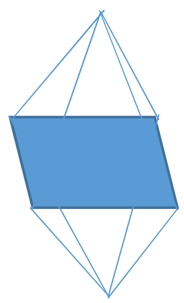
IV. *CYCLE INDEX POLYNOMIAL* PADA OKTAHEDRON

Oktahedron adalah polihedron yang terdiri dari delapan permukaan segitiga sama sisi yang berukuran sama, dan masing-masing empat segitiga bertemu pada satu titik. Sehingga oktahedron terdiri dari 6 titik, 12 garis dan 8 bidang.



Gambar 3. Oktahedron

4.1. *Cycle Index Polynomial* Pada Titik-Titik Oktahedron

Misalkan *S* adalah bentuk geometri oktahedron. *X* adalah himpunan titik-titik di S, maka $|X| = 6$. *C* himpunan berhingga warna (warna $1 \leq C \leq n$). Ω menyatakan himpunan semua fungsi $X \to C$. Misalkan *G* subgrup dari grup permutasi *S*. Maka order grup permutasi S adalah $|G| = 24$. Adapun anggota-anggota grup permutasi oktahedron dan *cycle index*-nya tercantum dalam Tabel 2.

Tabel 2. Grup permutasi titik oktahedron

Anggota	Notasi *Cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
A	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	(6,0,0,0)	Z_1^6
B	(1)(3)(5 4 6 2)	(2,0,0,4)	$Z_1^2Z_4^1$
C	(1)(3)(5 6)(4 2)	(2,2,0,0)	$Z_1^2Z_2^2$
D	(1)(3)(5 2 6 4)	(2,0,0,1)	$Z_1^2Z_4^1$
E	(5)(6)(1 2 3 4)	(2,0,0,1)	$Z_1^2Z_4^1$
F	(5)(6)(1 3)(2 4)	(2,2,0,0)	$Z_1^2Z_2^2$
G	(5)(6)(1 4 3 2)	(2,0,0,1)	$Z_1^2Z_4^1$
H	(2)(4)(1 6 3 5)	(2,0,0,1)	$Z_1^2Z_4^1$
I	(2)(4)(1 3)(6 5)	(2,2,0,0)	$Z_1^2Z_2^2$
J	(2)(4)(1 5 3 6)	(2,0,0,1)	$Z_1^2Z_4^1$
K	(1 3)(2 5)(4 6)	(0,3,0,0)	Z_2^3
L	(1 3)(2 6)(4 5)	(0,3,0,0)	Z_2^3
M	(2 4) (1 6) (3 5)	(0,3,0,0)	Z_2^3
N	(2 4)(1 5)(3 6)	(0,3,0,0)	Z_2^3
O	(1 2)(3 4)(5 6)	(0,3,0,0)	Z_2^3
P	(1 4)(2 3)(5 6)	(0,3,0,0)	Z_2^3
Q	(1 2 5)(3 4 6)	(0,0,2,0)	Z_3^2
R	(1 5 2)(3 6 4)	(0,0,2,0)	Z_3^2
S	(1 6 2)(3 4 5)	(0,0,2,0)	Z_3^2
T	(1 2 6)(3 5 4)	(0,0,2,0)	Z_3^2
U	(1 4 6)(2 5 3)	(0,0,2,0)	Z_3^2

Anggota	Notasi *Cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
V	(1 6 4)(2 3 5)	(0,0,2,0)	Z_3^2
W	(1 4 5)(2 6 3)	(0,0,2,0)	Z_3^2
X	(1 5 4)(2 3 6)	(0,0,2,0)	Z_3^2

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa *cycle index polynomial* dari permutasi :

1. a adalah Z_1^6 yaitu 6 *cycle* dengan panjang 1
2. b adalah $Z_1^2Z_4^1$ sama dengan *cycle index* d,e,g,h,j.
3. c adalah $Z_1^2Z_2^2$ sama dengan cycle index f dan i
4. k adalah Z_2^3 sama dengan *cycle index* l, m, n, o, p
5. q adalah Z_3^2 sama dengan *cycle index* r, s, t, u, v, w, x

Sehingga didapat *cycle index* dari oktahedron adalah

$$P_G(z_1, z_2, \dots, z_6) = \frac{1}{24}(z_1^6 + 6z_1^2z_4^1 + 3z_1^2z_2^2 + 6z_2^3 + 8z_3^2)$$

Berdasarkan Teorema 3.4.1., maka banyaknya pola warna yang berbeda adalah

$$N = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G} |C|^{\ell_1(g)}|C|^{\ell_2(g)} \dots |C|^{\ell_n(g)}\right)$$

$$N = \frac{1}{|24|}(|C|^6 + 6|C|^2|C|^1 + 3|C|^2|C|^2 + 6|C|^3 + 8|C|^2)$$

Maka untuk $1 \le |C| \le n$, banyaknya pola warna yang mungkin terbentuk pada oktahedron adalah sebagai berikut :

Tabel 3. Jumlah pola warna yang terbentuk pada titik-titik oktahedron

$\lvert C \rvert$	N
1	1
2	10
3	57
4	240
5	800
6	2.226

4.2. *Cycle Index Polynomial* Pada Garis-Garis Oktahedron

Misalkan *S* adalah bentuk geometri oktahedron.

X adalah himpunan garis-garis di S, maka $|X| = 8$. *C* himpunan berhingga warna (warna $1 \leq C \leq n$). Ω menyatakan himpunan semua fungsi $X \rightarrow C$. Misalkan G subgrup dari grup permutasi *S*. Maka order grup permutasi S adalah $|G| = 24$. Adapun anggota-anggota grup permutasi oktahedron dan *cycle index*nya tercantum dalam Tabel 4.

Tabel 4. Grup permutasi garis oktahedron

Anggota	Notasi *cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
A	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)	(12,0,0,0,0,0)	Z_1^{12}
B	(1 7 5 3)(2 8 6 4)(10 9 12 11)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3
C	(1 5)(3 7)(2 6)(4 8)(10 12)(9 11)	(0,6,0,0,0,0)	Z_2^6
D	(1 3 5 7)(2 4 6 8)(10 11 12 9)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3
E	(1 10 12 5)(2 11 4 3)(8 9 6 7)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3

Anggota	Notasi *cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
F	(1 12)(10 5)(2 4)(11 3)(8 6)(7 10)	(0,6,0,0,0,0)	Z_2^6
G	(1 5 12 10)(2 3 4 11)(8 7 6 9)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3
H	(1 2 10 8)(3 11 9 7()4 12 6 5)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3
I	(1 10)(2 8)(3 9)(4 6)(5 12)(7 11)	(0,6,0,0,0,0)	Z_2^6
J	(1 8 10 2)(3 7 10 11)(4 5 6 12)	(0,0,0,3,0,0)	Z_4^3
K	(4)(8)(1 9)(2 6)(3 12)(7 10)(5 11)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
L	(2)(6)(1 11)(3 10)(4 8)(5 9)(7 12)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
M	(3)(9)(1 4)(2 5)(6 10)(7 11)(8 12)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
N	(7)(11)(1 6)(2 12)(3 9)(4 10)(5 8)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
O	(1)(12)(2 7)(3 8)(4 9)(5 10)(6 11)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
P	(5)(10)(1 12)(2 9)(3 6)(4 7)(8 11)	(2,5,0,0,0,0)	$Z_1^2Z_2^5$
Q	(7 1 8)(5 2 9)(6 3 10)(4 11 12)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
R	(1 7 8)(2 5 9)(3 6 10)(4 12 11)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
S	(1 3 2)(4 10 7)(5 11 8)(6 12 9)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
T	(1 2 3)(4 7 10)(5 8 11)(6 9 12)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
U	(1 6 11)(2 7 12)(3 5 4)(8 9 10)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
V	(1 11 6)(2 12 7)(3 4 5)(8 10 9)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
W	(1 4 9)(2 11 10)(3 12 8)(5 6 7)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4
X	(1 9 4)(2 10 11)(3 8 12)(5 7 6)	(0,0,4,0,0,0)	Z_3^4

Dari Tabel 4 dapat dilihat bahwa *cycle index polynomial* dari permutasi

1. a adalah Z_1^{12} yaitu 12 *cycle* dengan panjang 1.
2. b adalah Z_4^3 yaitu 3 *cycle* dengan panjang 4, sama dengan *cycle index* pada d,e,g,h,j.
3. c adalah Z_2^6 yaitu 6 *cycle* dengan panjang 2, sama dengan *cycle index* pada f dan i.
4. k adalah $Z_1^2 Z_2^5$ yaitu 2 *cycle* dengan panjang 1 dan 5 buah *cycle* dengan panjang 2, sama dengan cycle index pada l, m, n, o, p.
5. q adalah Z_3^4 yaitu 4 *cycle* dengan panjang 3, sama dengan *cycle index* pada r, s, t, u, v, w, x.

Sehingga didapat *cycle index* dari oktahedron adalah

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_{12}) = \frac{1}{24}\left(z_1^{12} + 6z_4^3 + 3z_2^6 + 6z_1^2 z_2^5 + 8z_3^4\right)$$

Berdasarkan Teorema 3.4.1., maka banyaknya pola warna yang berbeda adalah

$$N = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G} |C|^{\ell_1(g)} |C|^{\ell_2(g)} \ldots |C|^{\ell_n(g)}\right)$$

$$N = \frac{1}{|24|}\left(|C|^{12} + 6|C|^3 + 3|C|^6 + 6|C|^2|C|^5 + 8|C|^4\right)$$

Maka untuk $1 \leq |C| \leq n$, banyaknya pola warna yang mungkin terbentuk pada garis-garis oktahedron adalah sebagai berikut :

Tabel 5. Jumlah pola warna yang terbentuk pada garis-garis oktahedron

$\lvert C\rvert$	N
1	1
2	218
3	22.815
4	703.760
5	10.194.250
6	90.775.566
7	576.941.778
8	2.863.870.080

4.3. *Cycle Index Polynomial* Pada Bidang-Bidang Oktahedron

Misalkan *S* adalah bentuk geometri oktahedron.

X adalah himpunan bidang-bidang di S, maka $|X| = 12$. *C* himpunan berhingga warna (warna $1 \leq C \leq n$). Ω menyatakan himpunan semua fungsi $X \rightarrow C$. Misalkan *G* subgrup dari grup permutasi *S*. Maka order grup permutasi S adalah $|G| = 24$. Adapun anggota-anggota grup permutasi oktahedron dan *cycle index*nya tercantum dalam Tabel 6.

Tabel 6. Grup permutasi bidang oktahedron

Anggota	Notasi *Cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
A	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	(8,0,0,0)	Z_1^8
B	(1 4 3 2)(5 8 7 6)	(0,0,0,2)	Z_4^2
C	(1 3)(2 4)(5 7)(6 8)	(0,4,0,0)	Z_2^4

Anggota	Notasi *Cycle*	Tipe Permutasi	*Cycle Index*
D	(1 2 3 4)(5 6 7 8)	(0,0,0,2)	Z_4^2
E	(1 5 6 2)(4 8 7 3)	(0,0,0,2)	Z_4^2
F	(1 6)(5 2)(4 7)(8 3)	(0,4,0,0)	Z_2^4
G	(1 2 6 5)(4 3 7 8)	(0,0,0,2)	Z_4^2
H	(1 5 8 4)(2 6 7 3)	(0,0,0,2)	Z_4^2
I	(1 8)(2 7)(3 6)(4 5)	(0,4,0,0)	Z_2^4
J	(1 4 8 5)(2 3 7 6)	(0,0,0,2)	Z_4^2
K	(1 7)(2 6)(3 5)(4 8)	(0,4,0,0)	Z_2^4
L	(1 5)(2 8)(3 7)(4 6)	(0,4,0,0)	Z_2^4
M	(1 2)(3 5)(4 6)(7 8)	(0,4,0,0)	Z_2^4
N	(1 7)(2 8)(3 4)(5 6)	(0,4,0,0)	Z_2^4
O	(1 4)(2 8)(3 5)(6 7)	(0,4,0,0)	Z_2^4
P	(1 7)(2 3)(4 6)(5 8)	(0,4,0,0)	Z_2^4
Q	(4)(6)(1 8 3)(2 5 7)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
R	(4)(6)(1 3 8)(2 7 5)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
S	(1)(7)(2 5 4)(3 6 8)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
T	(1)(7)(2 4 5)(3 8 6)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
U	(2)(8)(1 3 6)(4 7 5)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
V	(2)(8)(1 6 3)(4 5 7)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
W	(3)(5)(1 6 8)(3 7 4)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$
X	(3)(5)(1 8 6)(3 4 7)	(2,0,2,0)	$Z_1^2Z_3^2$

Dari Tabel 6 dapat dilihat bahwa *cycle index polynomial* dari permutasi

1. a adalah Z_1^8 yaitu 8 *cycle* dengan panjang 1
2. b adalah Z_4^2 yaitu 2 *cycle* dengan panjang 4, sama dengan *cycle index* pada d,e,g,h,j.
3. c adalah Z_2^4 yaitu 4 *cycle* dengan panjang 2, sama dengan *cycle index* pada f, i, k, l, m, n, o, dan p
4. q adalah $Z_1^2Z_3^2$ yaitu 2 *cycle* dengan panjang 1 dan 2 *cycle* dengan panjang 3, sama dengan *cycle index* pada r, s, t, u, v, w, x

Sehingga didapat *cycle index* dari oktahedron adalah

$$P_G(z_1, z_2, \dots, z_8) = \frac{1}{24}\left(z_1^8 + 6z_4^2 + 9z_2^4 + 8z_1^2z_3^2\right)$$

Berdasarkan Teorema 3.4.1., maka banyaknya pola warna yang berbeda adalah

$$N = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g\in G}|C|^{\ell_1(g)}|C|^{\ell_2(g)}\dots|C|^{\ell_n(g)}\right)$$

$$N = \frac{1}{|24|}\left(|C|^8 + 6|C|^2 + 9|C|^4 + 8|C|^4\right)$$

Maka untuk $1 \leq |C| \leq n,$ banyaknya pola warna yang mungkin terbentuk pada garis-garis oktahedron adalah sebagai berikut :

Tabel 7. Jumlah pola warna yang terbentuk pada bidang-bidang oktahedron

$\|C\|$	N
1	1
2	23
3	333

$\lvert C \rvert$	N
4	2.916
5	16.725
6	70.911
7	241.913
8	701.968
9	1.798.281
10	4.173.775
11	8.942.021
12	17.930.628