PENENTUAN JUMLAH GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL BERORDE LIMA TANPA GARIS PARALEL

(Skripsi)

Oleh

GRITA TUMPI NAGARI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDARLAMPUNG
2016

ABSTRAK

PENENTUAN JUMLAH GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL BERORDE LIMA TANPA GARIS PARALEL

Oleh

GRITA TUMPI NAGARI

Graf $G(V,E)$ dikatakan terhubung apabila terdapat paling sedikit satu *path* di antara setiap pasang titik di G. Apabila tidak ada *path* yang menghubungkan sepasang titik di G maka disebut graf tak terhubung. Suatu graf dikatakan graf berlabel jika setiap titik atau sisinya diberi label atau nama tertentu (dengan dua titik atau dua sisi tidak memiliki label yang sama). Suatu garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *loop*. Dua garis atau lebih yang menghubungkan titik-titik yang sama disebut garis paralel. Jika diberikan 5 titik dan garis lebih besar atau sama dengan satu, maka banyak graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel yang terbentuk. Pada penelitian ini didiskusikan jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$ dengan diperoleh rumus sebagai berikut:

$$N\left(G'_{5,m}\right) = \binom{m+4}{4} + 10 \times \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

dengan $N\left(G'_{5,m}\right)$ adalah jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

Kata kunci: graf, graf tak terhubung, garis paralel, dan *loop*

ABSTRACT

COUNTING THE NUMBER OF DISCONNECTED LABELLED GRAPH WITH ORDER FIVE WITHOUT PARALLEL EDGES

By

GRITA TUMPI NAGARI

A graph G(V,E) is connected if there exists at least one path between every pair of vertices in G. Otherwise, G is disconnected. A graph is called labelled graph if each vertex or each edge is assigned a label or unique name (i.e., no two vertices or two edges have the same label). An edge having the same initial and end point is called a loop, and two or more edges that connect the same vertices are called parallel edges. Given five vertices and at least one edge, there are a lot of disconnected labelled graph without parallel edges could be formed. In this research, we found that the number of disconnected labelled graph without parallel edges for $n = 5$ and $m \geq 1$ can be obtained with the following formula:

$$N(G'_{5,m}) = \binom{m+4}{4} + 10 \times \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

N$(G'_{5,m})$ is the number of disconnected labelled graph without parallel edges for $n = 5$ and $m \geq 1$.

Keyword: graph, disconnected graph, parallel edges, and loop

PENENTUAN JUMLAH GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL BERORDE LIMA TANPA GARIS PARALEL

Oleh

GRITA TUMPI NAGARI

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS
Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **PENENTUAN JUMLAH GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL BERORDE LIMA TANPA GARIS PARALEL**

Nama Mahasiswa : *Grita Tumpi Nagari*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031032

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Amanto, S.Si., M.Si.**
NIP 19631108 198902 2 001	NIP 19730314 200012 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **26 Februari 2016**

PERNYATAAN

Nama	: Grita Tumpi Nagari
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1217031032
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri. Skripsi ini juga tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas Lampung atau institusi lain.

Bandar Lampung, Maret 2016

Grita Tumpi Nagari
NPM. 1217031032

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Desa Jatimulyo, Kecamatan Jatiagung, Lampung Selatan pada 21 Agustus 1993, sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara, dari pasangan Bapak Sarwoko dan Ibu Sumarni. Penulis memiliki dua orang kakak perempuan bernama Jati Woro Luh Ambarini dan Retno Dipati Gorami.

Pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan penulis pada tahun 2006 di SDN 3 Jatimulyo Lampung Selatan, Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan pada tahun 2009 di SMP Al-Azhar 3 Bandar Lampung, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) diselesaikan pada tahun 2012 di SMA Al-Azhar 3 Bandar Lampung.

Pada pertengahan tahun 2012 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswa, penulis tergabung dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Metematika (Himatika) FMIPA Unila sebagai anggota bidang kesekretariatan pada periode 2013/2014 dan 2014/2015. Pada tahun 2012-2013 penulis juga tergabung dalam organisasi English Society of Universitas Lampung (Eso Unila) sebagai anggota muda (*new member*), tahun 2014 sebagai staf *Creativity and Financial Department* (Bidang Dana dan Usaha), dan tahun 2015 sebagai *General Treasurer* (Bendahara Umum). Selain itu, penulis juga pernah mendapatkan beasiswa Peningkatan Prestasi Akademik (PPA) pada tahun ajaran 2013/2014 dan 2014/2015.

Pada awal tahun 2015, penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. Pada pertengahan tahun 2015 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Mekar Sari, Kabupaten Tulang Bawang Barat.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil 'alamiin dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT, kupersembahkan hasil karyaku untuk orang-orang yang selalu mengasihi, menyayangi, dan memotivasiku dalam segala hal.

Bapak dan Ibu tercinta yang telah membesarkanku dan menyayangiku dengan penuh kasih sayang yang tak terhingga serta selalu mendoakan dan memberi motivasi kepadaku.

Kakak-kakakku dan keponakanku serta seluruh keluarga besar yang selalu memberi motivasi, semangat dan kecerian serta mendoakan kesuksesanku.

Dosen pembimbing dan penguji yang tiada henti-hentinya memberikan ilmu dan pelajaran berharga kepadaku.

Sahabat-sahabatku yang selalu berbagi kebahagiaan, keceriaan, saling mendukung, dan menyemangati.

Tidak ada kesuksesan tanpa perjuangan. Selalu ada jalan menuju setiap impian.

Man jadda wa jadda*. Karena hanya yang bersungguh-sungguhlah yang akan berhasil.*

(Negeri Lima Menara)

Janganlah kamu bersikap lemah, dan janganlah pula kamu bersedih hati, padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi derajatnya, jika kamu orang-orang yang beriman.

(Q.S. Ali-Imran: 139)

Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan?

(Q.S. Ar-Rahman: 25)

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan atas kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan hidayah-Nyalah skripsi yang berjudul “Penentuan Jumlah Graf Tak Terhubung Berlabel Berorde Lima Tanpa Garis Paralel” dapat diselesaikan tepat pada waktunya. Selain itu, solawat serta salam selalu tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, lantunan doa dan ucapan terimakasih penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku dosen pembimbing pertama yang telah memberikan bimbingan dan arahan serta motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. selaku pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku pembimbing akademik yang selalu memberi saran dan dukungan serta motivasi selama masa perkuliahan.

5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Bapak Sarwoko dan Ibu Sumarni tercinta yang telah membesarkan, mendidik, dan memberi kasih sayang yang begitu besar serta telah menjadi inspiratorku.
8. Mbak Retno, Mbak Ambar, dan Mas Yudi yang selalu mendoakan, memotivasi, dan mendukungku.
9. Babara Jati Mika Rahil dan Nola Jati Nimpuno Muliani yang selalu memberi kecerian.
10. Kesayanganku ‘RUSUH’ (Anisa, Citra, Hana, Lina, Naelu, Merda, dan Sella) yang selalu berbagi semangat, keceriaan, serta motivasi selama perkuliahan.
11. Yunda Umi Nur Arifah yang selalu memberi keceriaan dan memotivasiku.
12. Keluarga besar ESo-Unila dan Himatika yang telah memberi kesempatan untuk menjadi bagiannya.
13. Matematika 2012 atas keceriaan dan kebersamaannya selama ini.
14. Seluruh rekan-rekan yang tidak dapat disebutkan satu persatu oleh penulis.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat Penulis harapkan.

Bandarlampung, Maret 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

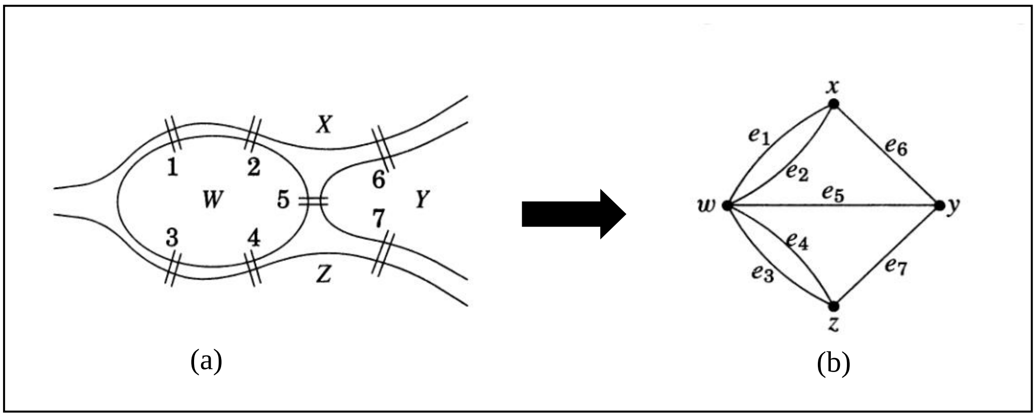
I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang hingga kini memiliki banyak terapan dalam berbagai bidang, diantaranya pada bidang fisika, teknik, sosial, kimia, dan biologi. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut, yaitu dengan menyatakan objek tersebut sebagai titik (noktah atau bulatan) dan hubungan antara objek sebagai garis atau sisi.

Leonhard Euler, matematikawan asal Swiss, merupakan orang yang pertama kali memperkenalkan konsep teori graf yaitu pada penyelesaian masalah Jembatan Konigsberg. Di Kota Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama Kaliningrad, terdapat Sungai Pregel yang mengalir mengitari Pulau Kneiphof dan membagi pulau tersebut menjadi empat daratan. Kemudian ada tujuh jembatan yang menghubungkan daratan tersebut. Beberapa penduduk setempat mengira mungkin bisa melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Namun, sebagian penduduk kota sepakat bahwa tidak mungkin melalui setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya.

Pada tahun 1736, Leonhard Euler merupakan orang pertama yang berhasil menemukan jawaban atas masalah tersebut dengan pembuktian yang sederhana. Euler memodelkan masalah ini dalam bentuk graf dengan menyatakan daratan sebagai titik (simpul atau *vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis (sisi atau *edge*). Euler mengatakan bahwa seseorang tidak mungkin melalui tujuh jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula jika banyaknya jembatan pada setiap daratan berjumlah ganjil.



Gambar 1. (a) Jembatan Konigsberg. (b) Graf yang merepresentasikannya

Suatu graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi yang menghubungkan ke semua titik lainnya disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan n titik, dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $(n-1)$, sehingga banyaknya sisi pada graf lengkap dengan n titik adalah $n(n-1)/2$. Misalkan diberikan graf lengkap dengan n = 4 , maka terdapat 6 sisi yang menghubungkan ke empat titik tersebut.

Graf berlabel adalah suatu graf yang titik atau sisinya memiliki label atau nama. Jika titik-titiknya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan titik.

Jika sisi-sisinya yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi, sedangkan jika keduanya, titik dan sisi, yang diberi label, maka pelabelannya disebut pelabelan total (pelabelan titik dan garis). Menurut Deo (1989), banyaknya graf berlabel, khususnya *tree* (pohon) berlabel, yang dapat dibentuk bila diberikan *n* buah titik dengan $n \geq 2$ adalah n^{n-2}.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan yang pesat, penelitian mengenai teori graf semakin banyak, diantaranya penelitian Winarni (2015) tentang menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel (*loop* diijinkan) jika diberikan n titik dan m garis dengan $n = 3{,}4$ dan $m \geq 1$. Untuk $n = 3$ dan $m \geq 1$, jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah $G(l)_{3,m} = \binom{2m+2}{2}$; untuk $n = 4$ dan $m = 1$, jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah $G(l)_{4,1} = 10$; dan untuk $n = 4$ dan $m > 1$, jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah

$G(l)_{4,m} = \binom{3m+1}{3} - \binom{m+1}{3} + \binom{2m+2}{2}$.

Selain itu, pada tahun yang sama Sandika (2015) juga melakukan penelitian graf tentang penentuan jumlah graf berlabel tak terhubung tanpa *loop* dengan $n = 5$, $m \geq 1$, dan $1 \leq r \leq 6$ yang dapat ditentukan dengan kaidah perkalian berikut ini:

Untuk $r = 1$ diperoleh $N(G_{5,m,1}) = 10$

Untuk $r = 2$ diperoleh $N(G_{5,m,2}) = 45 \times (m-1)$

Untuk $r = 3$ diperoleh $N(G_{5,m,3}) = 120 \times \binom{m-1}{2}$

Untuk $r = 4$ diperoleh $N(G_{5,m,4}) = 85 \times \binom{m-1}{3}$

Untuk $r = 5$ diperoleh $N(G_{5,m,5}) = 30 \times \binom{m-1}{4}$

Untuk $r = 6$ diperoleh $N(G_{5,m,6}) = 5 \times \binom{m-1}{5}$

dengan:

n	: banyaknya titik
m	: banyaknya garis
r	: banyaknya garis maksimal yang membuat graf tak terhubung dengan garis paralel dihitung satu
$N(G_{5,m,r})$	: jumlah graf dengan *n* titik, *m* garis, dan *r* garis maksimal yang membuat graf tak terhubung dengan garis paralel dihitung satu

Sehingga jumlah graf berlabel tak terhubung tanpa *loop* dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ adalah sebagai berikut.

$$N(G_{n,m}) = \sum_{r=1}^{6} N(G_{n,m,r})$$

$$= N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$$

$$= 10 + 45(m-1) + 120\binom{m-1}{2} + 85\binom{m-1}{3} + 30\binom{m-1}{4} + 5\binom{m-1}{5}$$

Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian Winarni (2015) dan Sandika (2015) tersebut apabila diberikan $n = 5$ dan $m \geq 1$.

1.2 Batasan Masalah

Pembahasan pada penelitian ini dibatasi hanya untuk graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ serta $m \geq 1$, dengan *n* adalah banyaknya titik dan *m* adalah banyaknya sisi yang diberikan.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan banyaknya pola-pola yang terbentuk dan jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel yang terbentuk bila diberikan n titik dan m garis, dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menambah pengetahuan tentang teori graf, khususnya graf tak terhubung.
2. Sebagai bahan rujukan atau sumber referensi bagi pembaca apabila ingin melakukan penelitian yang berkaitan dengan teori graf.

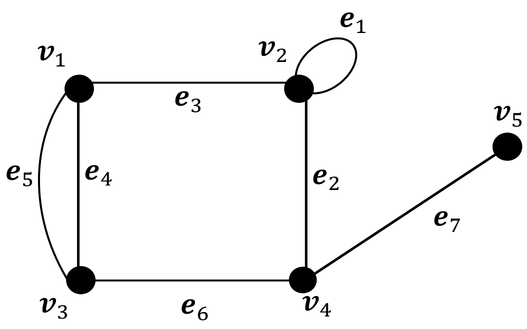
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep-konsep dasar teori graf, barisan aritmatika orde tinggi, dan teknik pencacahan yang berkaitan dengan penelitian yang akan dilakukan.

2.1 Konsep-konsep Dasar Graf

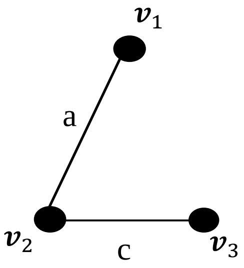
Istilah-istilah dan definisi yang digunakan pada subbab ini diambil dari Deo (1989).

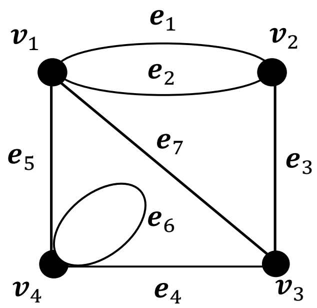
Graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan tak terurut suatu himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, ...\}$ merupakan himpunan titik, $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, ...\}$ merupakan himpunan sisi atau garis dari pasangan tak terurut $V(G)$.



Gambar 2. Contoh graf dengan *n* = 5 dan *m* = 7

Suatu sisi atau garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut sebagai *loop*, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan titik-titik yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, sedangkan jika memuat *loop* dan garis paralel, maka disebut graf tak sederhana.





Gambar 3. (a) Graf sederhana. (b) Graf tidak sederhana

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa gambar (a) merupakan contoh graf sederhana dengan tiga titik dan dua garis, sedangkan gambar (b) merupakan graf tidak sederhana dengan *loop* e_6 dan garis paralel e_1 dan e_2.

Misalkan v_j merupakan titik ujung sisi e_j pada suatu graf G, v_j dan e_j dikatakan *incidence* (menempel) satu sama lain. Dua sisi tak paralel dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika keduanya menempel pada suatu titik yang sama. Dua titik dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika terdapat garis yang menghubungkan keduanya.

Misalkan pada Gambar 3 (a) titik v_1 menempel pada garis a, titik v_2 menempel pada garis a dan c, dan titik v_3 menempel pada garis c. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, titik v_2 bertetangga dengan v_1 dan v_3, serta titik v_3 bertetangga dengan v_2.

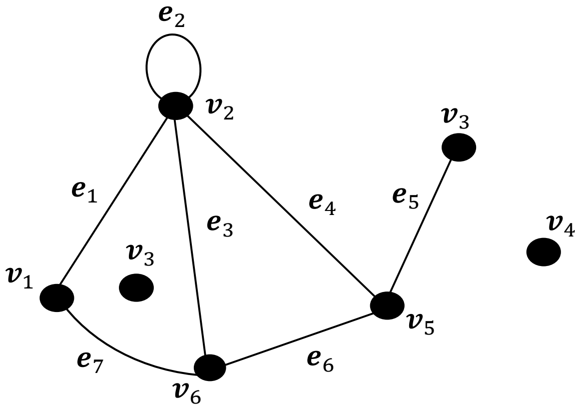
Akan tetapi titik v_3 tidak bertetangga dengan titik v_1 karena tidak ada garis yang menghubungkan keduanya.

Misalkan v_j adalah suatu titik pada graf *G*. Banyaknya sisi yang menempel pada suatu titik v_j, dengan sisi pada *loop* dihitung ganda, disebut sebagai derajat (*degree*) dari titik v_j, dinotasikan dengan $d(v_j)$. Misalkan pada Gambar 3 (b), $d(v_1)$ = 4, $d(v_2)$ = 3, $d(v_3)$ = 3, dan $d(v_4)$ = 4. Titik yang berderajat nol atau dengan kata lain tidak ada sisi yang menempel pada titik tersebut disebut titik isolasi, sedangkan titik yang berderajat satu disebut titik *pendant* atau daun.

Walk suatu graf *G* adalah suatu barisan berhingga tak nol yang bergantian antara titik dan garis yang diawali dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap garis menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Dalam *walk*, titik dapat muncul dua kali atau lebih, tetapi sebaliknya untuk garis dalam *walk*. *Walk* yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *close walk*, sedangkan jika titik awal dan titik akhirnya berbeda disebut *open walk*. *Open walk* yang titiknya tidak muncul dua kali atau lebih disebut *path*, sedangkan *circuit* adalah *close walk* yang titiknya tidak muncul dua kali atau lebih, kecuali titik awal dan titik akhir.

Pada Gambar 1, salah satu contoh *walk* adalah $v_5e_7v_4e_6v_3e_5v_1e_3v_2e_1v_2e_2v_4$, $v_1e_5v_3e_6v_4e_7v_5$ adalah contoh *path*, dan $v_1e_4v_3e_6v_4e_2v_2e_3v_1$ adalah contoh *circuit*.

Suatu graf *G* dikatakan terhubung jika terdapat paling sedikit satu *path* diantara setiap pasang titik di *G*. Apabila tidak ada *path* yang menghubungkan sepasang titik di *G* maka disebut graf tak terhubung.



Gambar 4. Graf tak terhubung

Berdasarkan Gambar 4, graf tersebut merupakan graf tak terhubung karena titik v_4 dan v_7 tidak terhubung dengan titik v_1, v_2, v_3, v_5, dan v_7. Apabila titik v_4 dan v_7 dihapuskan maka graf tersebut disebut graf terhubung.

Suatu graf yang setiap titiknya diberi nama atau label khusus (dengan tidak ada dua titik memiliki label yang sama) disebut graf berlabel. Perbedaan antara graf berlabel dan graf tak berlabel sangat penting dalam menghitung banyaknya graf yang berbeda. Gambar 4 merupakan contoh graf berlabel karena setiap titik dan garisnya diberi label.

2.2 Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Definisi 2.2.1 (Rosen, 2012)

Suatu barisan pada himpunan *S* didefinisikan sebagai suatu fungsi yang domainnya merupakan himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$), umumnya himpunan bilangan $\{0,1,2,\ldots\}$ atau $\{1,2,3,\ldots\}$, dan *range*-nya merupakan himpunan bilangan *S*. Biasanya dinotasikan dengan $\{a_n\}$ atau a_n.

Barisan terbagi menjadi beberapa macam, di antaranya barisan geometri dan barisan aritmatika. Barisan geometri adalah barisan yang berbentuk $a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$ dengan suku pertama barisan geometri ‘a’ dan rasio tetap ‘r’ adalah bilangan real. Sedangkan barisan aritmatika merupakan barisan yang berbentuk $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$ dengan suku pertama barisan aritmatika ‘a’ dan beda tetap ‘d’ adalah bilangan real (Rosen, 2012).

Definisi 2.2.2 (Alonso, 2000)

Diberikan barisan bilangan $\{a_m\}$ seperti berikut.

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \tag{2.2.1}$$

Beda pertama dari barisan (2.2.1) adalah

$$D_0^1, D_1^1, D_2^1, \dots, D_m^1$$

dengan

$$D_m^1 = a_{m+1} - a_m$$

Secara rekurensi, definisi beda orde ke-*k* dari barisan (2.2.1) dengan orde *k-1* sebagai beda sebelumnya adalah sebagai berikut.

$$D_0^k, D_1^k, D_2^k, \dots, D_m^k, \dots$$

dengan

$$D_m^k = D_{m+1}^{k-1} - D_m^{k-1} \tag{2.2.2}$$

perhatikan bahwa (2.2.2) benar untuk $k = 1$ jika ditulis $a_m = D_m^0$.

Proposisi 2.2 (Alonso, 2000)

Diberikan barisan pada (2.2.1), yaitu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. Jika terdapat polinomial *p(x)* berderajat *k* dengan koefisien *A* sehingga $a_m = p(m)$ untuk *m* = 0,1,2,3, ... maka barisan tersebut adalah barisan aritmatika orde *k* dengan beda adalah *k!A*.

Bukti:

Misalkan $p(x) = Ax^k + Bx^{k-1} + Cx^{k-2} + \cdots$, maka

$$a_m = Am^k + Bm^{k-1} + Cm^{k-2} + \cdots$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} D_m^1 &= a_{m+1} - a_m \\ &= [A(m+1)^k + B(m+1)^{k-1} + \cdots] - [Am^k + Bm^{k-1} + \cdots] \\ &= A[(m+1)^k - m^k)] + B[(m+1)^{k-1} - m^{k-1}] + \cdots \\ &= Akm^{k-1} + \cdots \end{aligned}$$

maka untuk beda pertama dapat dibentuk $p_1(x) = Akx^{k-1} + \cdots$ yang berderajat *k-1* dengan koefisien pertama *Ak* sehingga $D_m^1 = p_1(x)$.

Dengan mengulang proses yang sama sebanyak k-kali dapat disimpulkan bahwa:

$$D_m^k = p_k(m)$$

untuk polinomial $p_k(m)$ berderajat nol dengan koefisien pertama *k!A* sehingga $D_m^k = k!\,A$ untuk *m* = 0,1,2,3,... ■

Berdasarkan Proposisi 2.2 dari barisan (2.2.1), terdapat polinomial derajat *k*, $p(x) = Ax^k + Bx^{k-1} + Cx^{k-2} + \cdots$ dengan $a_m = p(m)$ untuk *m* = 0,1,2,3,..., maka barisan (2.2.1) yaitu:

$$a_m = Am^k + Bm^{k-1} + Cm^{k-2} + \cdots$$

adalah barisan aritmatika berorde *k* dengan beda pada orde *k* adalah sama.

2.3 Teknik-teknik Pencacahan

Istilah-istilah pada subbab ini diambil dari Munir (2005).

Misalkan n merupakan bilangan bulat positif. Besaran *n!* (dibaca "n faktorial") didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif n sampai dengan 1, dinotasikan dengan

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(1)=n!$$

Permutasi merupakan sebarang pengaturan sekumpulan objek dalam suatu urutan tertentu. Banyaknya permutasi r dari n objek adalah jumlah kemungkinan r buah objek yang dipilih dari n buah objek dalam setiap pengaturan, dinotasikan dengan

$$P_r^n = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

untuk setiap $n,r \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le n$. Dalam permutasi tidak berlaku perulangan, yakni objek yang sudah terpilih tidak dapat dikembalikan. Selain itu, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada objek yang sama.

Kombinasi dari n objek dengan pengambilan sebanyak r objek dalam setiap pengambilan terdiri dari semua kumpulan r objek yang mungkin tanpa memandang urutan pengaturannya. Banyaknya kombinasi n objek dengan pengambilan sebanyak r objek dapat dirumuskan dengan

$$C_r^n = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

untuk setiap $n,r \in \mathbb{N}$, $0 \le r \le n$.

III. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan diberikan tempat dan waktu penelitian, penelitian yang telah dilakukan yang berkaitan, serta metode yang digunakan dalam penelitian ini.

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun akademik 2015-2016.

3.2 Penelitian yang Telah Dilakukan

Diberikan $m, n \in N$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.

1) Graf g_n merupakan graf sederhana dengan n titik. Banyaknya graf g_n adalah

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2) Graf $g_n(m)$ merupakan graf sederhana dengan n titik dan m garis. Banyaknya graf $g_n(m)$ adalah

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

(Agreusson dan Raymon, 2007).

Winarni (2015) melakukan penelitian mengenai graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel. Diberikan $n = 3,4$ dan $m \geq 1$. $G(l)_{n,m}$ adalah jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel, maka:

1) Untuk $n = 3$ dan $m \geq 1$ jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah $G(l)_{3,m} = \binom{2m+2}{2}$
2) Untuk $n = 4$ dan $m = 1$, jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah $G(l)_{4,1} = 10$
3) Untuk $n = 4$ dan $m > 1$, jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel adalah $G(l)_{4,m} = \binom{3m+1}{3} - \binom{m+1}{3} + \binom{2m+2}{2}$

Selanjutnya, Sandika (2015) juga melakukan penelitian graf tentang penentuan banyaknya graf berlabel tak terhubung tanpa *loop* dengan $n = 5$, $m \geq 1$, dan $1 \leq r \leq 6$ yang dapat ditentukan dengan kaidah perkalian:

Untuk $r = 1$ diperoleh $N(G_{5,m,1}) = 10$

Untuk $r = 2$ diperoleh $N(G_{5,m,2}) = 45 \times (m-1)$

Untuk $r = 3$ diperoleh $N(G_{5,m,3}) = 120 \times \binom{m-1}{2}$

Untuk $r = 4$ diperoleh $N(G_{5,m,4}) = 85 \times \binom{m-1}{3}$

Untuk $r = 5$ diperoleh $N(G_{5,m,5}) = 30 \times \binom{m-1}{4}$

Untuk $r = 6$ diperoleh $N(G_{5,m,6}) = 5 \times \binom{m-1}{5}$

dengan

n : banyaknya titik

m : banyaknya garis

r : banyaknya garis maksimal yang membuat graf tak terhubung dengan garis paralel dihitung satu

$N(G_{5,m,r})$: jumlah graf dengan *n* titik, *m* garis, dan *r* garis maksimal yang membuat graf tak terhubung dengan garis paralel dihitung satu

Sehingga jumlah graf berlabel tak terhubung tanpa *loop* dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ adalah sebagai berikut.

$$N(G_{n,m}) = \sum_{r=1}^{6} N(G_{n,m,r})$$
$$= N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$$
$$= 10 + 45(m-1) + 120\binom{m-1}{2} + 85\binom{m-1}{3} + 30\binom{m-1}{4} + 5\binom{m-1}{5}$$

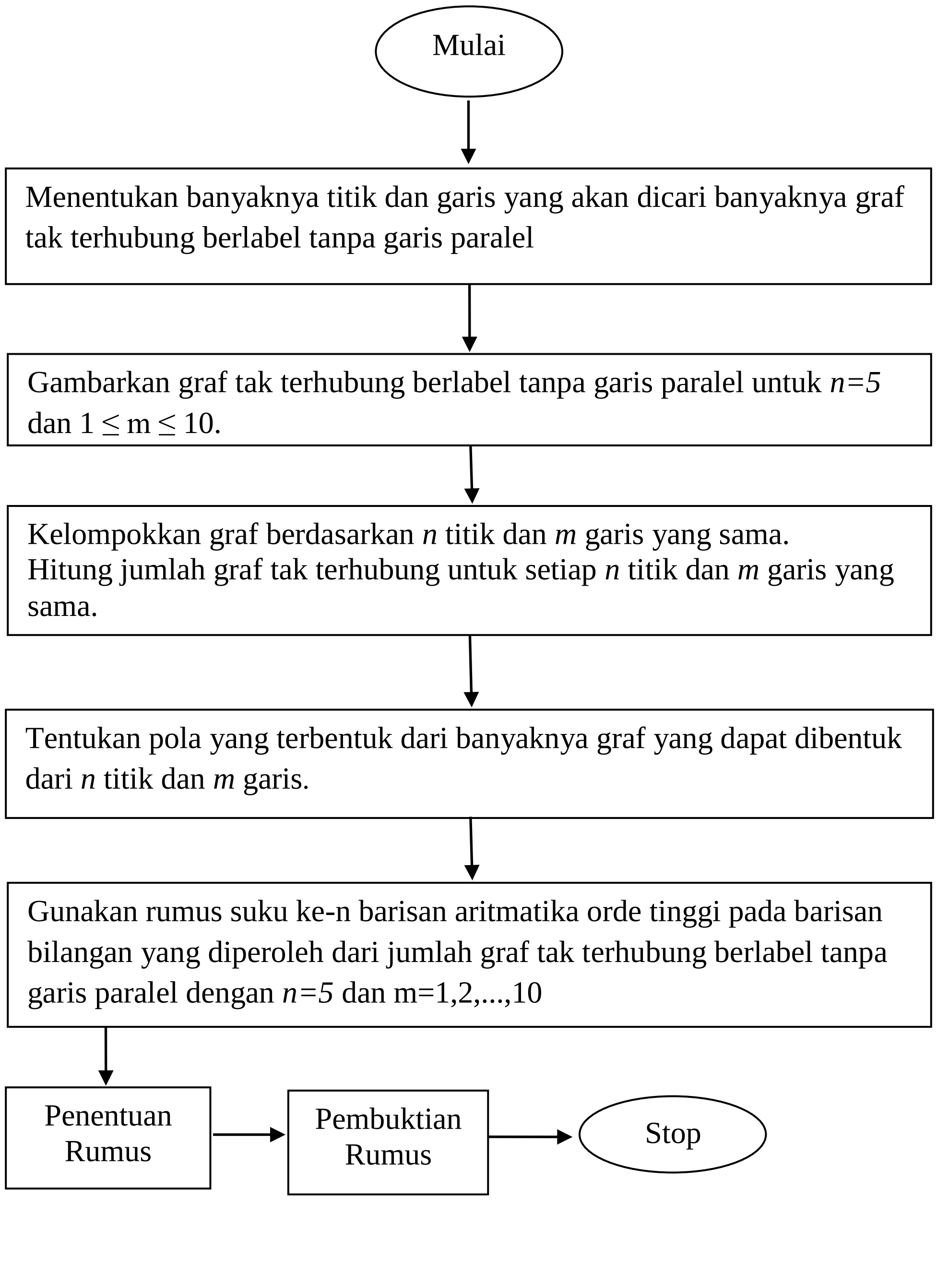
3.3 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan banyaknya titik dan garis yang akan dicari banyaknya graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel, yakni $n = 5$ dan $1 \leq m \leq 10$.
2. Menggambarkan graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $1 \leq m \leq 10$ dengan *n* adalah banyaknya titik dan *m* adalah banyaknya garis.
3. Mengelompokkan graf tak terhubung untuk *n* titik dan *m* garis yang sama.
4. Menghitung jumlah graf tak terhubung untuk setiap *n* titik dan *m* garis yang sama.
5. Menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya graf yang dapat dibentuk dari *n* titik dan *m* garis.

6. Menentukan rumus secara umum untuk menghitung jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk *n* titik dan *m* garis.
7. Membuktikan rumus yang terbentuk.

Penyajian dalam bentuk diagram alir dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 5. Diagram Alir Metode Penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan observasi dan hasil konstruksi graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Pola-pola bentuk graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$ ditentukan berdasarkan banyaknya *loop* pada satu titik dan banyaknya garis bukan *loop* yang menyebabkan graf tak terhubung.

2. Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$, $1 \leq m \leq 10$, $g = 0$, dan $1 \leq \ell_i \leq 5$ dengan $i = 1,2, \ldots ,10$ merupakan banyak *loop* pada satu titik dapat dirumuskan secara umum, yakni:

$$N(G'_{5,m}) = \binom{m+4}{4}$$

   dengan:

   $N(G'_{5,m})$ = jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk 5 titik dan *m* garis.

3. Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis untuk *n* titik, *m* garis, dan g garis bukan *loop* dapat dirumuskan secara umum, yakni:

   Untuk $g = 1$, $N(G'_{5,m,1}) = 10\binom{m+3}{4}$; $1 \leq m \leq 10$

Untuk $g = 2$, $N(G'_{5,m,2}) = 45\binom{m+2}{4}$; $2 \leq m \leq 10$

Untuk $g = 3$, $N(G'_{5,m,3}) = 120\binom{m+1}{4}$; $3 \leq m \leq 10$

Untuk $g = 4$, $N(G'_{5,m,4}) = 85\binom{m}{4}$; $4 \leq m \leq 10$

Untuk $g = 5$, $N(G'_{5,m,5}) = 30\binom{m-1}{4}$; $5 \leq m \leq 10$

Untuk $g = 6$, $N(G'_{5,m,6}) = 5\binom{m-2}{4}$; $6 \leq m \leq 10$

dengan:

$N(G'_{n,m,g})$ = jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel jika diberikan *n* titik, *m* garis, dan g garis bukan *loop*.

4. Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$ adalah penjumlahan dari jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$, $1 \leq m \leq 10$, $g = 0$, dan $1 \leq \ell_i \leq 5$, $i = 1,2,\dots,10$ dengan jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$, $1 \leq m \leq 10$, $1 \leq g \leq 6$, dan $1 \leq \ell_i \leq 5$ dengan $i = 1,2,\dots,9$ merupakan banyaknya *loop* pada satu titik dapat dirumuskan secara umum, yakni:

$$N(G'_{5,m}) = N(G'_{5,m}) + \sum_{g=1}^{6} N(G'_{5,m,g})$$

$$= \binom{m+4}{4} + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5}) + N(G'_{5,m,6})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10 \times \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

dengan:

$N(G'_{5,m})$ = jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan rumus umum jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n \geq 6$ dan $m = 1,2,3,4,5, \ldots$

DAFTAR PUSTAKA

Agreusson, G. and Raymon, D.G. 2007. *Graph Theory Modelling, Application, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education, Inc., New Jersey.

Alonso, J. 2000. Arithmetic Sequences of Higher Order. 21 April 2015 http//:www.fq.math.ca/scanned/14-2/alonso.pdf.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*, Edisi Ketiga. Informatika, Bandung.

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Seventh Edition. McGraw-Hill, New York. USA.

Sandika, G.K. 2015. Penentuan Banyaknya Graf Berlabel Tak Terhubung Tanpa *Loop* dengan Lima Titik. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Winarni, Y.D.S. 2015. Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Tanpa Garis Paralel. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.