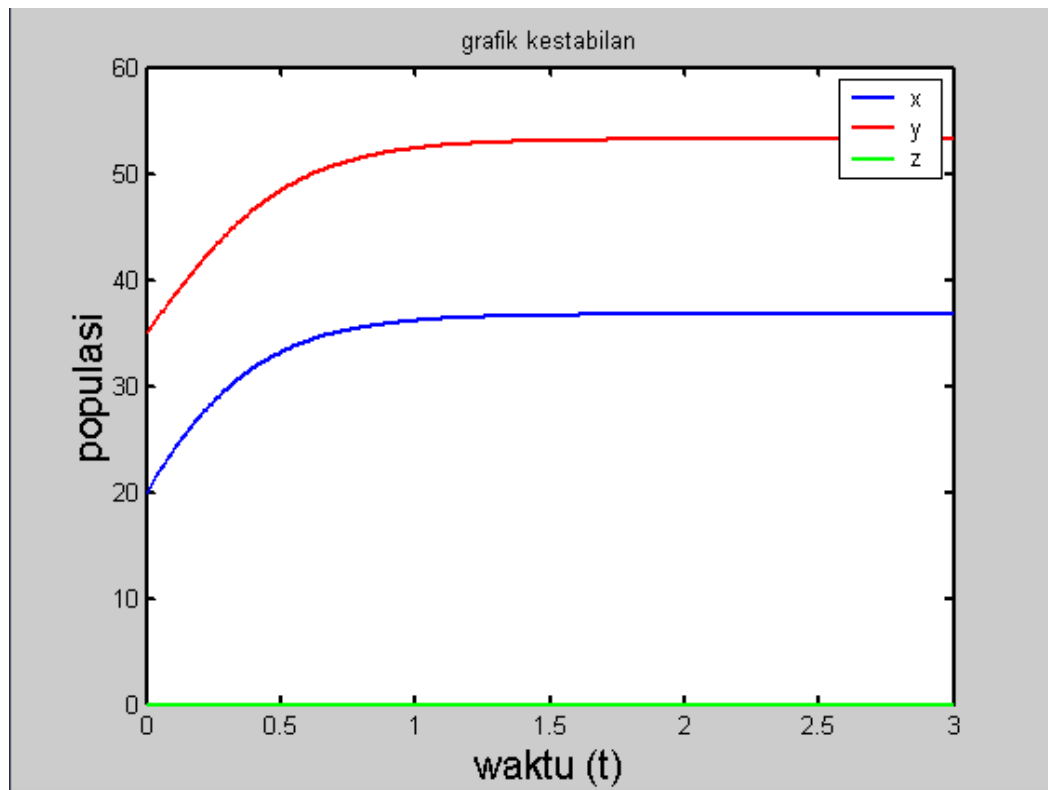
Dengan menggunakan *software* Matlab 6.1 diperoleh gambar-gambar yang memperlihatkan perilaku-perilaku spesies mangsa pada daerah bebas, mangsa pada daerah perlindungan, dan pemangsa sebagai berikut



Gambar 4.1 Perilaku sistem untuk titik kesetimbangan  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  untuk syarat awal  $\hat{x} = 50, \hat{y} = 70, z = 0$

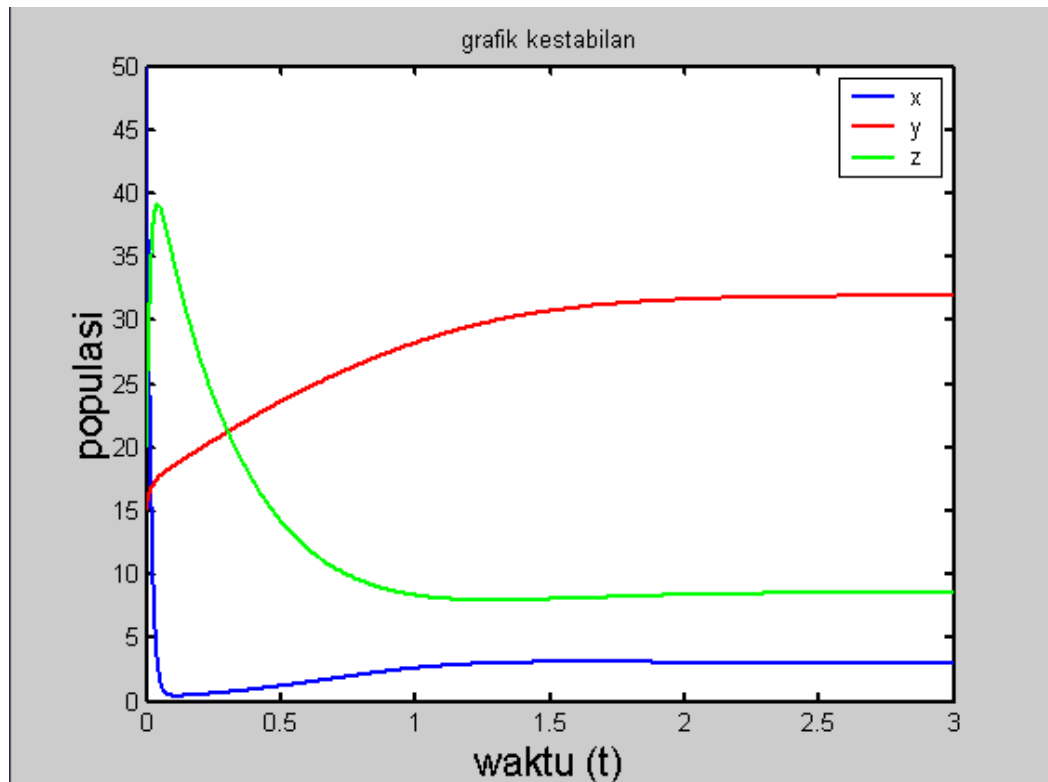
Dari gambar terlihat bahwa diberikan syarat awal mangsa pada daerah bebas 50 spesies dan mangsa pada daerah perlindungan sebanyak 70 spesies, dan

pemangsa nol, dalam jangka waktu tertentu mangsa pada daerah bebas dan daerah perlindungan berkurang karena faktor kematian (karena jumlah awal mangsa melebihi *carrying capacity*) kemudian bergerak stabil menuju *carrying capacity* populasi mangsa tersebut.



Gambar 4.2 Perilaku sistem untuk titik kesetimbangan  $E_1(\hat{x}, \hat{y}, 0)$  untuk syarat awal  $\hat{x} = 20, \hat{y} = 35, z = 0$

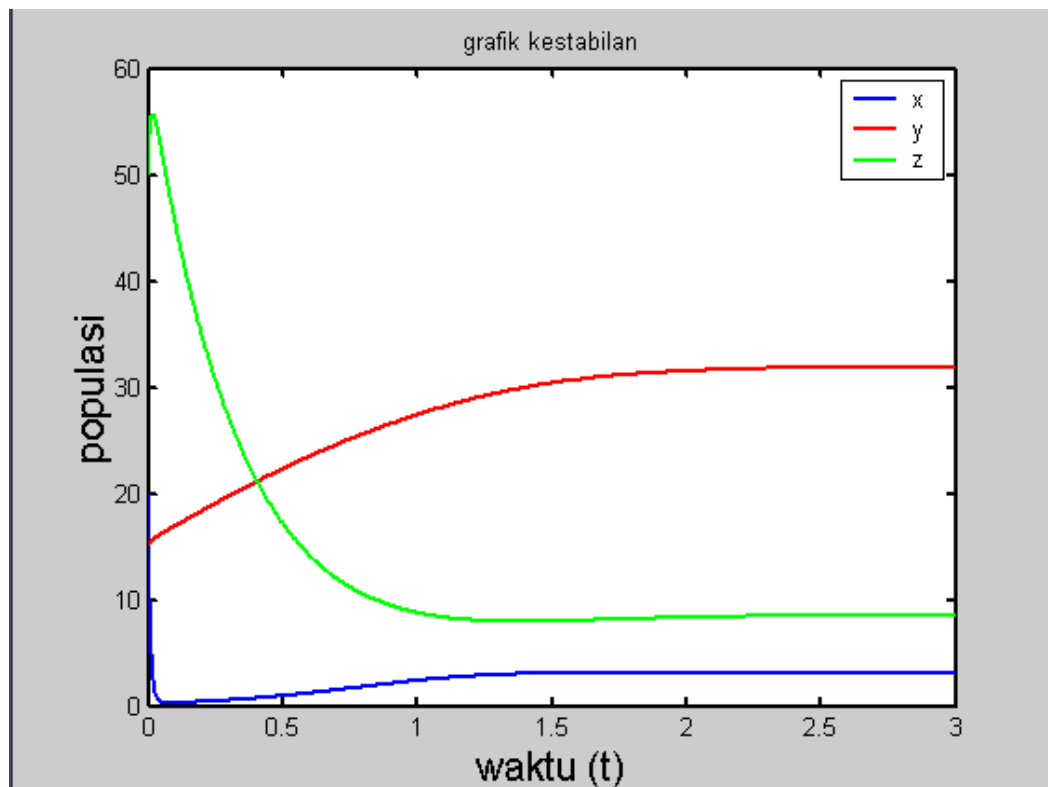
Dari gambar terlihat bahwa diberikan syarat awal mangsa pada daerah bebas 20 spesies dan mangsa pada daerah perlindungan sebanyak 35 spesies, dan pemangsa nol, dalam jangka waktu tertentu mangsa pada daerah bebas dan daerah perlindungan bertambah karena faktor kelahiran dan migrasi masuk (karena jumlah awal mangsa kurang dari *carrying capacity*) kemudian bergerak stabil menuju *carrying capacity* populasi mangsa tersebut.



Gambar 4.3 Perilaku sistem untuk titik kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  untuk syarat awal  $\bar{x} = 50, \bar{y} = 15, \bar{z} = 20$

Dari gambar terlihat bahwa diberikan syarat awal mangsa pada daerah bebas sebanyak 50 spesies, mangsa pada daerah perlindungan sebanyak 15 spesies dan pemangsa sebanyak 20 spesies. Dalam jangka waktu tertentu mangsa pada daerah perlindungan bertambah karena faktor kelahiran dan migrasi masuk, kemudian bergerak stabil menuju *carrying capacity* populasi mangsa tersebut. Selanjutnya mangsa pada daerah bebas berkurang dari kondisi awal karena faktor kematian yang disebabkan oleh pemangsa sehingga kepadatan pemangsa bertambah, setelah mangsa pada daerah bebas hampir habis maka pemangsa tidak mendapatkan makanan akibatnya kepadatan pemangsa berkurang karena

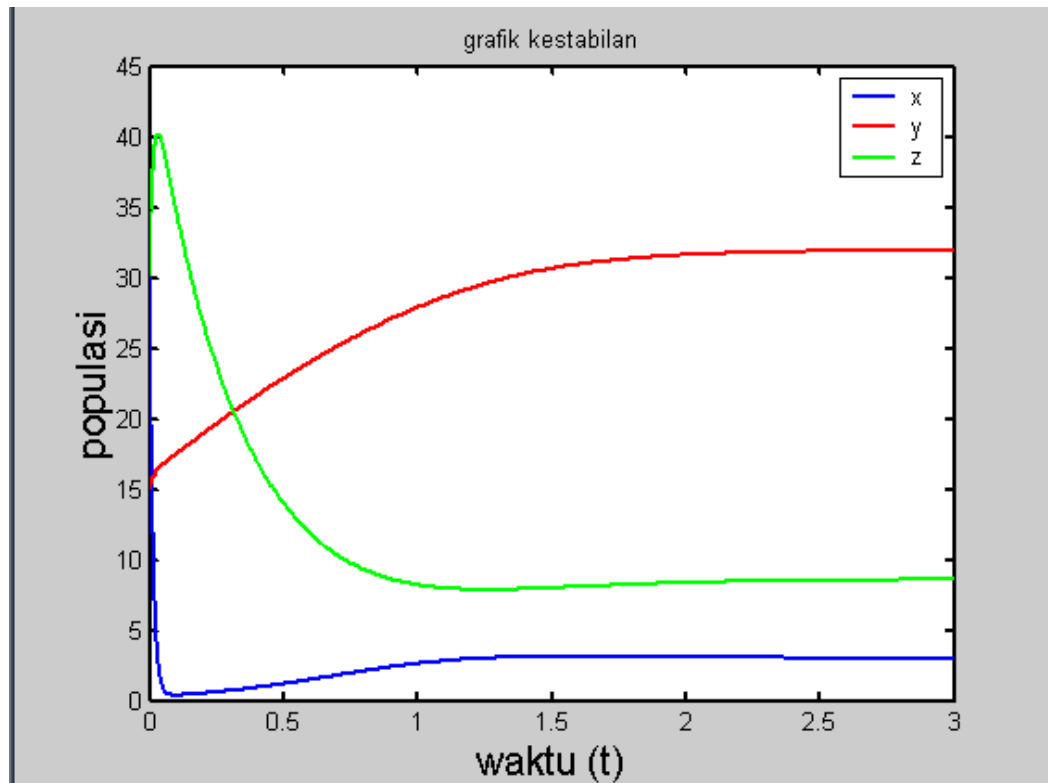
kematian, selanjutnya saat mangsa pada daerah bebas bertambah karena faktor kelahiran dan migrasi masuk, sehingga kepadatan pemangsa bertambah karena interaksi dengan mangsa, dan setelah beberapa waktu tertentu mangsa dan pemangsa bergerak stabil menuju *carrying capacity*.



Gambar 4.4 Perilaku sistem untuk titik kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  untuk syarat awal  $\bar{x} = 20, \bar{y} = 15, \bar{z} = 50$

Dari gambar terlihat bahwa syarat awal mangsa pada daerah bebas sebanyak 20 spesies, mangsa pada daerah perlindungan sebanyak 15 spesies, dan pemangsa sebanyak 50 spesies. Dalam jangka waktu tertentu perilaku gambar 4.3 dan gambar 4.4 adalah sama, yang membedakan hanya perilaku awal pemangsa pertambahannya tidak sebanyak seperti pemangsa pada gambar 4.3. Hal tersebut

dikarenakan pada gambar 4.4 jumlah syarat awal pemangsa lebih banyak daripada jumlah mangsa pada daerah bebas, sehingga pemangsa hanya mendapatkan sedikit makanan (mangsa).



Gambar 4.5 Perilaku sistem untuk titik kesetimbangan  $\bar{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  untuk syarat awal  $\bar{x} = 30, \bar{y} = 15, \bar{z} = 30$

Dari gambar terlihat bahwa syarat awal mangsa pada daerah bebas sebanyak 30 spesies, mangsa pada daerah perlindungan sebanyak 15 spesies, dan pemangsa sebanyak 30 spesies. Dalam jangka waktu tertentu perilaku gambar 4.3 dan gambar 4.4 dan gambar 4.5 adalah sama, yang membedakan hanya perilaku awal pemangsa pertambahannya tidak sebanyak seperti pemangsa pada gambar 4.3,

dan lebih banyak dari gambar 4.4. Hal tersebut dikarenakan pada gambar 4.5 jumlah syarat awal pemangsa sama dengan jumlah mangsa pada daerah bebas.