II. KONSEP DASAR GRUP

Suatu cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar dinamakan aljabar abstrak (*abstract algebra*). Sistem aljabar (*algebraic system*) terdiri dari suatu himpunan obyek, satu atau lebih operasi pada himpunan bersama dengan hukum tertentu yang dipenuhi oleh operasi. Salah satu alasan yang paling penting untuk mempelajari sistem tersebut adalah untuk menyatukan sifat-sifat pada topik-topik yang berbeda dalam matematika (Setiawan, 2011).

2.1. Grup dan Subgrup

Suatu himpunan tak kosong G bersama-sama dengan hukum komposisi atau operasi biner * $(a, b) \rightarrow a * b$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut merupakan Grup $(G,*)$:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$.
2. Ada $e \in G$, sedemikian sehingga $e * g = g = g * e$ untuk semua $g \in G$.
3. Untuk setiap $g \in G$ ada g^{-1} yang memenuhi $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$.

Jika $a * b = b * a$, untuk semua $a, b \in G$, maka grup G disebut grup Abelian atau komutatif (Judson, 2014).

Sifat-sifat grup :

1. Unsur identitas grup G tunggal, sehingga hanya terdapat satu unsur $e \in G$ sedemikian sehingga $eg = ge = g$ untuk semua $g \in G$.

   Bukti

   Misalkan e dan e' unsur identitas G.

   Maka $eg = ge = g$ untuk semua $g \in G$ dan $e'g = ge' = g$ untuk semua $g \in G$. Akan ditunjukkan bahwa $e = e'$. Misalkan e adalah unsur identitas, maka $ee' = e'$, tapi jika e' adalah unsur identitas maka $ee' = e$. Dari kedua persamaan tersebut didapatkan $e = ee' = e'$. ■

2. Jika g adalah sembarang elemen grup G, maka invers g yaitu g^{-1} adalah tunggal.

   Bukti

   Jika g' dan $g"$ keduanya adalah invers $g \in G$, maka $gg' = g'g = e$ dan $gg''=g''g = e$.

   Akan ditunjukkan bahwa $g' = g"$.

   $g' = g'e$

   $g' = g'(gg")$

   $g' = (g'g)g"$

   $g' = eg"$

   $g' = g"$ ■

3. G adalah suatu grup. Jika $a, b \in G$, maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Bukti

Misalkan $a, b \in G$ maka $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$. Begitu juga dengan $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$. Berdasarkan sifat sebelumnya, yaitu invers adalah tunggal, maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

■

4. *G* adalah suatu grup. Untuk sembarang $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$.

Bukti

Karena $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$, maka :

$(a^{-1})^{-1} = e(a^{-1})^{-1}$

$(a^{-1})^{-1} = aa^{-1}(a^{-1})^{-1}$

$(a^{-1})^{-1} = ae$

$(a^{-1})^{-1} = a$ ■

5. G adalah suatu grup dan $a, b, c \in G$, maka $ba = ca$ berakibat $b = c$ dan $ab = ac$ berakibat $b = c$. Hal ini disebut dengan hukum pencoretan.

Bukti

$ba = ca$

$baa^{-1} = caa^{-1}$

$be = ce$

$b = c$

Dengan cara yang sama

$ab = ac$

$a^{-1}ab = a^{-1}ac$

$eb = ec$

$b = c$ ■

Contoh 2.1.

1. Himpunan bilangan rasional merupakan grup terhadap operasi +. Sistem ini dilambangkan dengan $\langle Q, + \rangle$ dengan $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z \ dan \ b \neq 0 \right\}$. Operasi penjumlahan didefinisikan dengan aturan $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad+bc)}{bd}$ akan dibuktikan bahwa *Q* grup berdasarkan sifat-sifat bilangan bulat.

   Sifat tertutup. Misalkan $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$. Berdasarkan definisi operasi penjumlahan pada bilangan rasional didapat $\frac{(ad+bc)}{bd}$. Karena operasi perkalian dan penjumlahan dalam bilangan bulat bersifat tertutup maka pembilang dan penyebutnya merupakan bilangan bulat. Karena *b* dan *d* tidak nol maka *bd* juga tidak nol. Berarti penjumlahan bilangan rasional bersifat tertutup. *Sifat assosiatif*. Misalkan $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \ dan \ \frac{e}{f} \in Q$. Akan ditunjukkan bahwa sifat assosiatif berlaku.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{(ad + bc)}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{[(ad + bc)f + (bd)e}{(bd)f}$$

$$= \frac{[(ad)f + (bc)f + (bd)e]}{(bd)f)} = \frac{[a(df) + b(cf) + b(de)]}{b(df)}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

   Berarti sifat assosiatif berlaku.

   Sifat identitas. Elemen $\frac{0}{1}$ merupakan identitas karena $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{(0.b+1.a)}{1.b} = \frac{(0+a)}{b} = \frac{a}{b}$. Pada sisi lain, $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{(a.1+0.b)}{b.1} = \frac{(a+0)}{b} = \frac{a}{b}$.

Sifat invers. Untuk sembarang anggota $\frac{a}{b} \in Q$ akan ditunjukkan bahwa $\frac{(-a)}{b}$ merupakan inversnya. Jelas bahwa $\frac{(-a)}{b} \in Q$. Anggota $\frac{(-a)}{b}$ merupakan invers $\frac{a}{b}$ karena $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = \frac{ab+(-ab)}{bb} = \frac{(a+(-a)).b}{bb} = \frac{0.b}{bb} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$.

Terbukti *Q* grup.

2. Himpunan bilangan bulat positif dengan operasi penjumlahan bukan merupakan grup karena pada himpunan bilangan bulat positif tidak terdapat elemen identitas, $0 \notin Z^+$ dan $\forall a \in Z^+, (-a) \notin Z^+$, sehingga untuk setiap $a \in Z^+$ tidak memiliki invers di Z^+.

Subgrup

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. Maka *H* himpunan bagian tak kosong *G* adalah subgrup *G*, jika *H* itu sendiri membentuk suatu grup dengan operasi biner ⋆ (Lal, 2012).

Contoh 2.2.

Misalkan *G* suatu grup dengan elemen identitas *e*. Maka *G* dan $\{e\}$ adalah grup dan karenanya *G* dan $\{e\}$ adalah subgrup *G*. Kedua subgrup ini disebut subgrup trivial.

Teorema 2.1. (Tes Subgrup) (Lal, 2012). *Misalkan G suatu grup dan misalkan H himpunan bagian tak kosong G. Maka H adalah suatu subgrup G jika untuk setiap* $a, b \in H, ab^{-1} \in H$.

Bukti

Karena H tak kosong, maka dapat dicari suatu $x \in H$. Sehingga untuk $a = x$ dan $b = x$, kondisi ab^{-1} berakibat $e = aa^{-1} \in H$. Sehingga, H memiliki elemen identitas *G*. Karenanya, untuk setiap $h \in H \subset G, eh = h = he$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $h \in H, h^{-1} \in H$. Untuk menunjukkannya, misalkan $a = e$ dan $b = h$, maka $ab^{-1} = eh^{-1} \in H = h^{-1} \in H$. (untuk setiap elemen *H* memiliki invers di *H*)

Langkah berikutnya yaitu akan ditunjukkan bahwa *H* juga tertutup pada operasi biner G. Jadi, misalkan $x, y \in H$. Maka berdasarkan langkah sebelumnya terdapat $y^{-1} \in H$. Sehingga, untuk $a = x\ dan\ b = y^{-1}$ kondisi $ab^{-1} = x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Karenanya *H* juga tertutup seperti juga pada operasi biner *G*.

Kemudian karena H himpunan bagian *G*, maka sifat asosiatif *G* juga berlaku di *H*.■

Contoh 2.3.

Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}, H = \{1, -1\}$ dengan $i^2 = -1$ maka $(G,\cdot)$ adalah grup terhadap perkalian bilangan kompleks dan $(H,\cdot)$ adalah subgrup *G*.

2.2. Jenis-Jenis Grup

a) Grup Siklik

Grup *G* disebut siklik jika ada $g \in G$ sehingga $G = \{g^n \setminus n \in Z\}$. Elemen *g* disebut generator dari grup siklik. Grup siklik dengan generator *g* dinotasikan dengan $\langle g \rangle$, dan g^n tergantung dari operasi pada grup *G* tersebut (Gozali, 2010).

Contoh 2.4.

Pada Contoh 2.3. grup G dapat dinyatakan dengan $G = \{i, i^2 = 1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$ sehingga G merupakan grup siklik yang dibangun oleh i. Grup G dapat ditulis dengan $G = \langle i \rangle$.

b) Grup Simetris

Teorema 2.2. (Lal, 2012). *Misalkan X suatu himpunan beranggotakan sebanyak n maka banyaknya permutasi dari himpunan X adalah n!.*

Bukti

Dengan induksi matematika.

Misal k menyatakan banyaknya anggota himpunan X, untuk $k = 1$ maka banyaknya permutasi pada X adalah 1 (benar).

Misal teorema tersebut benar untuk $k = n - 1$, maka banyaknya permutasi pada X adalah $(n-1)!$.

Akan ditunjukkan teorema tersebut juga benar untuk $k = n$.

Banyaknya permutasi untuk $k = n - 1$ adalah $(n-1)!$.

Jika ditambahkan 1 elemen lagi maka elemen baru tersebut dapat menempati sebanyak n posisi sehingga banyaknya permutasi pada$X$ dengan $|X| = n$ adalah $(n-1)!\, n = n!$.

Misalkan $\sigma \in S_n$ dan misalkan $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ berbeda. Jika σ memenuhi $\sigma(i_\ell) = i_{\ell+1}$, untuk semua $\ell = 1,2,\dots,k-1$, $\sigma(i_k) = i_1$ dan $\sigma(r) = r$

untuk $r \notin S$. Maka σ disebut *k-cycle* dan dinotasikan $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ atau $(i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$ dan seterusnya. ■

Contoh 2.5.

Misal $X = \{1,2,3,4\}$ dan $f: X \to X$ dengan $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 3$, maka $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Contoh 2.6.

Pada Contoh 2.5. dapat dilihat bahwa $\sigma(1) = 2$ dan $\sigma(2) = 1$ atau $(1 \to 2 \to 1)$ yang dapat ditulis $(1\ 2)$ dan $\sigma(3) = 4$ dan $\sigma(4) = 3$ atau $(3 \to 4 \to 3)$ yang dapat ditulis $(3\ 4)$ sehingga permutasi σ dapat ditulis dengan notasi $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$.

Dua cycle $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_t)$ dan $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_s)$ disebut saling lepas jika $\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_s\} = \emptyset$ (Judson, 2014).

Teorema 2.3. (Judson, 2014). *Setiap permutasi pada S_n dapat ditulis sebagai produk disjoint cycle.*

Bukti

Asumsikan bahwa $X = \{1,2, \dots, n\}$. Misalkan $\sigma \in S_n$, dan definisikan $X_1 = \{\sigma(1), \sigma_2(1), \dots\}$. Himpunan X_1 terhingga karena *X* terhingga. Sekarang misalkan *i* adalah bilangan bulat pertama pada *X* tidak pada X_1 dan definisikan X_2 dengan $\{\sigma(i), \sigma_2(i), \dots\}$. Maka X_2 juga himpunan terhingga. Dengan meneruskan pola ini, dapat didefinisikan himpunan disjoint terhingga X_3, X_4, ... Karena *X* suatu himpunan terhingga, dapat dijamin bahwa proses ini akan berhenti dan hanya akan ada suatu bilangan terhingga dari himpunan-himpunan ini, disebut dengan *r*.

Jika $\sigma(i)$ adalah *cycle* yang didefinisikan oleh

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & x \in X_i \\ x & x \notin X_i \end{cases}$$

Maka $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$. Karena himpunan-himpunan X_1, X_2, ..., X_r disjoint, maka *cycle*-*cycle* $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$ juga pasti disjoint. ■

Permutasi paling sederhana adalah suatu *cycle* dengan panjang 2. Cycle seperti ini disebut dengan transposisi.

Karena $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$, sembarang *cycle* dapat ditulis sebagai produk transposisi atau komposisi transposisi (Judson, 2014).

Proposisi 1. (Judson, 2014). *Sembarang permutasi suatu himpunan berhingga yang terdiri dari setidaknya dua elemen dapat ditulis sebagai produk transposisi atau komposisi transposisi.*

Contoh 2.7.

Jika *cycle* $h = (1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ maka *cycle* *h* dapat dinyatakan dengan $h = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 5)$.

Jika *cycle* $k = (1\ 4\ 6\ 3)$ maka *cycle* *k* dapat dinyatakan dengan $k = (1\ 3)(1\ 6)(1\ 4)$.

Dari Contoh 2.7. dapat dilihat bahwa suatu *cycle* dengan panjang *r* dapat dinyatakan dengan komposisi dari $r - 1$ transposisi. Jadi, jika *r* bilangan genap maka *cycle* tersebut dapat dinyatakan sebagai komposisi sejumlah transposisi yang banyaknya ganjil, sedangkan jika *r* ganjil maka *cycle* tersebut dapat dinyatakan sebagai komposisi sejumlah transposisi yang banyaknya genap.

Grup simetris pada n huruf. Misalkan $N = \{1,2, \dots, n\}$. Fungsi $f: N \to N$ disebut permutasi pada n elemen, jika f adalah fungsi bijektif. Misalkan $S_n = \{f: N \to N \backslash f \; fungsi\; bijektif\}$, dengan kata lain S_n merupakan himpunan semua permutasi himpunan $\{1,2, \dots, n\}$. Maka hal-hal berikut ini berlaku :

1. Misalkan $f, g \in S_n$. Maka $f: N \to N$ dan $g: N \to N$ adalah dua fungsi bijektif, oleh karena itu salah satu fungsi digunakan sebagai komposisi fungsi untuk mendefinisikan fungsi komposisi $f \circ g: N \to N$ dengan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Maka $f \circ g$ juga bijektif. Karenanya, $f \circ g \in S_n$. Dengan kata lain, fungsi komposisi dinotasikan dengan $\circ$, mendefinisikan operasi biner pada S_n.
2. Fungsi komposisi merupakan operasi yang asosiatif, sehingga $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
3. Fungsi $e: N \to N$ didefinisikan oleh $e(i) = i$ untuk semua $i = 1,2, \dots, n$ adalah fungsi identitas, yaitu, $f \circ e = f = e \circ f$, untuk semua $f \in S_n$.
4. Misalkan $f \in S_n$. Sebagaimana $f: N \to N$ adalah fungsi bijektif, $f^{-1}: N \to N$ didefinisikan oleh $f^{-1}(i) = j$ ketika $f(j) = i$ untuk semua $i = 1,2, \dots, n$ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik dan juga bijektif, yaitu, untuk setiap $f \in S_n$, $f^{-1} \in S_n$ dan $f \circ f^{-1} = e = f^{-1} \circ f$.

Dengan demikian S_n adalah suatu grup. Grup ini disebut grup permutasi atau grup simetri. Jika $\sigma \in S_n$, maka penulisannya adalah $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Penulisan seperti ini disebut notasi dua baris. Dapat dilihat bahwa σ adalah fungsi bijektif dari N ke N, σ adalah pemetaan identitas yang memetakan 1 ke $\sigma(1)$, 2 ke $\sigma(2)$, ..., n ke $\sigma(n)$. Sehingga $N = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$. Oleh karena itu, terdapat *n* pilihan untuk $\sigma(1)$, $n-1$ pilihan untuk $\sigma(2)$ (semua elemen *N* kecuali $\sigma(1)$) dan seterusnya. Dengan demikian, jumlah elemen S_n adalah $n! = n(n-1)\dots 2.1$ (Lal, 2012).

Contoh 2.8.

Misal $X = \{1,2,3\}$ maka $|S_3| = 3! = 6$

Grup simetri *X* adalah $S_3 = \{a,b,c,d,e,f\}$ dengan

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ atau ( )

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ atau $(1)(2\ 3)$

$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ atau $(1\ 2)(3)$

$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ atau $(1\ 2\ 3)$

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ atau $(1\ 3\ 2)$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ atau $(1\ 3)(2)$

Beberapa konsep dasar mengenai Teorema Langrange berikut diambil dari (Mahmudah, 2006).

Misalkan *G* grup dan *H* subgrup *G*, untuk sembarang *a* tetap di *G*, $Ha = \{ha \backslash h \in H\}$ disebut koset kanan dari *H* yang ditentukan oleh *a* dan untuk sembarang *a* tetap di *G*, $aH = \{ah \backslash h \in H\}$ disebut koset kiri dari *H* yang ditentukan oleh a.

Jika *H* subgrup *G* maka banyaknya semua koset kanan *H* di *G* disebut dengan indeks *H* di *G* dan dinotasikan dengan $|G:H|$.

Contoh 2.9.

Misal $G = S_3 = \{a,b,c,d,e,f\}$ seperti yang telah diuraikan pada Contoh 2.8. jika $H = \{a,d,e\} < G$ maka

$aH = \{a,d,e\} = H$; $bH = \{b,f,c\} = H'$

$cH = \{c, b, f\} = H'$; $\qquad dH = \{d, e, a\} = H$

$eH = \{e, a, d\} = H$; $\qquad fH = \{f, c, b\} = H'$

Karena ada dua koset kiri *H* di G yaitu $H = \{a, d, e\}$ dan $H' = \{b, f, c\}$ maka $|G: H| = 2$. Dapat dilihat bahwa $H \cap H' = \emptyset$ dan $H \cup H' = G$. Misal aH dan bH adalah koset-koset dari *H*, jika $aH \neq bH$ maka $aH \cap bH = \emptyset$. Jika $aH \cap bH \neq \emptyset$ maka $aH = bH$.

Lemma 2.1. (Wilkins, 2007). *Misalkan H subgrup G. Maka koset kiri H di G memiliki sifat-sifat berikut :*

1. $a \in aH$, untuk semua $a \in G$;
2. Jika a dan b elemen *G*, dan jika $b = ax$ untuk beberapa $x \in H$, maka $aH = bH$;
3. Jika *a* dan *b* elemen G, dan jika $aH \cap bH \neq \emptyset$, maka $aH = bH$.

Bukti

1. Misalkan $a \in G$. Maka $a = ae$, dimana *e* adalah elemen identitas *G*. Tapi, $e \in H$. Maka $a \in aH$.
2. Misalkan a dan b elemen G, dimana $b = ax$ untuk beberapa $x \in H$, maka $bh = a(xh)$ dan $ah = b(x^{-1}h)$ untuk semua $h \in H$. Karena H subgrup G, maka $xh \in H$ dan $x^{-1}h \in H$ untuk semua $h \in H$. Sehingga $bH \subset aH$ dan $aH \subset bH$, oleh karena itu $aH = bH$.
3. Misalkan $aH \cap bH \neq \emptyset$, $c \in aH \cap bH$, maka $c = ax$ untuk beberapa $x \in H$, dan $c = by$ untuk beberapa $y \in H$. Berdasarkan sifat 2, yaitu $cH = aH$ dan $cH = bH$. Sehingga $aH = bH$. ■

Lemma 2.2. (Wilkins, 2007). *Misalkan H subgrup terhingga G. Maka setiap koset kiri H di G memiliki jumlah elemen yang sama dengan H.*

Bukti

Misalkan $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, dimana $h_1, h_2, \dots, h_n$ berbeda, dan misalkan $a \in G$. Maka koset kiri *aH* terdiri dari elemen-elemen xh_j untuk $j = 1,2, \dots, m$. Anggap bahwa j dan k bilangan bulat antara *1* dan m dimana $ah_j = ah_k$. Maka $h_j = a^{-1}(ah_j) = a^{-1}(ah_k) = h_k$, sehingga $j = k$, karena $h_1, h_2, \dots, h_n$ berbeda, maka $ah_1, ah_2, \dots, ah_m$ berbeda. Dapat disimpulkan bahwa subgrup *H* dan koset kiri *aH* keduanya memiliki *m* elemen, seperti yang dipersyaratkan. ■

Beberapa definisi, teorema dan proposisi berikut diambil dari Lal (2012).

Order *G* adalah jumlah elemen di *G*, dinotasikan dengan $|G|$. Jika $|G| < \infty$, maka *g* disebut suatu grup order terhingga.

Misalkan *G* suatu grup dan $g \in G$. Maka order suatu elemen adalah bilangan bulat positif terkecil *m* sedemikian sehingga $g^m = e$. Order suatu elemen dinotasikan dengan $O(g)$.

Contoh 2.10.

Dari Contoh 2.3. dapat dilihat bahwa $|G| = 4, |H| = 2$, dan order setiap elemen *G* adalah $|1| = 1, |-1| = 2, |i| = 4, |-i| = 4$.

Teorema 2.4. Teorema Langrange. Lal (2012). *Jika G berhingga dan H subgrup G, maka* $|H|$ *membagi* $|G|$. *Selanjutnya, jumlah koset H yang berbeda di G sama dengan* $\frac{|G|}{|H|}$.

Bukti

Karena G grup terhingga, jumlah koset kiri H di G terhingga. Misalkan $g_1H, g_2H, \dots, g_mH$ kumpulan semua koset kiri *H* di *G*. Maka berdasarkan Lemma 1, dua koset itu adalah sama atau disjoint, yaitu *G* adalah suatu gabungan disjoint koset-koset $g_1H, g_2H, \dots, g_mH$.

Juga dapat diverifikasi bahwa $|aH| = |bH|$, untuk setiap $a, b \in G$. Oleh karena itu, $|g_iH| = |H|$, untuk semua $i = 1,2, \dots, m$. Sehingga, $|G| = |\bigcup_{i=1}^{m} g_iH| = \sum_{i=1}^{m} |g_iH| = m|H|$. Sehingga, $|H|$ membagi $|G|$ dan jumlah koset kiri sama dengan $m = \frac{|G|}{|H|}$.

■

Catatan 1. Lal (2012). *Nilai* m *pada teorema 4 disebut index H di G, dan dinotasikan dengan* $[G: H]$ *atau* $i_G(H)$.

Proposisi 2. Lal (2012). *Misalkan G suatu grup berhingga dan* $g \in G$, *maka* $O(g)$ *membagi* $|G|$.

Catatan 2. Lal (2012). *Proposisi 1 berakibat bahwa jika G suatu grup berhingga order n maka order yang mungkin dari elemen-elemennya adalah pembagi n.*

Contoh 2.11.

Jika $|G| = 30$, maka untuk setiap $g \in G$, $O(g) \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.

Misalkan G grup berhingga, maka berdasarkan proposisi 3, akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang $g \in G, O(g)$ membagi $|G|$. Maka, $|G| = m.O(g)$, untuk beberapa bilangan bulat positif m. Sehingga $g|G| = gm.O(g) = \big(gO(g)\big)m = em = e$.

Berikut ini akan diberikan definisi tentang grup aksi yang diberikan oleh Lal (2012).

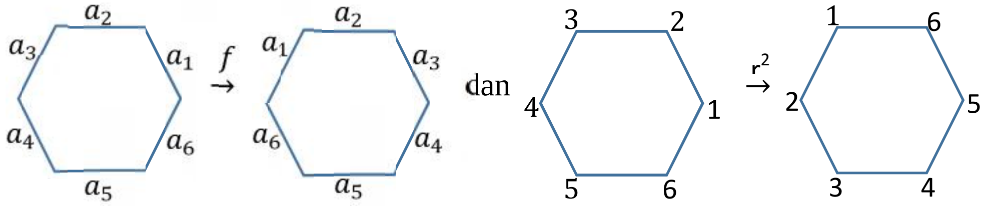
c) Grup aksi

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup dengan identitas e. Maka G disebut aksi pada suatu himpunan X, jika terdapat operator $\star: G \times X \to X$ memenuhi kondisi berikut :

1. $e \star x = x$, untuk semua $x \in X$ dan
2. $g \star (h \star x) = (g \cdot h) \star x$ untuk semua $x \in X$ dan $g, h \in G$.

Contoh 2.12.

Pada grup dihedral $D_6 = \{e, r, \dots, r^5, f, rf, \dots, r^5 f\}$, dengan $r^6 = e = f^2$ dan $rf = fr^5$. f menyatakan perputaran vertikal dan r rotasi searah jarum jam dengan sudut putar $\frac{\pi}{3}$. Maka D_6 beraksi pada sisi atau titik berlabel dari suatu segi enam beraturan dengan mempermutasi label pada sisi atau titik (lihat pada Gambar 1).



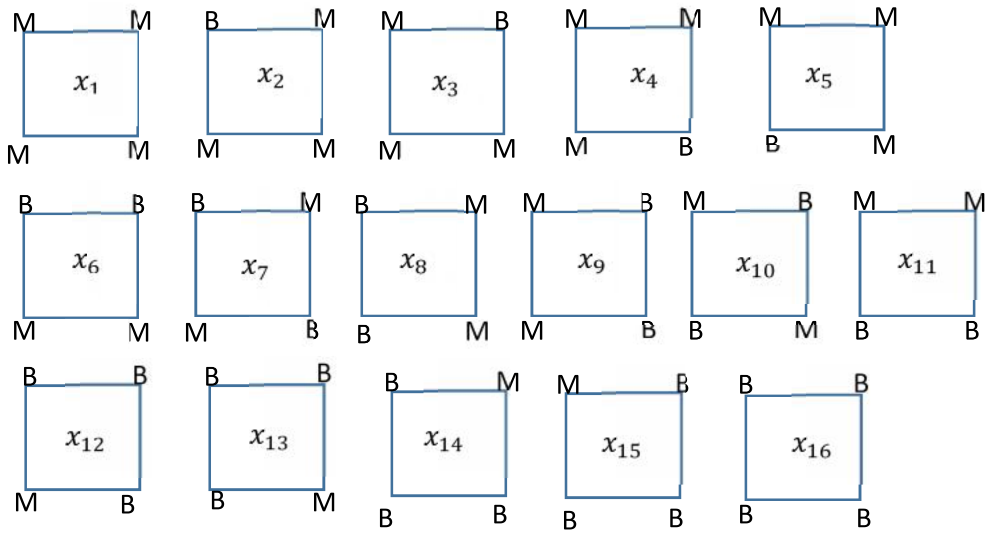
Gambar 1. Aksi f pada sisi berlabel dan aksi r^2 pada titik berlabel pada suatu segi enam beraturan.

Contoh 2.13.

Misalkan X menyatakan himpunan cara mewarnai titik-titik suatu persegi dengan dua warna, misalkan merah dan biru. Maka X sama dengan himpunan semua fungsi $h: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{merah, biru\}$, dimana titik-titik kanan bawah, kiri bawah, kiri atas dan kanan atas diberi label *1,2,3,* dan *4*. Maka $|X| = 2^4 = 16$. Banyaknya pewarnaan yang berbeda dapat dilihat pada Gambar 2, dimana M menyatakan warna merah dan B menyatakan warna biru. Sebagai contoh, gambar berlabel x_9 pada Gambar 2 berhubungan dengan $h(1) = M = h(4)$ dan $h(2) = B = h(3)$. Kemudian nyatakan permutasi (1234) dengan r dan permutasi $(12)(34)$ dengan f. Maka grup dihedral $D_4 = \{e, r, r^2, r^3, f, rf, r^2f, r^3f\}$ beraksi pada himpunan X.

a) x_1 dan x_{16} dipetakan ke dirinya sendiri dibawah aksi setiap elemen D_4. Yaitu $g \star x_1 = x_1$ dan $g \star x_{16} = x_{16}$, untuk semua $g \in G$.

b) $r \star x_2 = x_5$ dan $f \star x_2 = x_3$



Gambar 2. Pewarnaan titik pada persegi

Catatan 3

1. Asumsikan bahwa X terdiri dari himpunan titik-titik dan anggap bahwa grup G beraksi pada X dengan memindahkan titik-titiknya. Maka, berdasarkan definisi grup aksi dapat diinterprestasikan sebagai berikut :
   a. Kondisi pertama berakibat bahwa elemen identitas grup tidak memindahkan elemen X manapun. Sehingga, titik-titik di X akan tetap ketika diberi aksi oleh elemen identitas G.
   b. Kondisi kedua berakibat bahwa jika suatu titik, misal $x_0 \in X$, adalah aksi pertama atas elemen $h \in G$ dan kemudian oleh suatu elemen $g \in G$ kemudian posisi terakhir x_0 adalah sama dengan posisi yang akan dicapai jika $x_0 \in X$ diaksikan tepat sekali oleh elemen $g \star h \in G$.
2. Tentukan sebuah $g \in G$. Kemudian himpunan $\{g \star x : x \in X\} = X$. Sebaliknya, terdapat $x, y \in X$ sehingga $g \star x = g \star y$. Maka berdasarkan definisi grup aksi,

$$
\begin{aligned}
x &= e \star x \\
&= (g^{-1}g) \star x \\
&= g^{-1}(g \star x) \\
&= g^{-1}(g \star y) \\
&= (g^{-1}g) \star y \\
&= e \star y \\
&= y
\end{aligned}
$$

   Dengan kata lain, g hanya mempermutasikan elemen X. Atau secara ekuivalen, setiap $g \in G$ menyebabkan fungsi bijektif dari X ke dirinya sendiri.

3. Mungkin terdapat $g, h \in G$, dengan $g \neq h$ sehingga $g \star x = h \star x$, untuk semua $x \in X$.

Misalkan *G* aksi pada himpunan *X*, maka :

1. Untuk $x \in X$ tetap, $\mathcal{O}(x) = \{g \star x : g \in G\} \subset X$ disebut orbit *x*.
2. Untuk $x \in X$ tetap, $G(x) = \{g \in G, g \star x = x\} \subset G$ disebut penstabil *x* di *G*.
3. Untuk $g \in G$ tetap, $F(xg) = \{x \in X : g \cdot x = x\} \subset X$ disebut *Fix g*.

Contoh 2.14.

Perhatikan himpunan *X* yang diberikan pada Contoh 2.13. Dengan menggunakan penggambaran himpunan *X* pada Gambar 2, didapat

$\mathcal{O}(x_2) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, G_{x_2=}\{e, rf\}, dan\ F_{rf} = \{x_1, x_2, x_4, x_7, x_{10}, x_{13}, x_{15}, x_{16}\}.$

Proposisi 3. *Misalkan G aksi pada himpunan X.*

1. Maka untuk setiap $x \in X$ tetap, himpunan G_x adalah subgrup *G*
2. Definisi sebuah relasi, dinyatakan dengan ~, pada himpunan *X*, dengan *x~y* jika ada $g \in G$, sehingga $g \star x = y$. Maka buktikan bahwa ~ mendefinisikan relasi ekuivalen pada himpunan *X*. Lebih jauh, kelas ekuivalen mengandung $x \in X$ sama dengan $\mathcal{O}(x) = \{g \star x : g \in G\} \subset X$.
3. Tentukan $x \in X$ dan misalkan $t \in \mathcal{O}(x)$. Maka $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(t)$. Selain itu, jika $g \star x = t$ maka $G_x = g^{-1} G_t g$.

Teorema 2.5., Teorema 2.6., Lemma 3, Lemma 4 berikut diambil dari Lal (2012).

Teorema 2.5. *Misalkan suatu grup G beraksi pada himpunan X. Maka untuk setiap* $x \in X$ *tetap, terdapat korespondensi satu-satu antara elemen-elemen* $\mathcal{O}(x)$

dan himpunan semua koset kiri G_x di G. Secara khusus, $|\mathcal{O}(x)| = [G: G_x]$, *jumlah koset kiri G_x di G. Selain itu, jika G adalah grup terhingga maka* $|G| = |\mathcal{O}(x)| \cdot |G_x|$, *untuk semua* $x \in X$.

Bukti

Misalkan *S* himpunan koset kiri G_x yang berbeda di *G*. Maka $S = \{gGx: g \in G\}$ dan $|S| = [G: Gx]$. Pertimbangkan pemetaan $\tau: S \to \mathcal{O}(x)$ oleh $\tau(gG_x) = g \star x$. Akan diperiksa apakah pemetaannya terdefinisi dengan baik. Jadi, anggap koset kiri gG_x dan hG_x adalah sama, yaitu $gG_x = hG_x$.

Maka, dengan menggunakan Lemma 1 dan definisi grup aksi, diperoleh barisan penegasan berikut :

$gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow (h^{-1}g) \star x = x \Leftrightarrow h^{-1} \star (g \star x) = x \Leftrightarrow g \star x = h \star x$.

Sehingga, berdasarkan definisi pemetaan τ, diperoleh $gG_x = hG_x \Leftrightarrow \tau(gG_x) = \tau(hG_x)$. Oleh karena itu, τ tidak hanya terdefinisi dengan baik tapi juga satu-satu.

Untuk menunjukkan τ pada, ingat bahwa untuk setiap $y \in \mathcal{O}(x)$, terdapat suatu $h \in G$, sedemikian sehingga $h \star x = y$. Juga, untuk $h \in G$ yang dipilih, koset $hG_x \in S$. Oleh karena itu, untuk $h \in G$ yang dipilih, berlaku $\tau(hG_x) = h \star x = y$. Karenanya, τ pada.

Oleh karena itu, telah ditunjukkan bahwa τ memberikan korespondensi satu-satu antara $\mathcal{O}(x)$ dan himpunan *S*. Kemudian berdasarkan definisi $[G: Gx] = \frac{|G|}{|G_x|}$, untuk setiap G_x subgrup di *G* ketika $|G|$ terhingga, maka karena G_x subgrup di *G*. Misalkan $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = x^G$. Maka untuk setiap *i*, $1 \le i \le m$, terdapat suatu $g_i \in G$ sedemikian sehingga $x^{g_i} = x_i$. Anggap bahwa $G_x g_i = G_x g_j$. Maka

$g_i g_j^{-1} \in G_x$, dan karenanya $x^{g_i g_j^{-1}} = x$. Sehingga, $x_i = x^{g_i} = x^{g_j} x_j$, dan akibatnya $x_i = x_j$. Oleh karena itu koset $G_x g_i$, $1 \leq i \leq m$ adalah pasangan *disjoint*. Selanjutnya, jika g$\in G$, maka $x^g = x_i$ untuk beberapa i, $1 \leq i \leq m$. Karenanya $x^{g g_i^{-1}} = x$. Sehingga $g g_i^{-1} \in G_x$, dan juga $g \in G_x g_i$. Akibatnya $G = G_x g_1 \dot{\cup} G_x g_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_x g_m$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema Langrange, $m = |G: G_x| \frac{|G|}{|G_x|}$.

■

Lemma 3. *Misalkan G grup aksi terhingga pada himpunan X. Maka, untuk setiap* $y \in X$, $\sum_{x \in \mathcal{O}(y)} |G_x| = |G|$.

Bukti

Ingat bahwa, untuk setiap $x \in \mathcal{O}(y)$, $|\mathcal{O}(x)| = |\mathcal{O}(y)|$. Karenanya, dengan menggunakan Teorema 2.5., diperoleh $|G| = |G_x| . |\mathcal{O}(x)|$, untuk semua $x \in X$.

Oleh karena itu,

$$\sum_{x \in \mathcal{O}(y)} |G_x| = \sum_{x \in \mathcal{O}(y)} \frac{|G|}{|\mathcal{O}(x)|}$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{O}(y)} \frac{|G|}{|\mathcal{O}(y)|}$$

$$= \frac{|G|}{|\mathcal{O}(y)|} \sum_{x \in \mathcal{O}(y)} 1$$

$$= \frac{|G|}{|\mathcal{O}(y)|} |\mathcal{O}(y)|$$

$$= |G|.$$

■

Teorema 2.6. *Misalkan G grup aksi terhingga pada himpunan X. Misalkan N menyatakan jumlah orbit X yang berbeda dibawah aksi G. Maka* $N = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x|$.

Bukti

Berdasarkan Lemma 3, ingat bahwa $\sum_{x\in O(y)}|G_x| = |G|$, untuk semua $y \in X$. Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_N$ menyatakan orbit-orbit X yang berbeda dibawah aksi G. Maka $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in X}|G_x| = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N}\sum_{y\in O(x_i)}|G_{x_i}| = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N}|G| = \frac{1}{|G|}N.|G| = N$.

■

Contoh 2.15.

Lihat kembali Contoh 2.13.. Maka banyaknya pewarnaan yang berbeda adalah

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{16}|G_{x_i}| = \frac{1}{8}(8 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 8) = 6$$

Lemma 4. (*Cauchy-Frobenius-Burnside's Lemma*). *Misalkan G suatu grup aksi terhingga pada himpunan X. Misalkan N menyatakan jumlah orbit X yang berbeda dibawah aksi G. Maka* $N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F_g|$.

Bukti

Pertimbangkan himpunan $S = \{(g,x) \in G \times X : g \star x = x\}$. Hitung $|S|$ menggunakan dua metode. Metode pertama, misalkan ditetapkan $x \in X$. Maka, untuk setiap $x \in X$ tetap, G_x menghasilkan koleksi elemen-elemen G yang memenuhi $g \star x = x$. Jadi, $|S| = \sum_{x \in X} |G_x|$.

Metode kedua, misalkan ditetapkan $g \in G$. Maka, untuk setiap $g \in G$ tetap, F_g menghasilkan koleksi elemen-elemen X yang memenuhi $g \star x = x$. Jadi, $|S| = \sum_{g \in G} |F_g|$. Sehingga, dengan menggunakan dua metode tersebut, diperoleh $\sum_{x \in X} |G_x| = |S| = \sum_{g \in G} |F_g|$. Karenanya, dengan menggunakan Teorema 2.4. diperoleh $N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g|$. ■

Contoh 2.16. Menggunakan Contoh 2.13. $|F_e| = 16, |F_2| = 2, |F_{r^2}| = 4, |F_{r^3}| = 2, |F_f| = 4, |F_{rf}| = 8, |F_{r^2 f}| = 4,$ dan $|F_{r^3 f}| = 8$. Sehingga, banyaknya konfigurasi yang berbeda adalah $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F_g| = \frac{1}{8}(16 + 2 + 4 + 2 + 4 + 8 + 4 + 8) = 6$.