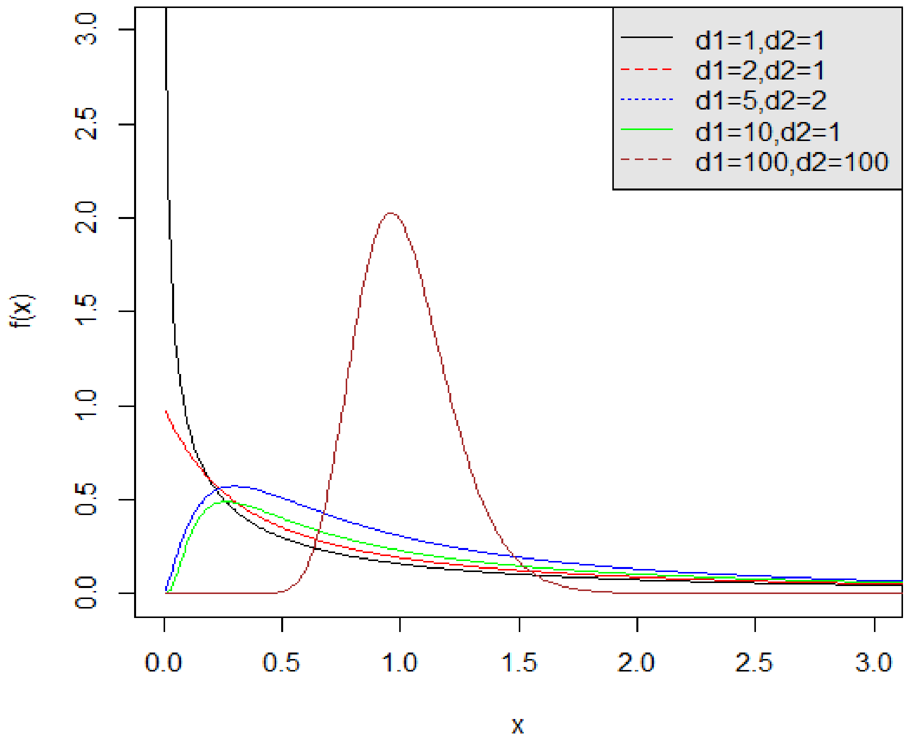
II. LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi F

Distribusi F merupakan salah satu distribusi kontinu. Dengan variabel acak X memenuhi batas X > 0, sehingga luas daerah dibawah kurva sama dengan satu, sementara grafik distribusi F tidak simetrik dan umumnya sedikit positif seperti halnya distribusi lainnya.



Gambar. 1 Grafik FKP F Distribution

Definsi 2. 1

Misalkan X adalah random variabel dari distribusi F dengan parameter d_1 dan d_2, dinotasikan $X \sim F(d_1 , d_2)$. Maka fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \left(\frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}}}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \right) \frac{x^{\frac{d_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{d_1}{d_2}x\right)^{\frac{d_1+d_2}{2}}} \quad , x \geq 0 \qquad (2.1)$$

dimana d_1 dan d_2 bilangan bulat positif dengan B adalah fungsi beta.

2.2 Distribusi *Three-Parameter Generalized* F

Distribusi *Three-parameter Generalized* F merupakan salah satu distribusi kontinu yang memiliki tiga parameter, yaitu α yang merupakan parameter skala serta m_1 dan m_2 yang merupakan parameter bentuk. Distribusi G3F adalah generalisasi dari distribusi F.

Definisi 2.2

Misalkan X adalah random variabel dari distribusi G3F (α , m_1, m_2) maka fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)} \right) \frac{x^{m_1-1}}{(1+ \alpha x)^{m_1+m_2}} \quad , x > 0, m_1, m_2, \alpha > 0 \qquad (2.2)$$

Dengan $B(m_1, m_2)$ adalah fungsi Beta, (Warsono dkk, 2014).

2.2.1 Nilai Harapan dari Distribusi G3F

Nilai harapan dari distribusi G3F dengan parameter (α , m_1, m_2) dimana α , m_1, $m_2 > 0$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} x.\left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\right)\frac{x^{m_1-1}}{(1+\alpha x)^{m_1+m_2}}\ dx$$

$$E(X) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\int_0^{\infty}\frac{x^{(m_1+1)-1}}{(1+\alpha x)^{m_1+m_2}}\ dx$$

Misalkan :

u $= \alpha$x x = 0 $\rightarrow$ u = 0

du $= \alpha\, dx$ x = ∞ $\rightarrow$ u = ∞

Sehingga

$$E(X) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{(m_1+1)-1}}{(1+u)^{m_1+m_2}}.\frac{1}{\alpha}\ du$$

$$= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}.\frac{1}{\alpha}.\alpha^{-m_1}\int_0^{\infty}\frac{(u)^{(m_1+1)-1}}{(1+u)^{m_1+1+m_2-1}}\ du$$

Karena B (m_1,m_2) = $\int_0^{\infty}\frac{(u)^{m_1-1}}{(1+u)^{m_1+m_2}}\ du,$ (Abramowitz and Stegun, 1970) maka:

$$E(X) = \frac{1}{\alpha B(m_1,m_2)}B(m_1+1, m_2-1)$$

Dan dengan menggunakan persamaan (6.2.2) dalam Abramowitz dan Stegun (1970) yakni B(z,w) = $\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ = B(w,z) maka diperoleh

E(X) = $\frac{\Gamma(m_1+m_2)}{\alpha\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} \cdot \frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2-1)}{\Gamma(m_1+1+m_2-1)}$

E(X) = $\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2-1)}{\alpha\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}$

Jadi nilai harapan dari distribusi G3F adalah

E(X) = $\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2-1)}{\alpha\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}$

(2.3)

Selanjutnya, untuk E(X^2) dapat dinyatakan oleh

E(X^2) $= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x) dx$

$= \int_0^{\infty} x^2 . \left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\right) \frac{x^{m_1-1}}{(1+\alpha x)^{m_1+m_2}}\ dx$

E(X^2) $= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)} \int_0^{\infty} \frac{x^{(m_1+2)-1}}{(1+\alpha x)^{m_1+m_2}}\ dx$

Misalkan :

u $= \alpha$x x = 0 → u = 0

du $= \alpha\ dx$ x = ∞ → u = ∞

Sehingga

E(X^2) $= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{(m_1+2)-1}}{(1+u)^{m_1+m_2}} . \frac{1}{\alpha}\ du$

$= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)} . \frac{1}{\alpha} . \alpha^{-m_1-1} \int_0^{\infty} \frac{(u)^{(m_1+2)-1}}{(1+u)^{m_1+2+m_2-2}}\ du$

E(X^2) $= \frac{1}{\alpha^2 B(m_1,m_2)}$B($m_1$ + 2, m_2 – 2)

E(X^2) = $\frac{\Gamma(m_1+m_2)}{\alpha^2\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} \cdot \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)}{\Gamma(m_1+2+m_2-2)}$

$E(X^2) = \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}$

Jadi diperoleh nilai $E(X^2) = \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}$ (2.4)

2.2.2 Varians dari distribusi G3F

Varians atau ragam dari distribusi G3F dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.3) dan (2.4) yaitu :

$$var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} - \left(\frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2-1)}{\alpha\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}\right)^2$$

$$= \frac{\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} - \frac{\left(\Gamma(m_1+1)\right)^2(\Gamma(m_2-1))^2}{\alpha^2\left(\Gamma(m_1)\right)^2(\Gamma(m_2))^2}$$

$$= \frac{[\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)] - \left(\Gamma(m_1+1)\right)^2(\Gamma(m_2-1))^2}{\alpha^2\left(\Gamma(m_1)\right)^2(\Gamma(m_2))^2}$$

Dengan menggunakan persamaan (6.1.15) dalam Abramowitz and Stegun (1970), yakni $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, maka diperoleh

$$\text{Var}(X) = \frac{[\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\Gamma(m_1+2)\Gamma(m_2-2)] - \left(\Gamma(m_1+1)\right)^2(\Gamma(m_2-1))^2}{\alpha^2\left(\Gamma(m_1)\right)^2(\Gamma(m_2))^2}$$

$$= \frac{\left[{m_1}^2\Gamma(m_1)^2\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2)\right] - \left[{m_1}^2\Gamma(m_1)^2\left(\Gamma(m_2-2)\right)^2\right]}{\alpha^2\left(\Gamma(m_1)\right)^2(\Gamma(m_2))^2}$$

$$= \frac{{m_1}^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2) - \left(\Gamma(m_2-1)\right)^2}{[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}\right]$$

Jadi varians dari distribusi G3F adalah

$$\text{Var(X)} = \frac{{m_1}^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2)-\left(\Gamma(m_2-1)\right)^2}{[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}\right]$$

2.3 Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Diawali dari beberapa kelemahan dan kelebihan dari setiap metode pendugaan yang telah ada, maka penggunaan metode PWM dapat dijadikan alternatif lain dalam menduga parameter dari distribusi G3F. Metode PWM merupakan modifikasi dari metode "konvensional" momen dan pertama kali dikemukakan oleh Hosking et al., (1984). Fungsi PWM dari variabel random X dengan fungsi distribusi kumulatif (CDF) , F(x) didefinisikan sebagai berikut:

$$M_{r,s,t} = E[(X(F))^r(F(x))^s(1-F(x))^t]$$

Dalam hal ini r, s dan t merupakan bilangan real. Bila s = t = 0 dan r merupakan bilangan bulat yang tidak negatif maka akan menjadi $M_{r,0,0}$ merupakan momen peluang konvensional yang selama ini dikenal.

Adapun subclass dari fungsi PWM di atas dengan X(F) adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif maka fungsi PWM adalah $M_{1,s,t}\ (r=1, s=0,1,2,\dots, t=0,1,2,\dots)$. Sementara $M_{1,s,t}$ dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu s = 0 ($M_{1,0,t}$) dan t = 0 ($M_{1,s,0}$), sehingga fungsi diatas dapat dinyatakan dalam bentuk

$M_{1,0,t} = E[X(F)(1-F(x)^t]$ dimana $M_{1,0,t} = \int_0^1 [X(F)(1-F(x)^t]\,dt$ dan

$M_{1,s,0} = E[X(F)(F(x)^s]$ dimana $M_{1,s,0} = \int_0^1 [X(F)(F(x)^s]\,dt$

Selain itu fungsi PWM dapat juga ditulis secara khusus yakni

$M_{r,s,t} = B(s+1, t+1)E\left[X^{r}{}_{(s+1),(s+t+1)}\right]$, dengan r, s, t adalah bilangan real dan B adalah fungsi beta. Dalam hal ini $M_{r,s,t}$ merupakan momen ke – r dari statistik tataan ke (t + 1) untuk sampel berukuran (s + t + 1).

Sehingga, jika r = 1, s = 0 dan t = 1 maka

$$M_t = M_{1,0,t} = B(1, t+1)E\left[X_{(1),(t+1)}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+2)} E\left[X_{(1),(t+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{t+1} E\left[X_{(1),(t+1)}\right]$$

$$= \int_0^1 X(F)[1-F(x)]^t \, dF \qquad (2.4.1)$$

Dengan menyelesaikan M_t akan didapatkan penduga bagi parameter yang masih dinyatakan dalam bentuk M_t. Adapun penduga tak bias bagi M_t diperoleh berdasarkan sampel tataan $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ dari sampel berukuran n, dan t bilangan positif dengan menyelesaikan persamaan

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{\binom{n-i}{t}}{\binom{n-1}{t}} x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{(n-i)\ \dots (n-i-t+1)}{(n-1)\dots(n-t)} x_{(i)}$$

Selanjutnya dengan mengganti M_t dengan $\widehat{M}_t$ akan didapatkan penduga parameter dari setiap parameter distribusi.

2.4 Karakteristik Penduga

Untuk mengetahui karakteristik penduga dari distribusi G3F dengan menggunakan metode PWM, maka harus memenuhi sifat – sifat penduga yang baik diantaranya sebagai berikut:

2.4.1 Tak Bias

Salah satu sifat yang harus dimiliki oleh suatu penduga parameter dari suatu distribusi adalah sifat ketakbiasan dari penduga tersebut.

Definisi 2.3

Penduga $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dikatakan penduga tak bias bagi $g(\theta)$ bila

$$E(U(\boldsymbol{X})) = g(\theta),$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.2 Varians Minimum

Suatu penduga dikatakan sebagai penduga yang baik selain memiliki sifat tak bias, juga memiliki varians minimum.

Definisi 2.4

Misalkan U($\boldsymbol{X}$) adalah penduga tak bias bagi $g(\theta)$**,** maka untuk sebarang penduga tak bias $U_1(\boldsymbol{X})$ bagi $g(\theta)$ disebut penduga varians minimum jika $Var(U(\boldsymbol{X})) \leq Var(U_1(\boldsymbol{X}))$ untuk setiap $\theta \in \Omega$, dimana

$$Var\left(\mathrm{U}_1(\boldsymbol{X})\right) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathrm{g}(\theta)\right)^2}{\mathrm{n.E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathrm{f}(\mathrm{X}; \theta)\right]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Dalam menentukan penduga varians minimum, berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan varians minimum yakni :

2.4.2.1 Informasi Fisher

Definisi 2.5

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan peluang (fkp) (x, θ), $\theta \in \Omega$, *information Fisher* dinotasikan dengan I(θ), dimana:

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

atau

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right]$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.2.2 Matriks Informasi Fisher

Definisi 2.6

Misalkan sampel acak X_1, X_2, . . . , $X_n$dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta_1;\theta_2), \theta_1;\theta_2 \in \Omega$ dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\theta_1;\theta_2) > 0$ yang tidak meliputi $\theta_1\, dan\, \theta_2$ dapat diturunkan dibawah integralnya. Sehingga matriks Informasi Fisher sebagai berikut:

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial {\theta_1}^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial {\theta_2}^2}\right] \end{bmatrix},$$

(Hogg and Craig, 1995)

2.4.2.3 *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Definisi 2.7

Pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound*didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} = \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

Jika Y = $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ adalah penduga tak bias dari θ, maka $k(\theta) = \theta$, mengakibatkan pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound*$k'(\theta)$adalah sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.4.3 Konsisten

Sifat lain yang harus dimiliki oleh suatu penduga selain tak bias dan varians minimum adalah sifat kekonsistenan dari penduga tersebut, dimana saat ukuran sampel semakin besar maka penduga tersebut akan semakin mendekati parameter populasi sesungguhnya.

Definisi 2.8

U(**X**) dikatakan sebagai penduga konsisten bagi $g(\theta)$ jika U(**X**) $\xrightarrow{P} g(\theta)$ untuk n → ∞, ∀ $\theta \in \Omega$ yaitu bila:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| \geq \varepsilon\} = 0$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(X) - g(\theta)| < \varepsilon\} = 1 ,$$

(Hogg and Craig, 1995).

Teorema 2.1 (Chebyshev's Inequality)

Misalkan X variabel acak dengan rata – rata μ dan varaiansσ^2. Untuk $\forall\, \varepsilon\ > 0$,

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

atau

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Teorema 2.2

Jika $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, berlaku:

- $\lim_{n\to\infty} Var\ U(X) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\ U(X) = 0$

Untuk $\forall\, \theta\ \in \Theta$, U(X) merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ

(Casella and Berger, 2002).