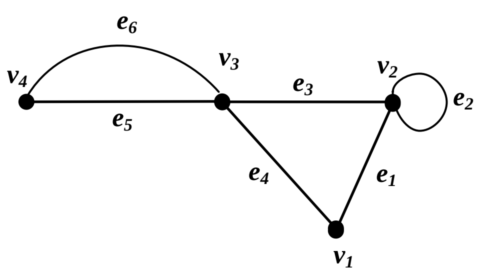
# II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa istilah, definisi serta konsep-konsep yang mendukung dalam penelitian ini.

## 2.1 Konsep Dasar Teori Graf

Berikut ini akan diberikan konsep dasar teori graf yang bersumber dari Gross dkk (2014):

Suatu graf $G = (V,E)$, beranggotakan dua himpunan $V$ dan $E$, dengan anggota dari V disebut titik dari G dan anggota E disebut sisi dari G. Himpunan $V$ adalah himpunan tak kosong yang berhingga dan himpunan $E$ adalah himpunan dari satu atau dua titik dari $V$.

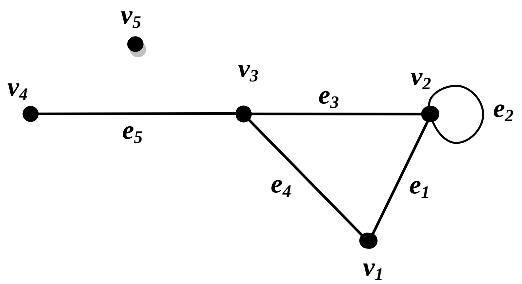



Gambar 1. Contoh graf dengan 4 titik dan 6 sisi

Jika suatu titik $v$ merupakan titik akhir atau ujung dari sisi $e$, maka titik $v$ dikatakan menempel (*incident*) pada sisi $e$, dan sisi $e$ juga menempel pada titik $v$, serta suatu titik $u$ dikatakan bertetangga (*adjecent*) dengan titik $v$, jika kedua titik tersebut terhubung oleh sisi yang sama. Banyaknya n titik atau $|V| = n$ pada graf G disebut urutan atau *orde* dan banyak m sisi atau $|E| = m$ pada graf G disebut ukuran atau *size.* Untuk contoh dari Gambar 1 terlihat bahwa sisi $e_5$, $e_6$ menempel pada titik $v_4$ serta untuk titik $v_1$ bertetangga dengan $v_2$ dan $v_3$.

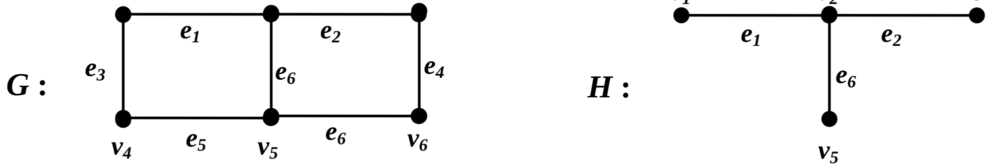
Derajat (*degree*) dari suatu titik $v$ pada graf G dinotasikan sebagai $deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik $v$ dengan *loop* terhitung dua. Untuk contoh dapat terlihat pada Gambar 1 bahwa $deg(v_1)= 2$, $deg(v_2)= 4$, $deg(v_3)= 4$ dan $deg(v_4)= 2$.

Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* atau titik ujung adalah titik yang memiliki derajat satu. Untuk contoh pada Gambar 2 terlihat titik $v_4$ merupakan titik *pendant* dan titik $v_5$ merupakan titik terasing.



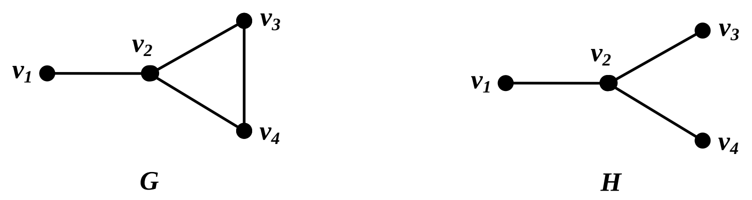

Gambar 2. Contoh graf dengan 1 titik *pendant* dan 1 titik terasing

Suatu subgraf dari graf $G$ adalah graf $H$ dengan $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ maka $H$ disebut sebagai subgraf dari $G$ atau graf $G$ adalah supergraf dari $H$.



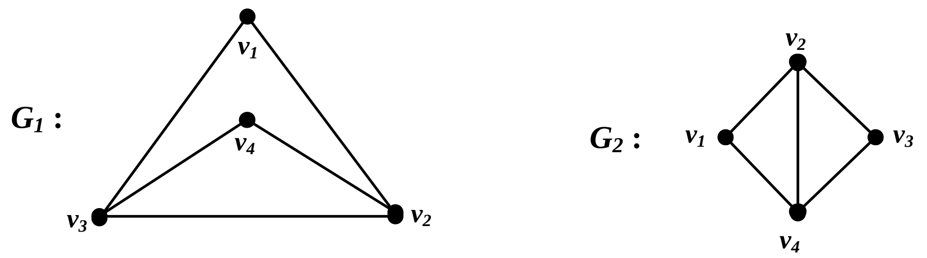

Gambar 3. Contoh subgraf $H$ dari graf $G$

Suatu subgraf H dari graf G dikatakan *spanning* subgraf, jika $V(H) = V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ serta subgraf yang terhubung maksimal dari graf G disebut komponen dari graf G.




Gambar 4. Contoh *spanning* subgraf H dari graf G

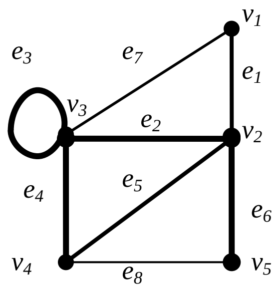
Dua graf $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfis, jika kedua graf tersebut saling berkorespondensi satu-satu antara titik-titik di $G_1$ dengan titi-titk di $G_2$ serta antara sisi-sisi di $G_1$ dengan sisi-sisi di $G_2$.




Gambar 5. Contoh isomorfis graf $G_1$ *dan* $G_2$

Suatu *walk* pada graf *G* adalah barisan berhingga dari titik dan sisi, $W = v_o, e_1, v_1, e_1, \ldots\ldots, e_n, v_n$ sehingga untuk $j = 1, 2, 3, .., n$, titik $v_{j-1}$ dan titik $v_j$ merupakan titik ujung dari sisi $e_j$, dengan $v_0$ disebut titik awal dan $v_n$ disebut titik akhir dan titik lainnya disebut titik dalam dari *walk W*.

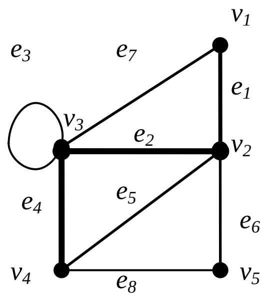
Salah satu *walk* terlihat pada Gambar 6 yaitu $v_1\, e_1\, v_2\, e_2\, v_3\, e_3\, v_3\ e_4\, v_4\, e_5\, v_2\, e_6\, v_5$




Gambar 6. Contoh graf dengan salah satu *walk*

*Path* dari suatu graf merupakan *walk* terbuka dimana tidak ada titik yang digunakan lebih dari satu kali atau berulang.

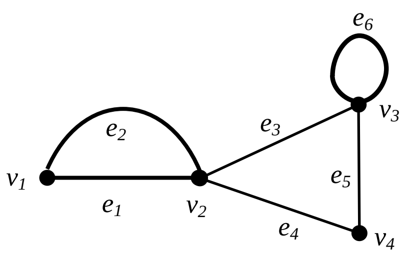
Salah satu *path* terlihat pada Gambar 7 yaitu $v_1\, e_1\, v_2\, e_2\ v_3\ e_4\, v_4.$




Gambar 7.Contoh graf dengan salah satu *path*

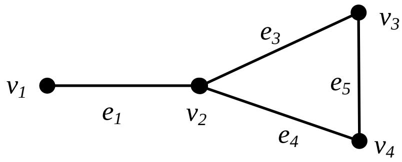
Suatu *loop* dari suatu graf adalah sisi yang menempel pada titik yang sama atau titik awal dan titik akhirnya sama, sedangkan sisi paralel adalah dua atau lebih sisi yang berada pada pasangan titik yang sama.

Salah satu *loop* terlihat pada Gambar 8 yaitu sisi $e_6$ dan sisi paralelnya adalah himpunan { $e_1, e_2$}.



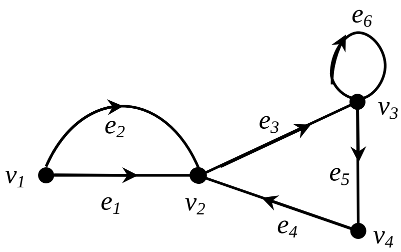

Gambar 8. Contoh graf dengan salah satu *loop* dan sisi paralel

Suatu graf G dikatakan graf sederhana jika tidak memuat *loop* atau sisi paralel, sedangkan suatu graf G dikatakan terhubung jika diantara setiap pasang dari titik di G terdapat *path* yang menghubungkannya.



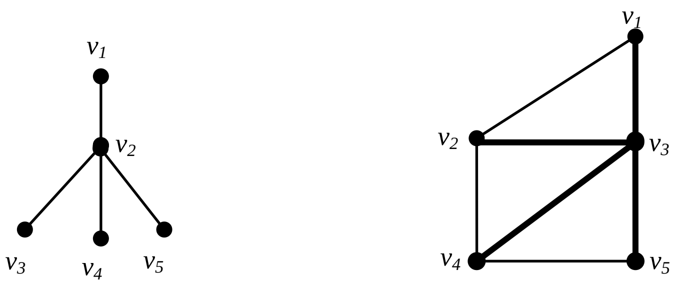

Gambar 9. Contoh graf sederhana dan terhubung

Suatu graf berarah (*digraf*) adalah suatu graf dengan setiap sisinya memiliki arah dengan sisi berarah memiliki satu titik ujung yang disebut ekor (*tail*) dan satu titik ujungnya disebut kepala (*head*) dengan arahnya dari ekor menuju kepal.




Gambar 10. Contoh digraf dengan 4 titik

Suatu graf T disebut *tree* jika graf T merupakan graf terhubung yang tidak memiliki *cycle* atau sirkuit. Suatu graf T disebut *spanning tree* dari suatu graf G jika graf T adalah *tree* dan memuat semua titik dari graf G atau dengan kata lain graf T adalah *spanning* subgraf dari graf G yang tidak memuat *cycle* atau sirkuit dan kumpulan dari *tree* disebut dengan *forest*.




$T_1$: *Tree* $T_2$: *Spanning Tree*

Gambar 11. Contoh *tree* dan *spanning tree*

## 2.2 Konsep Dasar Barisan

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya merupakan semua bilangan bulat dan dinotasikan dengan $a_n$ (Rosen, 2012).

Secara umum barisan direpresentasikan dalam baris sebagai berikut:

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, .........., a_n$$

Contoh : Barisan bilangan 2, 4, 6, 8, 10, ..........

Suatu barisan geometri adalah barisan yang memiliki bentuk $a, ar, ar^2, ..., ar^n, ...$ dengan a dan r adalah bilangan riil serta r merupakan rasio (Rosen, 2012).

Contoh: Barisan bilangan 1, 2, 4, 8, 16, ......., dengan a = 1 dan r = 2.

Suatu barisan geometri adalah barisan yang memiliki bentuk $a,\ a+d,\ a+2d, ...,\ a+nd, ...$ dengan a dan d adalah bilangan riil serta d adalah merupakan beda (Rosen, 2012).

Contoh: Barisan bilangan 1, 4, 7, 10, 13, ......., dengan a = 1 dan d = 3.

Diberikan barisan bilangan $\{a_n\}$ sebagai berikut:

$$a_0, a_1, a_2, .........., a_n \qquad \text{..............................} \ (1)$$

Beda pertama dari barisan (1) adalah:

$D_0^1, D_1^1, D_2^1, .........., D_n^1$, dengan $D_n^1 = a_{n+1} - a_n$

Secara rekurensi di definisikan beda orde ke *k* dari barisan (1) dengan orde *k-1* sebagai beda sebelumnya adalah :

$D_0^k, D_1^k, D_2^k, .........., D_n^k$, dengan $D_n^k = D_{n+1}^{k-1} - D_n^{k-1}$ .............................. (2)

Perhatikan bahwa (2) valid untuk *k* =1 jika $a_n = D_n^0$ (Alonso, 2000).

**Proposisi 1:** Diberikan barisan $a_0, a_1, a_2, .........., a_n$. Jika terdapat polinomial p(x) berderajat *k* dengan koefisien *c* sehingga $a_n = p(n)$ untuk $n$ = ,1,2,3,…, maka barisan $a_0, a_1, a_2, .........., a_n$ adalah barisan aritmatika orde *k* dengan beda adalah *k!* c (Alonso,2000).

Bukti :

Misalkan $p(x) = a_1x^k + a_2x^{k-1} + a_3x^{k-2} + ...$ maka $a_n = a_1n^k + a_2n^{k-1} + a_3n^{k-2} + ......$

sehingga $a_n = a_{n+1} - a_n = a_1[(n+1)^k - m^k] + a_2[(n+1)^{k-1} - n^{k-1}] + ...$

$$= ckn^{k-1}$$ □

Oleh karena itu, untuk beda pertama dapat dibentuk $p(x) = kcx^{k-1} + ......$ yang berderajat *k −1* dengan koefisien pertama *kc* sehingga $D_n^1 = p_1(n)$

Dengan melakukan perulangan proses yang sama sebanyak *k* kali dapat disimpulkan bahwa : $D_n^k = p_k(n)$ untuk suatu polinomial $p_k(n)$ berderajat nol dengan koefisien pertama *k!c* sehingga $D_n^k = k!c$, untuk $n$ = 0, 1, 2, 3, …

Berdasarkan Proposisi 1 dari barisan (1) terdapat polinomial p(x) dengan derajat *k*, $p(x) = a_1x^k + a_2x^{k-1} + a_3x^{k-2} + ......$, dengan $a_n = p(n)$ untuk *n* = 0,1,2,3,.. maka barisan (1) yaitu $a_n = a_1n^k + a_2n^{k-1} + a_3n^{k-2} + ......$ adalah barisan aritmatika orde *k* dengan beda pada orde *k* adalah sama. □

## 2.3 Konsep Dasar Pencacahan

Dalam proses pencacahan ada dua kaidah yang digunakan yaitu pertama kaidah penjumlahan, jika percobaan 1 mempunyai $m_1$ hasil percobaan yang mungkin terjadi dan percobaan 2 mempunyai $m_2$ hasil percobaan yang mungkin maka jika hanya salah satu dari dua percobaan itu saja yang dilakukan, maka terdapat $m_1$ + $m_2$ hasil jawaban (Rosen, 2012).

Contoh:

Seorang mahasiswa akan memilih satu mata kuliah yang ditawarkan pagi dan sore. Untuk pagi ada 7 matakuliah dan sore ada 5 matakuliah yang ditawarkan, maka mahasiswa tersebut memiliki 7 + 5 = 12 pilihan untuk memilih satu matakuliah.

Kedua kaidah perkalian, jika percobaan 1 mempunyai $m_1$ hasil percobaan yang mungkin terjadi dan percobaan 2 mempunyai $m_2$ hasil percobaan yang mungkin maka terdapat $m_1$ x $m_2$ hasil jawaban (Rosen, 2012).

Contoh :

Jika harus menyusun jadwal dua ujian ke dalam periode lima hari tanpa ada pembatasan mengenai berapa kali dibolehkan ujian dalam setiap harinya, maka kemungkinan jadwal dapat dibuat sebanyak 5 x 5 = 25 pilihan.

Diberikan $n \in \mathbb{N}$. Nilai n! (dibaca " *n faktorial*") didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif antara 1 sampai *n*:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)....3.2.1$$

Dengan nol faktorial, didefinisikan 0!=1 (Rosen, 2012).

Suatu permutasi *r* dari himpunan dengan *n* objek adalah pemilihan secara berurut sebanyak *r* objek yang diambil dari *n* objek. Jika *n* dan *r* bilangan bulat dengan $0 \le r \le n$ maka $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (Rosen, 2012).

Contoh :

Berapa banyak cara untuk memilih 3 mahasiswa dari 5 mahasiwa yang akan menduduki posisi ketua, wakil dan sekretaris?

Penyelesaian:

$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{(2)!} = 60$ cara.

Suatu kombinasi *r* dari himpunan *n* objek adalah pemilihan secara acak tanpa memperhitungkan urutan sebanyak *r* objek yang diambil dari *n* objek. Misalkan untuk semua *n* dan *r* adalah bilangan bulat, dengan $0 \le r \le n$ maka

Kombinasi r objek dari n objek dinotasikan dengan persamaan :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{(Rosen, 2012).}$$

Contoh :

Berapa banyak cara untuk memilih 5 pemain tenis dari 10 pemain tenis yang ada untuk mengikuti kejuaraan?

Penyelesaian:

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!(2)!} = 6$ cara.

Misalkan permutasi yang berbeda dari n objek, dengan $n_1$ banyaknya objek yang tidak dapat dibedakan untuk jenis 1, $n_2$ banyaknya objek yang tidak dapat dibedakan untuk jenis 2, ........, dan $n_k$ banyaknya objek yang tidak dapat dibedakan untuk jenis k maka $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ (Rosen, 2012).

Contoh:

Berapa banyak cara untuk membagikan masing-masing 5 kartu kepada 4 pemain dari setumpuk kartu *bridge*?

Penyelesaian:

$$= \frac{52!}{5!5!5!5!32!} \text{ cara}$$