II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa definisi yang berhubungan dengan penelitian mengenai pendekatan distribusi GE ke distribusi GLL(α, β, m_1, m_2) melalui distribusi eksponensial dengan menyamakan fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristiknya.

2.1 Distribusi *Generalized Eksponensial* (GE)

Distribusi *Generalized Eksponensial* pertama kali diperkenalkan oleh Gupta dan Kundu pada tahun 1999. Distribusi ini diambil dari salah satu fungsi kepadatan kumulatif yang digunakan pada pertengahan abad 19 (Gompertz-Verhulst) untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk. Yang didefinisikan sebagai berikut :

$$G(t) = \left(1 - \rho e^{-t\lambda}\right)^{\alpha} \qquad (2.1)$$

Kemudian dengan menstandarisasikan $\rho = 1$ dan x = t, maka didapat *Univariate Generalized Exponential distribution* dengan fungsi kepadatan kumulatif (fkk) dan x > 0, adalah sebagai berikut :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha} \qquad (2.2)$$

Dari turunan fungsi kepadatan kumulatif diatas, juga didapat fungsi kepadatan peluangnya (fkp) dari distribusi *generalized eksponensial*.

Definisi 2.1

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi *generalized eksponensial* dengan dua parameter , maka menurut Gupta dan Kundu (1999), fungsi kepekatan peluang dari peubah acak tersebut adalah :

$$f(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1} & ;\alpha>0.\lambda>0,x>0 \\ 0 & ;x\ lainnya \end{cases} \tag{2.3}$$

Dengan : X : peubah acak

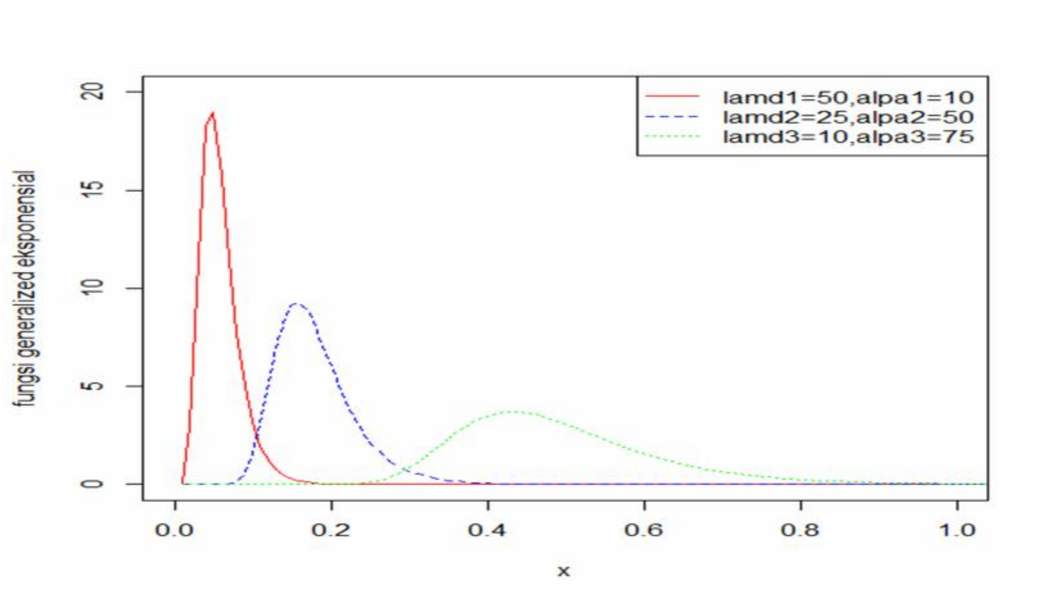
α : parameter bentuk

λ : parameter skala

e : 2,7183.

Dimana α dan λ masing-masing adalah parameter bentuk dan parameter skala. Ini jelas bila $\alpha = 1$, maka distribusi diatas merupakan distribusi eksponensial.

Berikut ini adalah bentuk grafik dari distribusi GE



Gambar grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi GE

(Gupta dan Kundu, 1999)

2.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi kontinu dan salah satu kasus khusus dari distribusi gamma. Didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2

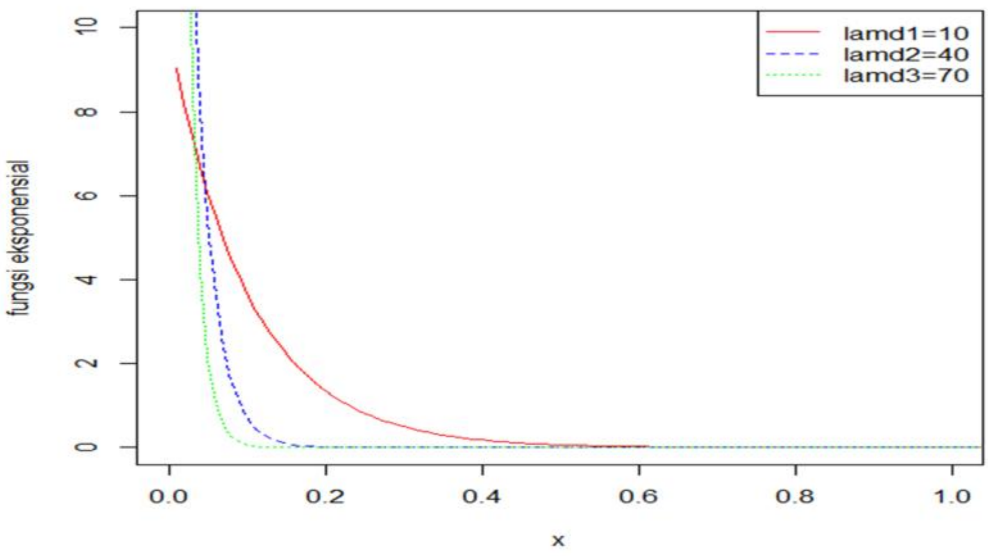
Misalkan X adalah peubah acak, menyebar menurut distribusi eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ dimana fungsi densitasnya adalah :

$$f(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ;.\lambda>0, x>0 \\ 0 & ;x\ lainnya \end{cases} \quad (2.4)$$

Dimana : X : Peubah acak

λ : Parameter skala

Berikut ini adalah bentuk grafik dari distribusi eksponensial



Gambar Grafik fungsi kepekatan peluang distribusi eksponensial

(Gupta dan Kundu, 1999)

2.3 Distribusi *Generalized Log-logistic* (GLL)

Distribusi *generalized log-logistik* (GLL) merupakan salah satu distribusi umum yang memiliki potensi yang baik untuk menyesuaikan dengan data kelangsungan hidup. Distribusi GLL merupakan perluasan dari Distribusi Log-Logistik dengan menambahkan dua parameter bentuk (m_1, m_2). Dengan menggunakan distribusi *generalized log-logistik* sebagai distribusi perumuman dilakukan pendekatan dengan distribusi eksponensial.

Definisi 2.3

Suatu peubah acak X dikatakan distribusi GLL dengan parameter $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ atau dapat dinotasikan sebagai X~GLLD $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ dengan α : parameter lokasi yang menunjukan lokasi waktu, dimana pada saat waktu tersebut belum ada objek pengamatan yang mati/rusak/gagal. Sedangkan β : parameter skala yang menyatakan besarnya keragaman data berdistribusi GLL (m_1, m_2)

Dalam Singh, Bartolucci dan Warsono (1996), fungsi kepekatan peluang dari distribusi GLL dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$g(x; \alpha, \beta, m_1, m_2) = \left(\frac{\alpha}{xB(m_1, m_2)}\right) [F(x)]^{m_1} [1 - F(x)]^{m_2}, \qquad (2.5)$$

Untuk $\alpha \geq 0$ dan $\beta, m_1, m_2, x > 0$.

Dengan $F(x) = \frac{1}{(1+e^{-(\beta+\alpha ln x)})}$ adalah fungsi distribusi log logistik.

Dengan memisalkan $u = F(x) = \frac{1}{(1+e^{-(\beta+\alpha ln x)})}$ dan

$$du = \left(\frac{\alpha}{x}\right) \frac{e^{-(\beta+\alpha ln x)}}{(1 + e^{-(\beta+\alpha ln x)})^2} \, dx$$

Maka fungsi distribusi dari GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ adalah :

$$G(x) = \frac{1}{B(n_1, m_2)} \int_0^{F(x)} u^{m_1-1}(1-u)^{m_2-1} du \quad (2.6)$$

dengan :

x = peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu mati/rusak/gagal (failure time)

$B(m_1, m_2)$ = fungsi Beta lengkap

α = parameter lokasi yang menunjukan lokasi waktu, dimana pada saat waktu tersebut belum ada objek pengamatan yang mati/ rusak /gagal.

β = parameter skala yang menyatakan besarnya keragaman data berdistribusi GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$

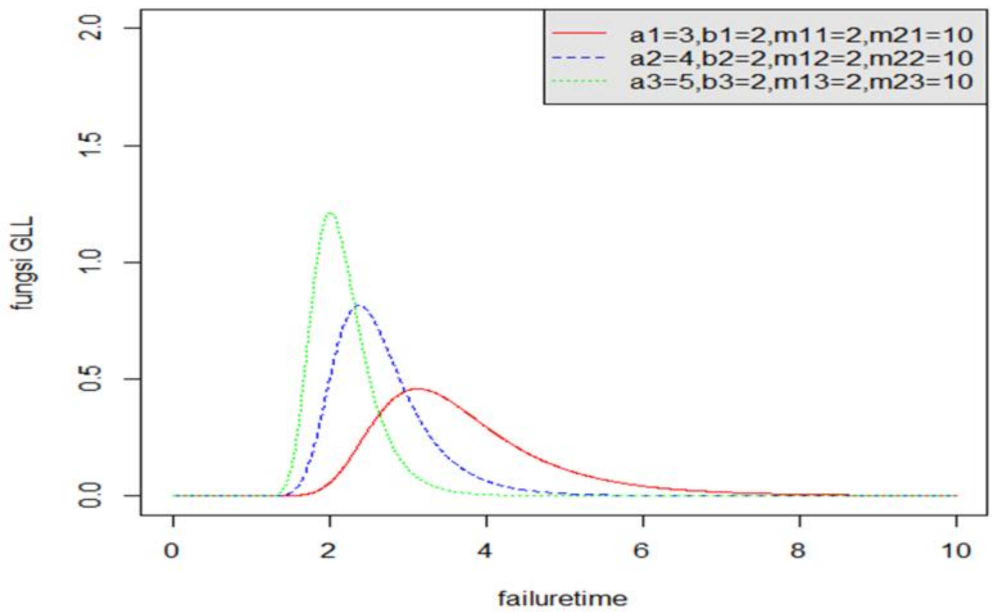
(m_1, m_2) = parameter bentuk yang menunjukkan laju kematian/ kerusakan/kegagalan data berdistribusi GLL $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$.

Untuk $m_1 = m_2 = 1$, distribusi GLL (m_1, m_2) berubah menjadi distribusi log-l ogistik

Untuk $m_1 > m_2$, fungsi kepekatan peluang dari GLL (m_1, m_2) menjulur kearah positif.

Untuk $m_1 < m_2$, fungsi kepekatan peluang dari GLL (m_1, m_2) menjulur kearah negatif.

Berikut ini adalah bentuk grafik dari distribusi GLL



Gambar Grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi GLL

2.4 Fungsi Beta

Fungsi Beta merupakan suatu fungsi khusus. Fungsi ini dapat digunakan untuk menyederhanakan integral-integral khusus.

Definisi 2.4

Fungsi beta yang dinotasikan dengan B(a,b) didefinisikan sebagai :

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad ; a > 0, b > 0 \qquad (2.7)$$

Rumus rekursi untuk fungsi beta adalah :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

(James B. Mc Donald, Yexio J.Xu,1993)

2.5 Ekspansi Deret Maclaurin

Pada penelitian ini deret Maclaurin digunakan untuk menyelesaikan e^{tx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi generalized log logistik.

Deret Maclaurin

Misalkan x adalah fungsi dimana turunan ke $(n+1), f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang menduga a. Jadi untuk setiap x dalam I berlaku

: $f(x) = f(a) + f'(a)(x) + \frac{f''(a)}{2!}(x)^2 + \cdots$ (2.8)

Persamaan (2.8) disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi f(x). Jika a = 0, maka bentuk deret pada persamaan (2.7) menjadi :

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \quad (2.9)$$

Dan bentuk deret pada persamaan (2.9) disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi f(x).

Dengan menggunakan persamaan (2.9) maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut :

$$f(x) = e^{tx} \longrightarrow f(o) = e^{t(0)} = 1$$

$$f'(x) = te^{tx} \longrightarrow f'(0) = te^{t(0)} = t$$

$$f''(x) = t^2e^{tx} \longrightarrow f''(0) = t^2e^{t(0)} = t^2$$

dst.

Sehingga diperoleh :

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \quad (2.10)$$

(Purvcell,Varberg dan Ringdon,2003).

2.6 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu distribusi digunakan untuk mencari momen dari suatu distribusi tersebut. Fungsi pembangkit momen dapat diperoleh dari ekspetasi e^{tx} dari suatu distribusi tersebut.

Definisi 2.5

Fungsi pembangkit momen peubah acak X diperoleh dari E(e^{tx}) dan dinyatakan dengan $M_x(t) = E(e^{tx})$.

Bila X merupakan peubah acak diskrit, maka

$$E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

dan bila X merupakan peubah acak kontinu, maka

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

(Miller and Miller,1999)

Teorema Ketunggalan :

i. Bila dua fungsi pembangkit momen dari dua peubah acak ada dan sama, maka kedua peubah acak tersebut mempunyai fungsi distribusi yang sama.

ii. Bila dua peubah acak mempunyai fungsi distribusi yang sama, maka (bila ada) fungsi pembangkit momennya juga sama.

(Dudewicz & Mishra, 1995).

2.7 Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik menunjukkan sebuah anggota terdapat dalam sebuah himpunan atau tidak. Kendall dan Stuart (1958) menjelaskan tentang fungsi karakteristik dari peubah acak X didefinisikan sebagai nilai harapan dari e^{itx} berikut :

$$\varphi_x(it) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Dengan :

$t \epsilon R$

$i = \sqrt{(-1)}$

$e^{itx} = \cos(tx) + i\, sin(tx)$

$\varphi_x(it) = E\left(e^{itx}\right) = E(\cos(tx) + i\, sin(tx)$

Dengan nilai ekspektasi fungsi kompleks $e^{itx} = \cos(tx) + i\, sin(tx)$, maka fungsi karakteristik $\varphi_x(it)$ dapat diberikan dalam bentuk integral berikut :

$$\varphi_x(it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

$$\varphi_x(it) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) + i \sin(tx) f(x) dx$$

$$\varphi_x(it) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\, f(x) dx$$

2.8 Fungsi pembangkit momen dan fungsi karakteristik Distribusi Generalized Log-Logistik

Misalkan X suatu peubah acak berdistribusi GLL(α, β, m_1, m_2) maka fungsi pembangkit momen dari X adalah sebagai berikut :

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(te^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right)\Gamma\left(m_2 - \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \tag{2.11}$$

(Warsono, 2010).

Misalkan X suatu peubah acak berdistribusi GLL(α, β, m_1, m_2) maka fungsi karakteristik dari X adalah sebagai berikut :

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(ite^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{n}{\alpha}\right)\Gamma\left(m_2 - \frac{n}{\alpha}\right)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \tag{2.12}$$

(Warsono, 2010).

2.9 Pendekatan dengan teknik Fungsi Pembangkit Momen

Misalkan peubah acak Y_n memiliki fungsi distribusi $F_n(y)$ dan fungsi pembangkit momennya M(t;n) ada pada selang –h < t < h dan untuk semua n. Jika ada fungsi distribusi F(y), yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momennya M(t), terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 < h$, sedemikian sehingga $\lim_{n \to \infty} M(t;n) = M(t)$, maka Yn memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi F(y).

(Hogg & Craig, 1995)

2.10 Kasus Khusus atau Limiting GLL($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2$)

Menurut Warsono, Usman, M dan Nusyirwan (2000), bentuk hubungan distribusi generalized log-logistik $(\alpha, \beta, m_1, m_2)$ dengan distribusi lainnya sebagai kasus khusus atau limiting dapat dituliskan dalam bentuk berikut :

$$GF(\mu, \sigma, m_1, m_2) = GLL\left(\alpha = \frac{1}{\sigma}, \beta = -\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right), m_1, m_2\right)$$

$$GB2(a, b, m_1, m_2) = GLL(\alpha = a, \beta = -aln(b), m_1, m_2)$$

$$GG(a, \gamma, m_1) = \lim_{m_2 \to \infty} GB2(a, b = \gamma(m_2)^{\frac{1}{a}}, m_1, m_2)$$

$$\log normal\ (\mu, \sigma) = \lim_{m_2 \to \infty} GG(a, b = (\sigma^2 a^2)^{\frac{1}{a}}, m_1 = \frac{a\mu + 1}{\sigma^2 a^2})$$

$$Weibull(a, \gamma) = GG(a, \gamma, m_1 = 1)$$

$$Gamma\ (\gamma, m_1) = GG(a = 1, \gamma, m_1)$$

$$Eksponensial\ (\gamma) = GG(a = \mathbf{1}, \gamma, m_1 = 1)$$

2.11 Program R

Program R adalah perangkat lunak bebas untuk komputasi statistik dan grafik. Program R merupakan proyek GNU *General Public License Free Software Fundation* yang hampir sama dengan bahasa S yang dikembangkan di Bell Laboratories oleh John Chambers dan rekannya.

Program R menyediakan berbagai statistik seperti linear dan non linear modelling, pengujian analisis klasik, analisis *time-series*, klasipikasi dan lainnya. Program R adalah sebuah rangkaian perangkat lunak yang digunakan untuk manipulai data, perhitungan dan tampilan grafik yang mencakup antara lain sebagai berikut :

a. Penanganan data yang efektif dan penyimpangan data.

b. Rangkaian operator untuk perhitungan array dalam matrik tertentu.

c. Fasilitas grafik untuk analisis data dan menampilkannya baik pada layar maupun *hardcopy*.

d. Bahasa pemrograman yang sederhana, berkembang dengan baik dan efektif.