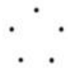
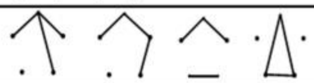
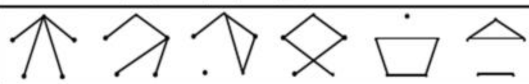
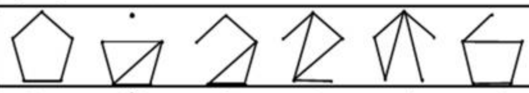
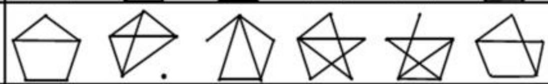
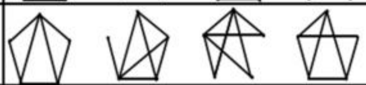
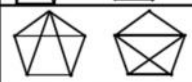
III. METODE PENELITIAN

3.1 Penelitian Relevan yang Telah Dilakukan

Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya antara lain :

a. Rosalianti, dkk (2013) mencari banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis yang dapat dibentuk dengan 5 titik menggunakan Teorema Polya I dan mendapatkan bentuk-bentuk graf sederhana dengan 5 titik yang tidak saling isomorfis menggunakan Teorema Polya II. Hasil yang diperoleh adalah banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis yang diperoleh adalah 34, dan diketahui bentuk-bentuk grafnya yaitu 1 graf tanpa garis, 1 graf dengan 1 garis, 2 graf dengan 2 garis, 4 graf dengan 3 garis, 6 graf dengan 4 garis, 6 graf dengan 5 garis, 6 graf dengan 6 garis, 4 graf dengan 7 garis, 2 graf dengan 8 garis, 1 graf dengan 9 garis, 1 graf dengan 10 garis.

Tabel 1. Graf yang Tidak Saling Isomorfis

	Gambar
1 graf tanpa garis	
1 graf dengan 1 garis	
2 graf dengan 2 garis	
4 graf dengan 3 garis	
6 graf dengan 4 garis	
6 graf dengan 5 garis	
6 graf dengan 6 garis	
4 graf dengan 7 garis	
2 graf dengan 8 garis	
1 graf dengan 9 garis	
1 graf dengan 10 garis	

b. Mulyono (2011) menghitung banyaknya digraf yang tidak isomorfik dengan Teorema Polya. Hasil yang diperoleh ada 3 digraf yang tidak isomorfik untuk 2 titik, ada 16 digraf yang tidak isomorfik untuk 3 titik, dan ada 218 digraf yang tidak isomorfik untuk 4 titik.

c. Mahmudah (2006) menghitung banyaknya pola molekul berbeda yang terbentuk dari penggabungan sejumlah atom yang membentuk tetrahedron dengan menggunakan Teorema Polya. Didapat 35 pola molekul yang berbeda dari 256 pola molekul yang mungkin terbentuk dari penggabungan atom C sebagai pusat dan atom atau molekul H, CH_3, Cl, dan C_2H_5 sebagai lengannya.

3.2. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2015-2016.

3.3. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menguraikan *Cycle Index Polynomial* Oktahedron.

   Pada bagian ini akan diuraikan mengenai *cycle index polynomial* oktahedron. Uraian ini akan digunakan untuk membahas Teorema Polya serta penerapannya.
2. Menghitung pola warna oktahedron dengan menggunakan Teorema Polya.

3.4. *Cycle Index Polynomial*

Beberapa definisi dan teorema yang didiskusikan pada subbab ini diambil dari Lal (2012).

Cycle Index Polynomial

Misalkan G grup aksi pada suatu himpunan X. Harus difahami dekomposisi *cycle* setiap $g \in G$ sebagai produk *disjoint cycle*. Redfield dan Polya meneliti bahwa elemen-elemen *G* dengan dekomposisi *cycle* yang sama memiliki kontribusi yang sama dengan himpunan titik-titik tetap.

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ disebut memiliki struktur *cycle* $1^{k_1} 2^{k_2} \ldots n^{k_n}$, jika representasi *cycle* σ memiliki *cycle* k_i dengan panjang *i*, untuk $1 \leq i \leq n$.

Contoh 3.4.1. Misalkan,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 6 & 7 & 10 & 14 & 1 & 2 & 13 & 15 & 4 & 11 & 5 & 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Maka dapat diverifikasi bahwa notasi *cycle* pada permutasi diatas adalah $\sigma = (1\ 3\ 7\ 2\ 6)\ (4\ 10)\ (5\ 14\ 12)\ (8\ 13)\ \ (9\ 15)\ \ (11)$.

Sehingga, struktur *cycle* σ adalah $1^1 2^3 3^1 5^1$.

Misalkan *G* suatu grup permutasi dengan simbol *n*. Untuk suatu $g \in G$ tetap, misalkan $\ell_k(g)$ menyatakan jumlah *cycle* dengan panjang *k*, $1 \leq k \leq n$, pada representasi *cycle g*. Maka jumlah *cycle index polynomial G*, sebagai suatu grup permutasi pada simbol *n*, adalah suatu polinomial dalam *n* variabel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ diberikan oleh $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g \in G} {z_1}^{\ell_1(g)} {z_2}^{\ell_2(g)} \ldots {z_n}^{\ell_n(g)}\right)$.

Catatan. Untuk setiap $g \in G$, kondisi bahwa *g* memiliki tepat $\ell_k(g)$ *cycle* dengan panjang *k*, $1 \leq k \leq n$, berakibat bahwa setiap suku ${z_1}^{\ell_1(g)} {z_2}^{\ell_2(g)} \ldots {z_n}^{\ell_n(g)}$ dalam penjumlahan memenuhi $1.\ell_1(g) + 2.\ell_2(g) + \cdots + n.\ell_n(g) = n$.

Contoh 3.4.2.

Misal *G* grup dihedral *D*4. Maka $e = (1)(2)(3)(4) \rightarrow z_1^4, r = (1234) \rightarrow z_4, r^3 = (1432) \rightarrow z_4, r^2 = (13)(24) \rightarrow z_2^2, f = (14)(23) \rightarrow z_2^2, rf = ((1)(3)(24) \rightarrow z_1^2 z_2, r^2 f = (12)(34) \rightarrow z_2^2, r^3 f = (13)(2)(4) \rightarrow z_1^2 z_2$.

Sehingga, $P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{8}(z_1^4 + 2z_4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2)$.

Aplikasi

Misalkan *S* adalah bentuk geometri dan *X* adalah himpunan titik-titik di *S*. Misalkan *C* himpunan berhingga (misalnya warna) dan Ω menyatakan himpunan semua fungsi $X \rightarrow C$. Maka elemen Ω memberikan pola warna pada obyek *S*. Misalkan *G* subgrup dari grup permutasi obyek *S*. Maka, *G* beraksi pada elemen *X*. Notasikan aksi ini dengan ⋆. Sehingga, $g \star x \in X$, untuk semua $x \in X$.

Dapat juga didefinisikan suatu aksi *G* pada Ω, dinotasikan ⊛, berdasarkan aturan berikut :

Tentukan suatu elemen $x \in X$. Kemudian, untuk setiap $\phi \in \Omega$ dan $g \in G$, $g \circledast \phi$ adalah suatu elemen Ω dan $g \circledast \phi$ memberikan seuatu fungsi dari X ke C, yang didefinisikan sebagai berikut :

$(g \circledast \phi)(x) = \phi(g^{-1} \star x)$, untuk semua $\phi \in \Omega$.

Klaim bahwa ⊛ mendefinisikan suatu grup aksi pada himpunan Ω. Bukti klaim : untuk setiap $h, g \in G$ dan $\phi \in \Omega$, definisi aksi pada *X* dan Ω dinyatakan dalam :

$$\begin{aligned}
\big(h \circledast (g \circledast \phi)\big)(x) &= (g \circledast \phi)(h^{-1} \star x) \\
&= \phi(g^{-1} \star (h^{-1} \star x)) \\
&= \phi(g^{-1}h^{-1} \star x) \\
&= \phi((hg)^{-1} \star x) \\
&= (hg \circledast \phi)(x)
\end{aligned}$$

Karena, $\big(h \circledast (g \circledast \phi)\big)(x) = (hg \circledast \phi)(x)$, untuk semua $x \in X$, $h \circledast (g \circledast \phi) = hg \circledast \phi$, untuk setiap $h, g \in G$ dan $\phi \in \Omega$. Sehingga pembuktian klaim lengkap.

Teorema 3.4.1. *Misalkan S adalah bentuk geometri dan X adalah himpunan titik-titik di S, dan misalkan C himpunan berhingga (misalnya warna). Ω menyatakan himpunan semua fungsi $X \rightarrow C$. Misalkan G subgrup dari grup permutasi S. Maka banyaknya pola warna yang berbeda (elemen Ω yang berbeda), berbeda sesuai dengan aksi G yaitu* $\boldsymbol{P_G}(|\boldsymbol{C}|, |\boldsymbol{C}|, \dots, |\boldsymbol{C}|)$**.**

Bukti

Misalkan $|X| = n$, maka G adalah suatu subgrup S_n. Jadi, setiap $g \in G$ dapat ditulis sebagai produk *disjoint cycle*. Juga, berdasarkan Burnside's Lemma, *N* banyaknya pola warna yang berbeda (orbit yang berbeda dibawah aksi *G*), sama dengan $\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|F_G|$, dimana $F_G = \{\phi \in \Omega : (g \circledast \phi)(x) = \phi(x) untuk\ semua\ x \in X\}$.

Kita klaim bahwa $g \in G$ menentukan pola warna (suatu elemen di Ω) jika dan hanya jika ϕ mewarnai elemen pada *cycle* yang diberikan *g* dengan warna yang sama.

Bukti Klaim : Anggap bahwa $g \circledast \phi = \phi$, yaitu ($g \circledast \phi)(x) = \phi(x)$, untuk semua $x \in X$. Jadi, menggunakan definisi, diperoleh $\phi(g^{-1} \star x) = \phi(x)$, untuk semua $x \in X$. Secara khusus, untuk suatu $x_0 \in X$ tetap, juga berlaku

$$\phi(x_0) = \phi(g \star x_0) = \phi(g^2 \star x_0) = \cdots = \phi(g^n \star x_0)$$

Ingat bahwa, untuk setiap $x_0 \in X$ dan $g \in G$, permutasi $(x_0, g \star x_0, g^2 \star x_0, \dots, g^n \star x_0)$ berhubungan dengan suatu *cycle g*. Untuk itu, jika *g* menentukan pola warna ϕ, $g \circledast \phi = \phi$, maka ϕ menentukan warna yang sama untuk setiap elemen sembarang *cycle g*.

Tentukan sebuah elemen $g \in G$ dan misalkan ϕ suatu pola warna (suatu fungsi) yang mempunyai sifat bahwa setiap titik pada suatu *cycle g* diwarnai dengan warna yang sama. Yaitu, $\phi(x) = \phi(g^{-1} \star x) = (g \circledast \phi)(x)$, untuk semua $x \in X$. Berdasarkan definisi, $g \circledast \phi = \phi$. Sehingga, *g* menentukan pola warna ϕ.

Untuk itu, selidiki bahwa untuk suatu $g \in G$ yang ditentukan, suatu *cycle g* dapat memberikan sebuah warna bebas dari *cycle g* yang lain. Juga, banyaknya warna yang berbeda sama dengan $|C|$. Jadi, untuk suatu $g \in G$ tetap, $F_g = |C|^{\ell_1 g} . |C|^{\ell_2 g} \dots |C|^{\ell_n g}$, dimana untuk setiap *k*, $1 \le k \le n, \ell_k(g)$ menyatakan banyaknya *cycle g* dengan panjang *k*. Sehingga,

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |C|^{\ell_1 g} . |C|^{\ell_2 g} \dots |C|^{\ell_n g} = \boldsymbol{P_G}(|\boldsymbol{C}|, |\boldsymbol{C}|, \dots, |\boldsymbol{C}|). \qquad \blacksquare$$

3.5. Teorema Polya

Dengan menggunakan Teorema Polya memungkinkan untuk menghitung banyaknya kalung yang berbeda bahkan jika tidak diketahui banyaknya manik-manik untuk setiap warna. Untuk melakukannya, setiap elemen *C* menyimbolkan bobot, yang merubah bobot itu menjadi pola masing-masing warna. Bobot ini dapat berupa angka, variabel atau secara umum, suatu elemen ring komutatif dengan identitas.

Teorema Polya I. (Rosalianti,dkk, 2013). *Diberikan himpunan tak kosong* $\Omega = \{f \setminus f: X \to C\}$ *dengan* $|X| = n \geq 2$ *dan* $|C| = r$. *Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan cycle index* $Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$, *maka banyaknya pola berbeda di C terhadap G adalah* $Z(G; r, r, \dots, r)$.

Bukti

Jika *g cycle* suatu grup permutasi, $g \in G$, maka didalam g terdapat *cycle-cycle* dengan pola yang sama misalkan *f*, dimana $f \in F_x(g)$ dengan $F_x(g)$ adalah himpunan *cycle* yang polanya tetap. Jika dan hanya jika *f* tetap oleh tiap-tiap *cycle* *g*, dan jika g permutasi bertipe $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ maka banyaknya *dijoint cycle* di *g* adalah $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Misalkan $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r$, maka banyaknya permutasi yang tetap oleh g adalah $x_1{}^{a_1} x_2{}^{a_2} \dots x_n{}^{a_n} = r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n} = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. Jadi didapat $|F_x(g)| = r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ dengan $[a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$ adalah tipe permutasi *g*.

Berdasarkan *Cauchy-Frobenius-Burnside's Lemma*, banyaknya orbit yang berbeda adalah :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_x(g)|$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; r, r, \dots, r)$$

$$= Z(G; r, r, \dots, r). \qquad \blacksquare$$

Teorema Polya II. (Rosalianti,dkk, 2013). *Misal* $\Omega = \{f \setminus f: X \to C\}$, *jika disubstitusikan* $x_1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_r$ *dan* $x_2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_r}^2$ *dan* $x_3 = {c_1}^3 + {c_2}^3 + \cdots + {c_r}^3$ *dan seterusnya di* $Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$ *maka dengan menguraikan cycle index polynomial tersebut akan didapat jumlahan bentuk* $n_{i_1 \dots i_r} {c_1}^{i_1} {c_2}^{i_2} \dots {c_r}^{i_r}$ *dengan* $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = n$, *yang berarti terdapat dengan tepat* $n_{i_1 \dots i_r}$ *pola* ${c_1}^{i_1} {c_2}^{i_2} \dots {c_r}^{i_r}$ *di* Ω, *dengan* $|\Omega| = r^n$, *dibawah aksi G, dimana pola* ${c_1}^{i_1} {c_2}^{i_2} \dots {c_r}^{i_r}$ *berarti pola tersebut memuat* c_1 *sebanyak* i_1, c_2 *sebanyak* i_2,.... *dengan kata lain fungsi pembangun pola di* Ω *adalah* $\phi(c_1, c_2, \dots, c_r) = Z(G; [c_1, c_2, \dots, c_r])$. *Dengan* $[c_1, c_2, \dots, c_r] = (c_1 + c_2 + \cdots + c_r, {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_r}^2, \dots, {c_1}^n + {c_2}^n + \cdots + {c_r}^n)$.

Bukti

Jika $|C| = r > 2$ dengan $c = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ maka didapat $\phi(c_1, c_2, \dots, c_r) = \sum n_{i_1 \dots i_r} {c_1}^{i_1} {c_2}^{i_2} \dots {c_r}^{i_r}$ dengan $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = r$.

Untuk setiap $\phi \in \Omega$, didefinisikan $\Omega(\phi) = {c_1}^{i_1} {c_2}^{i_2} \dots {c_r}^{i_r}$ menyatakan f adalah pola yang memuat c_1 sebanyak i_1, memuat c_2 sebanyak i_2, dan seterusnya. Jika $\Delta \in O_r$ maka $\Omega(\Delta) = \Omega(\phi)$. Jadi jika $\Delta, \phi \in \Omega$ dalam satu orbit maka $\Omega(\Delta) = \Omega(\phi)$. Oleh karena itu untuk $\phi \in \Omega/\mathrm{G}$ dengan Ω/G adalah himpunan orbit-orbit berbeda yang ada di Ω dibawah *G*, dapat dituliskan $\Omega(\phi)$ untuk menyatakan pola elemen-elemen ϕ.

Selanjutnya akan dibuktikan menggunakan langkah-langkah seperti dalam pembuktian *Cauchy-Frobenius-Burnside's Lemma* maka didapat

$$\sum_{\phi \in \Omega} \sum_{g \in G} [g\phi = \phi]\, \Omega(\phi) = \sum_{g \in G} \sum_{\phi \in \Omega} [g\phi = \phi] \Omega(\phi) \qquad \text{...(i)}$$

Dari persamaan sebelah kiri didapat

$$\sum_{\phi\in\Omega}\sum_{g\in G}[g\phi=\phi]\,\Omega(\phi)=\sum_{\phi\in\Omega}\Omega(\phi)\sum_{g\in G}[g\phi=\phi]=\sum_{\phi\in\Omega}\Omega(\phi)\left|G_\phi\right|$$

Selanjutnya akan dijumlahkan atas orbit yang lain, karena $|\Omega(\phi)|$ dan $|G_r|$ hanya bergantung pada orbit maka

$$\sum_{\phi\in\Omega}\Omega(\phi)\left|G_\phi\right|=\Omega(\phi_{1_1})\left|G_{\phi_{1_1}}\right|+\Omega(\phi_{1_2})\left|G_{\phi_{1_2}}\right|+\cdots+\Omega(\phi_{2_1})\left|G_{\phi_{2_1}}\right|+$$
$$\Omega(\phi_{2_2})\left|G_{\phi_{2_2}}\right|+\cdots \qquad \text{...(ii)}$$

Karena $\phi_{1_1},\phi_{1_2},\ldots$ terletak dalam satu orbit maka $\Omega\left(\phi_{i_j}\right)=\Omega(\phi_i)$, sehingga Persamaan (ii) dapat ditulis menjadi

$$\Omega(\phi_1)\left\{\left|G_{\phi_{1_1}}\right|+\left|G_{\phi_{1_2}}\right|+\cdots\right\}+\Omega\left(\phi_2\left\{\left|G_{\phi_{2_1}}\right|+\left|G_{\phi_{2_2}}\right|+\cdots\right\}+\cdots\right)=$$
$$\sum_{\phi\in\Omega/G}\Omega(\phi)\sum_{\phi\in\phi}\left|G_\phi\right|=\sum_{\phi\in\Omega/G}\Omega(\phi)|G|=|G|\sum_{\phi\in\Omega/G}\Omega(\phi).$$

Karena $\Omega(\phi)=c_1{}^{i_1}c_2{}^{i_2}\ldots c_r{}^{i_r}$ maka $\sum_{\phi\in\Omega/G}\Omega(\phi)$ merupakan fungsi pembangun konfigurasi di Ω, adapun koefisien $c_1{}^{i_1}c_2{}^{i_2}\ldots c_r{}^{i_r}$ akan sama dengan banyaknya orbit yang berlaku di $\Omega(\phi)=c_1{}^{i_1}c_2{}^{i_2}\ldots c_r{}^{i_r}$. Jadi didapat

$$|G|\sum_{\phi\in\Omega/G}\Omega(\phi)=|G|\phi(c_1,c_2,\ldots,c_r). \qquad \text{...(iii)}$$

Sedangkan dari pernyataan sebelah kiri Persamaan (i) didapat

$$\sum_{g\square G}\sum_{\phi\in\Omega}[g\phi=\phi]\Omega(\phi)=\sum_{g\square G}\sum_{\phi\in F(g)}\Omega(\phi)$$

Karena $\left|F_{(g)}\right|=\sum_{\phi\in F(g)}1$ dapat dihitung melalui *disjoint cycle g* yaitu $\left|F_{(g)}\right|=r^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=z(g;r,r,\ldots,r)$ dengan $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ adalah tipe permutasi *g* maka $\sum_{\phi\in F(g)}\Omega(\phi)$ juga dapat dituliskan dengan notasi *cycle index polynomial*.

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa untuk setiap *cycle* dengan panjang *k* didapatkan faktor ${c_1}^k + {c_2}^k + \cdots + {c_r}^k$ di $\sum_{\phi\in \mathrm{F(g)}} \Omega(\phi)$.

Jadi

$$\sum_{\phi\in \mathrm{F(g)}} \Omega(\phi) = z(g; c_1 + c_2 + \cdots + c_r, {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_r}^2, \dots, {c_1}^k + {c_2}^k + \cdots + {c_r}^k, \dots, {c_1}^n + {c_2}^n + \cdots + {c_r}^n) \quad \text{...(iv)}$$

Untuk selanjutnya notasi $z(g; c_1 + c_2 + \cdots + c_r, {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_r}^2, \dots, {c_1}^k + {c_2}^k + \cdots + {c_r}^k, \dots, {c_1}^n + {c_2}^n + \cdots + {c_r}^n)$ cukup ditulis dengan $z(g; [c_1 + c_2 + \cdots + c_r])$.

Jika Persamaan (iii) dan (iv) disubstitusikan ke Persamaan (i) akan didapat

$$|G|\phi(c_1, c_2, \dots, c_r) = \sum_{g\in G} \sum_{\phi\in \mathrm{F(g)}} \Omega(\phi) = \sum_{g\in G} z(g; [c_1 + c_2 + \cdots + c_r])$$

$$\phi(c_1, c_2, \dots, c_r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} z(g; [c_1 + c_2 + \cdots + c_r])$$

$$\phi(c_1, c_2, \dots, c_r) = Z(G; [c_1 + c_2 + \cdots + c_r]).$$

Jadi jika disubstitusikan $x_1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_r$ dan $x_2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_r}^2$ dan $x_3 = {c_1}^3 + {c_2}^3 + \cdots + {c_r}^3$ dan seterusnya, akan didapatkan jenis dari pola-pola yang berbeda di Ω.

■