

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Turunan

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “*f aksen*”) yang nilainya sebarang bilangan c adalah :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada.

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan (terturunkan) di c . Pencarian turunan disebut pendiferensialan (Purcell and Varberg, 1987).

2.2 Definisi Diferensial

Difference dalam bahasa Inggris artinya beda, sehingga differensial adalah selisih variable. Jika $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdifferensialkan terhadap variable bebas x , maka dy adalah differensial dari variabel tak bebas (terikat) y , yang didefinisikan dengan $dy = f'(x) dx$.

Andaikan $y = f(x,y)$, dengan f adalah suatu fungsi yang dapat didifferensialkan, differensial dari peubah tak bebas (terikat) dy , disebut juga differensial total dari f ,

yang didefinisikan $dy = df(x,y) = f_x(x,y) dx + f_y(x,y) dy$ (Purcell and Varberg, 1987).

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas dan derivatif-derivatif dari variabel tidak bebas terhadap variabel bebasnya (Wardiman, 1981).

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial :

1. $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x)$
2. $3x^2 dx + 2ydy = 0$

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu :

2.3.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagian suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk $F(x,y,y',y'',\dots,y^n) = 0$

Contoh :

$$\frac{dy}{dx} = x + 10$$

2.3.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial yang mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari suatu peubah bebas.

Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang).

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

(Ault dan Ayres, 1992: 231).

2.4 Orde (tingkat) dan Derajat Suatu Persamaan Diferensial

Orde atau tingkat suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial dengan tingkatan yang paling tinggi. Sedangkan derajat persamaan diferensial dapat ditulis sebagai polynomial dalam turunan, adalah derajat turunan tingkat tertinggi yang terjadi (Ault dan Ayres, JR, 1992: 1).

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk : $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ yang menyatakan hubungan antara peubah bebas x , peubah tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu y', y'', \dots, y^n .

Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) n jika, turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial adalah turunan ke n .

Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai derajat (degree) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat k .

Contoh :

$$1. \quad x \frac{dy}{dx} + 5y = 6 \quad \text{(orde satu, derajat satu)}$$

$$2. \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) + 4 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = \sin x \quad \text{(orde tiga, derajat satu)}$$

(Kartono, 1994).

2.5 Linearitas Persamaan Diferensial

Berdasarkan kelinearitas (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya persamaan diferensial dibagi dua yaitu linear dan non linear.

Dikatakan linear jika variabel terikatnya dan turunannya berpangkat 1 dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya. Jika tidak demikian maka persamaan diferensial tersebut dikatakan non linear.

Contoh :

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{(linear)}$$

$$2. \quad y \frac{dy}{dx} + x = 0 \quad \text{(non linear)}$$

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 283).

2.6 Homogenitas Persamaan Diferensial Linear

Persamaan diferensial dikatakan homogen jika pada ruas kiri persamaan tersebut hanya mengandung variabel terikat beserta turunannya, sedangkan pada ruas kanan yang tersisa hanya nol, $f'(x) = 0$. Jika di ruas kanan ada variabel bebas atau konstanta maka persamaan diferensial tersebut dikatakan non-homogen, $f'(x) \neq 0$.

Contoh :

$$1. \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{Homogen})$$

$$2. \frac{dy}{dx} + y^2 = 3x \quad (\text{Non homogen})$$

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 255).

2.7 Persamaan Differensial Linear Orde Satu

Suatu persamaan diferensial orde satu adalah suatu persamaan yang berbentuk :

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x).$$

Kita selalau memisahkan bahwa koefisien-koefisien $a_1(x)$, $a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I dan bahwa koefisien

$a_1(x) \neq 0$ untuk semua x didalam I . Jika kita bagi ke dua ruas oleh $a_1(x)$ dan menetapkan $a_1(x) = a_1(x) / a_0(x)$ dan $b(x) = f(x) / a_1(x)$, kita peroleh persamaan diferensial yang sepadan.

$$y' + a(x) y = b(x).$$

dan inilah yang merupakan persamaan diferensial orde satu (Finizio, N. and G. Ladas, 1988).

2.8 Persamaan Differensial Linear Orde n

Suatu persamaan diferensial linear orde n adalah persamaan yang berbentuk :

$$a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x). \quad (1)$$

Kita selalu memisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, \dots , $a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I dan bahwa koefisien pertama $a_n(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Selang I disebut *selang definisi* (*selang asal*) dari persamaan diferensial itu (Finizio, N. and G. Ladas, 1988).

2.9 Pengertian Air

Air merupakan kebutuhan yang sangat mendasar di dalam kehidupan setiap organisme. Dengan mengetahui pengertian air yang sebenarnya, memiliki banyak manfaat seperti manfaat dalam menentukan air yang baik dan bisa digunakan dalam kehidupan, terlebih air yang dapat di konsumsi. Air juga merupakan zat yang tidak mempunyai rasa, warna, dan bau yang terdiri dari hidrogen dan oksigen dengan rumus kimia H_2O . Air merupakan suatu larutan yang bersifat universal. Air juga merupakan suatu kebutuhan yang tidak dapat ditinggalkan bagi kehidupan manusia, karena air diperlukan untuk berbagai macam kebutuhan seperti minum, pertanian, industri dan perikanan. Air yang dapat diminum adalah air yang bebas dari bakteri berbahaya dan tingkat kemurniannya secara kimiawi sangat baik. Air minum harus bersih, jernih, tidak berbau dan tidak berwarna, serta tidak mengandung bahan tersuspensi atau berkeruh. Fungsi air juga merupakan zat yang sangat dibutuhkan selain udara dan tidak seorangpun dapat bertahan hidup lebih dari 4-5 hari tanpa minum air. Selain itu, air juga

perantara penyakit-penyakit yang menyerang manusia. Oleh karena itu, untuk merasakan manfaat air bagi kehidupan khususnya bagi kesehatan tubuh. Akan lebih bijak jika kita merawat keberadaan sumber air yang ada. Keberadaan manfaat air bagi kesehatan tubuh sangat penting dimana air adalah sumber kehidupan. Kemampuan air bisa memperbaiki daya tahan tubuh karena air dapat menaikkan simpanan glycogen, suatu bentuk dari karbohidrat yang tersimpan dalam otot dan digunakan sebagai energi saat kita sedang beraktifitas atau pun bekerja. Air juga membantu kita untuk menahan rasa lapar dimana kita ketahui bahwa rasa lapar kadang merupakan penyamaran dari rasa haus. Sewaktu kita mengalami dehidrasi kita akan berpikir kalau kita sedang lapar dan mungkin merasa ingin makan padahal yang kita butuhkan sebenarnya adalah air (Adiono, 1987).

2.10 Pengertian Sedimentasi

Pengertian sedimentasi adalah proses pengendapan material-material yang diangkut oleh media air, dinamakan dengan sedimentasi atau pengendapan. Dimana ini dapat terjadi apabila batuan mengalami pelapukan dan erosi lalu diangkut atau dibawa oleh tenaga alam dan akhirnya terjadilah sedimentasi atau diendapkan disinilah letak terjadinya sedimentasi, sedimentasi juga memiliki dampak positif dan negatif sedimentasi atau bermanfaat dan merugikan, proses terjadinya sedimentasi dimana proses atau cara kerjanya memakan waktu yang cukup lama. Berdasarkan tenaga alam yang mengangkutnya, sedimentasi dibagi atas sedimentasi air sungai, air sumur, sedimentasi air laut, sedimentasi angin dan sedimentasi gletsyer. Semua hasil

sedimentasi akan diendapkan disuatu tempat, baik di tempat-tempat bak besar, sungai, lembah, lereng pegunungan atau pun dasar laut yang dangkal (Asep, 2007).

2.11 Pengertian Filterisasi

Filterisasi adalah pembersihan partikel padat dari suatu fluida dengan melewatkannya pada medium penyaringan, atau *septum*, dimana zat padat itu tertahan. Pada industri, filterisasi ini meliputi ragam operasi mulai dari penyaringan sederhana hingga pemisahan yang kompleks. Fluida yang difilterisasi dapat berupa cairan atau gas atau aliran yang lolos dari saringan mungkin saja cairan, padatan, atau keduanya. Suatu saat justru limbah padatlah yang harus dipisahkan dari limbah cair sebelum dibuang. Seringkali umpan dimodifikasi melalui beberapa pengolahan awal untuk meningkatkan laju filterisasi, misal dengan pemanasan, kristalisasi, atau memasang peralatan tambahan pada penyaring seperti selulosa atau tanah diatomae. Oleh karena varietas dari material yang harus disaring beragam dan kondisi proses yang berbeda, banyak jenis penyaring telah dikembangkan (Anonym, 1995).

2.12 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika. Kontruksi, analisis penggunaan model

matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang sangat penting. Ada dua tipe matematika yaitu model bertipe deterministik dan model bertipe empirik. Model deterministik merupakan suatu model matematika yang dibangun dengan berlandaskan hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku pada sistem. Sedangkan model empirik cenderung kepada faktor yang diberikan oleh sistem atau data (Widowati, 2007).

2.13 Fluida Dinamis

Fluida dinamis adalah fluida (bisa berupa zat cair, gas) yang bergerak. Untuk memudahkan dalam mempelajari, fluida disini dianggap mempunyai kecepatan yang konstan terhadap waktu, tak termampatkan (tidak mengalami perubahan volume), tidak kental, tidak turbulen (tidak mengalami putaran-putaran). Aliran fluida sering dinyatakan dalam debit. Debit adalah banyaknya volume zat cair yang mengalir pada tiap satu satuan waktu, biasanya dinyatakan dalam satuan liter/detik atau dalam satuan meter kubik (m^3) per detik.

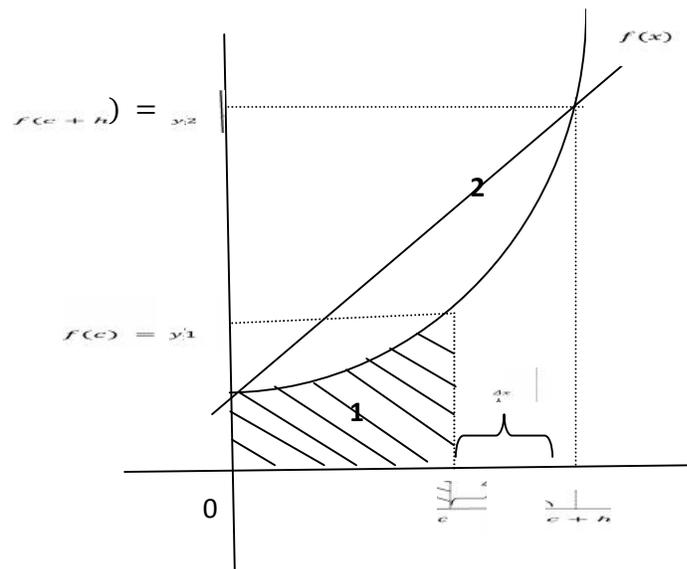
$$Q = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dimana :

Q = debit aliran (m^3/s)

v = volume (m^3)

t = selang waktu (s) (Setiawan, 2015).



Gambar 1. Perbedaan Debit dan Kecepatan.

Ket :

1. Debit dan 2. Kecepatan