II. LANDASAN TEORI

Dalam proses penelitian pendekatan distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ terhadap distribusi *gamma*(m_1, γ), melalui distribusi *generalized beta* 2 (a, b, m_1, m_2), dan distribusi *generalized gamma*(a, γ, m_1)diperlukan beberapa konsep dan teori yang mendukung, Berikut ini akan dijelaskan beberapa konsep dan teori yang berhubungan dengan distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ terhadap distribusi *gamma*(m_1, γ), melalui distribusi *generalized beta* 2 (a, b, m_1, m_2), dan distribusi *generalized gamma*(a, γ, m_1)

2.1 Distribusi Generalized t

Distribusi *generalized* $t(\mu, \sigma, p, q)$ merupakan perumuman dari distribusi t. Distribusi ini digunakan secara luas dalam bidang ekonomi dan keuangan.

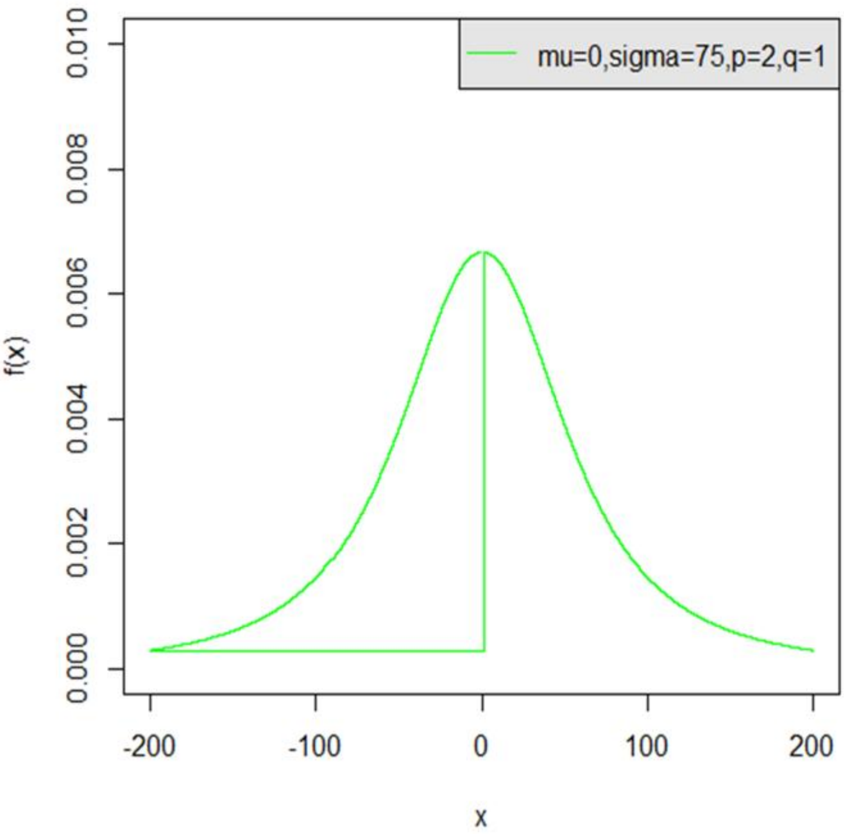
Definisi 2.1 Distribusi Generalized t

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized t* dengan parameter $\mu, \sigma, p\ dan\ q$ jika fungsi kepekatannya adalah:

$$f(x; \mu, \sigma, p, q) = \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}} \quad \text{Untuk } -\infty < x < \infty$$

Dimana $\mu \in R$ adalah parameter lokasi, $\sigma > 0$ adalah parameter skala, $p > 0$ dan $q > 0$ keduanya merupakan parameter bentuk dan B adalah fungsi beta.

(Chan et al:2007)



Gambar 1. Plot distribusi *generalized t*

2.2 Pembuktian PDF Distribusi Generalized t

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized t* dengan parameter $\mu, \sigma, p, dan\ q$ jika fungsi kepekatannya adalah:

$$f(x; \mu, \sigma, p, q) = \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}}$$

$-\infty < x < \infty; p, q, \sigma > 0;\ \mu \in R$

Bukti:

$f(x)$ adalah pdf, oleh karena batas x pada fungsi kepekatan peluang distribusi *generalized t* adalah $-\infty < x < \infty$, dan berdasarkan grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada μ, maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{\mu}^{\infty} f(x)dx$$

$$= 2\int_{\mu}^{\infty} \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B(\frac{1}{p}, q)\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

$$= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B(\frac{1}{p}, q)} \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx \qquad (2.1)$$

Dengan memisalkan $y = \frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{p}$

$$y^2 = \left[\frac{1}{q}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\right]^2$$

$$y^2 = \frac{1}{q^2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{2p}$$

$$\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{2p} = y^2q^2$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = (y^2q^2)^{\frac{1}{2p}}$$

$$x = y^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{p}}\sigma + \mu$$

Maka :

$$dx = \frac{1}{p}(y)^{\frac{1}{p}-1}q^{\frac{1}{p}}\,\sigma\,dy$$

Batas

$x = \mu \rightarrow y = 0$

$x = \infty \rightarrow y = \infty$

Sehingga persamaan (2.1) menjadi bentuk berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}}B(\frac{1}{p},q)}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}\frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}q^{\frac{1}{p}}\,\sigma\,dy$$

$$= \frac{1}{p}q^{\frac{1}{p}}\,\sigma\frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}}B\left(\frac{1}{p},q\right)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}}dy$$

$$= \frac{1}{B(\frac{1}{p}, q)} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

Karena $B\left(\frac{1}{p}, q\right) = \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} B\left(\frac{1}{p}, q\right)$$

$$= 1$$

Jadi terbukti $f(x)$ adalah pdf.

2.3 Distribusi Generalized Beta 2

Definisi 2.3 Distribusi Generalized Beta 2

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized beta 2* dengan parameter (a, b, m_1, m_2), jika fungsi kepekatannya adalah:

$$f(x) = \frac{a x^{a m_1 - 1}}{b^{a m 1} B(m_1, m_2) \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{m_1 + m_2}} \; ; untuk \; 0 < x < \infty$$

Dengan:

$B(m_1, m_2)$ adalah merupakan fungsi beta

a, b, m_1, m_2 adalah bilangan positf

b adalah parameter skala

a, m_1, m_2 adalah parameter bentuk.

(Kleiber,C. and Kotz,S. 2003)

2.4 Pembuktian pdf Distribusi Beta 2

Suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized beta 2* dengan parameter (a, b, m_1, m_2), jika fungsi kepekatannya adalah:

$$f(x) = \frac{a x^{am_1 - 1}}{b^{am1} B(m_1, m_2)\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{m_1 + m_2}} \;; untuk\ 0 < x < 0$$

Dimana $B(m_1, m_2)$ merupakan fungsi beta, $a, b, m_1, m_2 > 0$.

Bukti:

$f(x)$ adalah pdf

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{a x^{am_1 - 1}}{b^{am1} B(m_1, m_2)\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{m_1 + m_2}}\, dx$$

$$= \frac{a}{b^{am_1} B(n_1, m_2)} \int_0^\infty \frac{x^{am_1 - 1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{m_1 + m_2}}\, dx \qquad (2.2)$$

Dengan memisalkan $y = \left(\frac{x}{b}\right)^{a}$

$$y^2 = \left(\frac{x}{b}\right)^{2a}$$

$$(y^2)^{\frac{1}{2a}} = \frac{x}{b}$$

$$x = by^{\frac{1}{a}}$$

$$dx = \frac{b}{a}y^{\frac{1}{a}-1}dy$$

Batas

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$x = \infty \quad \rightarrow \quad y = \infty$

Sehingga persamaan (2.2) menjadi:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{a}{b^{am1}B(m_1,m_2)}\int_0^\infty \frac{\left(by^{\frac{1}{a}}\right)^{am_1-1}}{\left[1+\left(\frac{by^{\frac{1}{a}}}{b}\right)^{a}\right]^{m_1+m_2}}\,dx$$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{a}{b^{am1}B(m_1,m_2)}\int_0^\infty \frac{\left(by^{\frac{1}{a}}\right)^{am_1-1}}{\left[1+\left(\frac{by^{\frac{1}{a}}}{b}\right)^{a}\right]^{m_1+m_2}}\,dx$$

$$= \frac{ab^{am1}}{ab^{am1}B(m_1,m_2)}\int_0^\infty \frac{(y)^{m_1-1}}{[1+y]^{m_1+m_2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{B(m_1, m_2)} \int_0^{\infty} \frac{(y)^{m_1 - 1}}{[1 + y]^{m_1 + m_2}} \, dx$$

Karena $B(m_1, m_2) = \int_0^{\infty} \frac{(y)^{m_1-1}}{[1+y]^{m_1+m_2}} \, dx$, maka

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{B(m_1, m_2)} B(m_1, m_2)$$

$$= 1$$

Jadi terbukti $f(x)$ adalah pdf

2.5 Distribusi Generalized Gamma

Definisi 2.5 Distribusi Generalized Gamma

Suatu peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi peluang *generalized gamma* dengan parameter $a, \gamma, dan\, m_1$ jika fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\Gamma(m_1)} \dfrac{x^{am_1 - 1}}{(\gamma)^{am_1}} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^a}, & x > 0; \quad a, \gamma, m_1 > 0 \\ 0 & , \ selainnya \end{cases}$$

(DiCiccio, 1987)

2.6 Pembuktian pdf Distribusi Generalized Gamma

Suatu peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi peluang *generalized gamma* dengan parameter $a, \gamma, dan\, m_1$ jika fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \frac{a}{\Gamma(m_1)} \frac{x^{am_1-1}}{(\gamma)^{am_1}} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^a}$$

$$dimana\; x > 0; \;\; a, \gamma, dan\, m_1 > 0$$

Bukti:

$f(x)$ adalah pdf

$$\int_0^\infty f(x)\, dx \; = \; \int_0^\infty \frac{a}{\Gamma(m_1)} \frac{x^{am_1-1}}{(\gamma)^{am_1}} e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^a} dx \qquad (2.3)$$

Misal $y = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^a$

$$x^a = y\gamma^a$$

$$x = \gamma y^{\frac{1}{a}} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{\gamma}{a} y^{\frac{1}{a}-1} dy$$

Batas:

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$x = \infty \quad \rightarrow \quad y = \infty$

Sehingga persamaan (2.3) menjadi bentuk:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{a}{\Gamma(m_1)} \frac{\left(\gamma y^{\frac{1}{a}}\right)^{am_1-1}}{(\gamma)^{am_1}} e^{-\left(\frac{\gamma y^{\frac{1}{a}}}{\gamma}\right)^a} \frac{\gamma}{a} y^{\frac{1}{a}-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \int_0^\infty y^{m_1-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \Gamma(m_1)$$

$$= 1$$

Jadi terbukti bahwa $f(x)$ adalah pdf

2.7 Distribusi Gamma

Definisi 2.7 Distribusi Gamma

Suatu peubah acak *X* dikatakan berdistribusi *gamma* dengan parameter $m_1, dan\ \gamma$ jika fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m_1)\gamma^{m_1}} x^{m_1-1} e^{-\frac{x}{\gamma}}, & x > 0;\ m_1, \gamma > 0 \\ 0 \qquad , & selainnya \end{cases}$$

(Wackerly *et. al*., 2008)

2.8 Pembuktian pdf Distribusi Gamma

Suatu peubah acak X dikatakan berdistribusi *gamma* dengan parameter $m_1, dan\, \gamma$ jika fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m_1)\gamma^{m_1}} x^{m_1-1} e^{-\frac{x}{\gamma}} \qquad , x > 0;\ m_1, \gamma > 0$$

Bukti:

$f(x)$ adalah pdf

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(m_1)\gamma^{m_1}} x^{m_1-1} e^{-\frac{x}{\gamma}}\, dx$$

Misal: $y = \frac{x}{\gamma}$

$$x = \gamma y$$

$$dx = \gamma dy$$

Batasan:

$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$

$x = \infty \quad \rightarrow \quad y = \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m_1)\gamma^{a}} \int_0^\infty (\gamma y)^{m_1-1} e^{-\left(\frac{\gamma y}{\gamma}\right)} \gamma dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)} \int_0^\infty y^{m_1-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m_1)}\Gamma(m_1)$$

$$= 1$$

Jadi terbukti $f(x)$ adalah pdf

2.9 Fungsi Gamma dan Fungsi Beta

Pada penelitian ini fungsi gamma dan fungsi beta digunakan untuk mempermudah dalam mencari fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized t*, distribusi *generalized beta 2*, distribusi *generalized gamma*, distribusi *gamma*.

Definisi 2.9 Fungsi Gamma

Fungsi gamma dinyatakan dengan $\Gamma(z)$adalah generalisasi dari fungsi faktorial. Fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

Dimana z adalah bilangan real positif$(z > 0)$dan konvergen untuk $z > 0$.

(Sahoo, 2013)

Lemma 1.

$\Gamma(1) = 1$

Bukti:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$

Definisi 2.9 Fungsi Beta

Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif. Fungsi beta dinyatakan dengan $B(\alpha,\beta)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

Corollary 1

Untuk setiap $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, fungsi beta adalah simetrik:

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

Corollary 2

Untuk setiap $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, fungsi beta dapat dinyatakan sebagai:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx$$

(Sahoo,2013)

2.10 Hubungan Fungsi Beta dengan Fungsi Gamma

Teorema 1

Misalkan α dan β adalah dua bilangan real positif, maka:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Dimana $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ adalah fungsi gamma.

Bukti:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left[\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\right]\left[\int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}\,dy\right]$$

$$= \left[\int_0^\infty u^{2\alpha-2}e^{-u^2}\,2udu\right]\left[\int_0^\infty v^{2\beta-2}e^{-v^2}\,2vdv\right]$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty u^{2\alpha-1}v^{2\beta-1}e^{-(u^2+v^2)}\,dudv$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= \left[\int_0^\infty (r^2)^{\alpha+\beta-1}e^{-r^2}\,dr^2\right]\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}\,d\theta\right]$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos\theta)^{2\alpha-1}(sin\theta)^{2\beta-1}d\theta\right]$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)$$

(Sahoo,2013)

2.11 Aproksimasi Stirling dari Fungsi Gamma

Definisi 2.11 Aproksimasi Stirling dari Fungsi Gamma

Rumus aproksimasi stirling dari fungsi gamma digunakan untuk mentransformasi fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari distribusi generalized beta II dan distribusi generalized t empat parameter menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Rumus aproksimasi stirling dari fungsi gamma adalah:

$$\Gamma(az+b) = \sqrt{2\pi}e^{-az}(az)^{az+b-\frac{1}{2}}$$

(Abramowitz dan Stegun,1972)

2.12 Ekspansi Deret MacLaurin

Pada penelitian ini deret MacLaurin digunakan untuk menyelesaikan fungsi e^{tx} dan e^{itx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik dari suatu distribusi.

Teorema 2

Misalkan f adalah fungsi dimana turunan ke $(n+1), f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka *I* yang mengandung a. Jadi, untuk setiap x di dalam *I* berlaku:

pada suatu selang terbuka *I* yang memuat a. Jadi, untuk setiap x di dalam *I* berlaku:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Persamaan diatas disebut sebagai ekspansi deret taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$f(x) = f(0) + f'(0))(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots$$

Deret tersebut disebut sebagai ekspansi deret MacLaurin bagi fungsi $f(x)$. Dengan menggunakan ekspansi deret MacLaurin maka fungsi $f(x) = e^x$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!}$$

(Purcell,Varberg,danRigdon,2003)

2.13 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak digunakan sebagai salah satu cara untuk mendapatkan nilai momen dari suatu distribusi. Fungsi pembangkit momen memiliki bentuk yang sederhana, namun tidak semua distribusi peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen.

Definisi 2.13 Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontonu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E\,(e^{tx})$$

Untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$

Dari definisi diatas, dapat diuraikan dalam 2 kasus yang berbeda, yaitu untuk peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

a. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak diskrit

Jika *X* adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari *X* di x, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_{(x)}(t) = E\,(e^{tx}) = \sum_{x \in X} e^{tx} p(x)$$

b. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak kontinu

Jika *X* adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari *X* di x, maka fungsi pembangkit momen dari *X* adalah

$$M_x\,(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

(Hogg dan Craig,1995)

2.14 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik merupakan fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi dengan menambahkan *I* sebagai bagian imaginer atau momen dari (*itx*) atau ekspetasi dari e^{itx}.

Definisi 2.14 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik $(\phi_x(t))$ dari peubah acak *X*, didefinisikan sebagai nilai ekspetasi dari e^{itx} sebagai berikut:

$$\left(\phi_x(t)\right) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Dimana $f(x)$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari distribusi *X*.

(Kendall dan Stuart, 1958)

Teorema 3. Limiting Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan peubah acak Y_n memiliki fungsi distribusi $F_n(y)$ dan fungsi pembangkit momen $M(t;n)$ ada pada selang $-h < t < h$ dan untuk semua n. Jika ada fungsi distribusi $F(y)$, yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momennya $F(y)$, terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 \leq h$, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t;n)\, M(t)$, maka Y_n memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi $F(y)$.

(Hogg & Craig,1995)

2.15 Program R

Pemograman R adalah perangkat lunak bebas untuk komputasi statistik dan grafik pemograman R merupakan proyek GNU (*General Publik License Free Software Fundation*) yang mirip bahasa S yang dikembangkan di Bell Laboratories oleh John Chambers dan rekannya. Pemograman R menyediakan berbagai statistik seperti linear dan non linear *modeling*, pengujian analisis klasik, analisis *time-series*, klasifikasi dan lainnya, dan menu perangkat lunak yang digunakan untuk manipulasi data, perhitungan, dan tampilan grafik antara lain:

a. Penanganan data yang efektif dan penyimpangan data
b. Rangkaian operator untuk perhitungan array dalam matdan rik tertentu
c. Fasilitas grafik untuk analisis data dan menampilkannya, baik pada layar maupun *hardcopy*
d. Bahasa pemograman yang sederhana, berkembang dengan baik dan efektif.