PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NON LINEAR DENGAN METODE DEKOMPOSISI SUMUDU

Skripsi

Oleh

DESI EFIYANTI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRACT

SOLVING THE SECOND ORDER NON LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SUMUDU DECOMPOSITION METHOD

By

DESI EFIYANTI

A differential equation is a mathematical equation that relates some functions with its derivatives. There are linear and non linear differential equations. A non linear differential equation more difficult to be solved. A method that can be used to solve it is Sumudu decomposition method. This method contains Adomian decomposition method and Sumudu transform. Sumudu transform defined as

$$F_{(u)} = S\{f(t)\} = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}\ dt, \qquad u \in (-r_1, r_2), t \geq 0.$$

The general solution of Adomian decomposition method is

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,(t)$$

with non linear term defined as

$$Ny(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\,(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

with

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}$$

are Adomian polinomials, $i = 0,1,2, \dots$

Keywords : Ordinary differential equations, non linear ordinary differential equations, Sumudu transform, Adomian decomposition.

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NON LINEAR DENGAN METODE DEKOMPOSISI SUMUDU

Oleh

DESI EFIYANTI

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial yang memuat turunan biasa. Terdapat persamaan biasa linear dan non linear. Persamaan diferensial biasa non linear cenderung lebih sulit diselesaikan. Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan solusinya adalah metode dekomposisi Sumudu. Metode ini merupakan gabungan antara metode dekomposisi Adomian dan transformasi Sumudu. Transformasi Sumudu didefinisikan

$$F_{(u)} = S\{f(t)\} = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}\ dt, \qquad u \in (-r_1, r_2), t \geq 0.$$

Sedangkan solusi umum metode dekomposisi Adomian dinyatakan

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,(t)$$

Dengan suku non linearnya didefinisikan

$$Ny(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i\,(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

dengan

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}$$

adalah polinomial Adomian, dengan $i = 0,1,2, \dots$

Kata kunci : Persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa non linear, transformasi Sumudu, dekomposisi Adomian.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NON LINEAR DENGAN METODE DEKOMPOSISI SUMUDU

Oleh
DESI EFIYANTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NON LINEAR DENGAN METODE DEKOMPOSISI SUMUDU**

Nama Mahasiswa : Desi Efiyanti

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031018

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Azis, M.Si.	**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP 19610128 198811 2 001	NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Azis, M.Si.** .....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **21 Maret 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tagan di bawah ini :

Nama	: **Desi Efiyanti**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1217031018**
Program Studi	: **Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas atau Istitut lain.

Bandar Lampung, 21 Maret 2016

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

6000

Desi Efiyanti

NPM. 1217031018

RIWAYAT HIDUP

Penulis di lahirkan di GPM, Lampung Tegah tepatnya pada tanggal 01 Desember 1994, sebagai putri ke tiga dari pasangan Bapak Nawari dan Ibu Sukamti.

Penulis menamatkan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 01 Purwosari Lampung Timur pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 02 Kotagajah Lampung Tengah pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Kotagajah Lampung Tengah pada tahun 2012.

Pada tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam jurusan Matematika, melalui jalur SNMPTN Tulis. Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan sebagai Anggota Biro Dana dan Usaha periode 2013-2014.

Pada bulan Januari 2015 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Batu Ampar, Kecamatan Gedung Aji Baru, Kabupaten Tulang Bawang. Pada bulan Agustus 2015 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Lampung guna mengaplikasikan ilmu yang telah didapatkan sewaktu kuliah.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillahirobil'alamin serta dengan segala syukur, rahmat, dan hidayah serta karunia Allah SWT dapat memberikanku kesempatan untuk menuntut ilmu di Universitas Lampung.
Sebuah pengorbanan waktu, tenaga, fikiran, yang harus diluangkan demi menyelesaikan karya kecil ini sebagai syarat kelulusan. Kupersembahkan karya kecilku ini teruntuk:

Dua nama yang sangat berjasa yaitu Bapak (Bp Nawari) dan Mamak (Ibu Sukamti) yang selalu memberikan doa, semangat, dorongan, nasihat, dukungan moril maupun materil, kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga aku selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depanku. Bapak…Mamak…terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan kalian yang ikhlas tanpa kenal lelah berjuang separuh nyawa hingga segalanya demi hidupku.

Hidup ini terlalu berat untuk mengandalkan diri sendiri tanpa bantuan Allah SWT dan orang lain. Untuk itu kupersembahkan untaian terima kasih kepada saudara sekandungku yaitu Mbak (Eka Lindawati) dan Mamas (Hendro Suwanto) yang selalu memberi nasihat, dan dukungan, serta pengalaman yang lebih dahulu sebagai pembelajaran yang indah untukku.

Untuk ribuan tujuan yang harus dicapai, untuk jutaan impian yang akan di kejar, untuk sebuah pengharapan, agar hidup jauh lebih bermakna, tiada lain kalian adalah semangat terbesar dalam hidupku.

KATA INSPIRASI

Semakin tinggi cita-cita seseorang, semakin sedikit waktu yang digunakan untuk bersantai

Kegagalan itu hanya datang dari orang-orang yang suka memberi banyak alasan

Karena hanya pohon yang berbuah, yang akan dilempari orang dengan kayu dan batu

SEMANGATKU…

Ketika aku mulai merasa lelah, aku selalu ingat pesan dan raut wajah beliau ketika pertama kali menghantarkanku kuliah dan menaruh harapan besar di pundakku

SANWACANA

Alhamdulilahirabbil'alamin dengan rasa syukur kehadirat Allah SWT serta rahmat dan karunia Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul "PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA NON LINEAR DENGAN METODE DEKOMPOSISI SUMUDU" disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Lampung. Selesainya skripsi ini, adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si, selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu dan membimbing penulis selama menyusun skripsi.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D, selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberi banyak masukan dan arahan kepada penulis selama menyusun skripsi.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembahas yang memberi masukan dan evaluasi kepada penulis selama menyusun skripsi.
4. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D, selaku Pembimbing Akademik yang telah mengarahkan penulis dari awal sampai lulus kuliah.
5. Bapak Drs. Tiryono Rubby, M.Sc., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas lampung.
7. Dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Bapak dan Mamak ku tersayang yang telah memberikan motivasi, do'a, dan kasih sayang yang begitu besar serta dukungan moril maupun materil kepada penulis.
9. Mbak dan Mamas yang selalu memberi motivasi kepada penulis.
10. Sahabat yang kini menjadi Saudaraku Astuti, Siti, Maya, Tri, Ira, Rina, Yeni, Lina, Pipit, Agnes, Fitri, Siti. A, yang menjadi pendengar keluh kesah penulis saat menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
11. Teman-teman angkatan 2012 yang selalu memberikan motivasi dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini
12. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat berguna bagi pembaca sebagai acuan di penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung, 21 Maret 2016

Penulis

Desi Efiyanti

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL iii

DAFTAR GAMBAR iv

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah 1
1.2. Tujuan Penelitian..... 2
1.3. Manfaat Penelitian..... 3
1.4. Batasan Masalah..... 3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial..... 4
2.2 Persamaan Diferensial Biasa..... 4
2.3 Persamaan Diferensial Biasa Linear 5
2.4 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear..... 5
2.5 Orde Persamaan Diferensial Biasa..... 6
2.6 Derajat Persamaan Diferensial Biasa 7
2.7 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu..... 7
2.8 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua 8
2.9 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear Orde Dua..... 8
2.10 Masalah Nilai Awal (*Initial Value Problem*) 9
2.11 Deret Tak Hingga 9
2.11.1 Deret Pangkat..... 10
2.11.2 Deret Pangkat Dalam $(x - a)$..... 10
2.11.3 Deret Taylor 11
2.12 Transformasi Sumudu 11
2.13 Dekomposisi Adomian..... 16
2.14 Dekomposisi Sumudu 18

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian..... 20
3.2 Metode Penelitian 20

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Turunan ke-n Transformasi Sumudu 21
4.2 Tahapan Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Dekomposisi Sumudu 23
4.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Non Linear Dengan Metode Dekomposisi Sumudu..... 27
4.4 Aplikasi Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua Non Linear Dengan Metode Dekomposisi Sumudu 30

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan..... 43
5.2 Saran 44

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. Beberapa fungsi $F_{(u)}$ dan invers transformasi Sumudu $S^{-1}(F_{(u)})$ 14

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. Contoh masalah nyata dari persamaan diferensial biasa non linear 6

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan ilmu yang sangat penting dan terkenal sebagai induk dari segala ilmu, karena pada setiap bidang ilmu lain seperti fisika, kimia, ekonomi, komputer, dan ilmu lainnya melibatkan matematika. Oleh karena itu, matematika memilki cakupan kajian yang sangat luas. Salah satu kajian dalam matematika adalah persamaan diferensial.

Dalam aplikasinya, persamaan diferensial menggunakan formulasi matematika berupa penentuan suatu fungsi yang memenuhi suatu persamaan tertentu. Persamaan tersebut mengandung satu atau lebih turunan suatu fungsi yang tidak diketahui, dan hal itu sangat berguna untuk menyelesaikan berbagai permasalahan teknik, fisik, dan sosial yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Karena adanya permasalahan tersebut, maka diperlukan metode-metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini. Banyak sekali metode dalam menyelesaikan suatu permasalahan persamaan diferensial. Persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik seperti pemakaian transformasi, penggunaan subtitusi, dan penggunaan konstanta c sembarang. Namun, penyelesaian yang

sering ditemukan adalah penyelesaian diferensial linear, padahal kenyataannya permasalahan yang terjadi banyak ditemukan adalah tidak hanya diferensial linear tetapi permasalahan persamaan diferensial non linear. Pada penyelesaian, tidak semua solusi persamaan diferensial dapat diekspresikan sebagai fungsi polinomial, trigonometri, eksponensial, logaritma, dan hiperbolik.

Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan metode dekomposisi Sumudu untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa non linear pada orde dua. Dekomposisi Sumudu merupakan dekomposisi yang diperkenalkan oleh Gamake K.Watugala yang merupakan gabungan antara metode transformasi Sumudu dan dekomposisi Adomian. Transformasi Sumudu identik dengan transformasi Laplace, karena sifat-sifatnya hampir sama. Sedangkan pada dekomposisi Adomian lebih menekankan pada solusi non linearnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulis diantaranya :

1. Menganalisis tahapan penyelesaian aplikasi persamaan diferensial biasa orde dua non linear dengan metode dekomposisi Sumudu.
2. Mendapatkan hasil penyelesaian berupa relasi rekursif $y_i(t)$, $y_{i+1}(t)$ dengan $i = 0,1,2, \ldots$ lalu mencari solusi $y(t)$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini diantaranya :

1. Sebagai salah satu cara pemecahan masalah pada persamaan diferensial biasa orde dua non linear.
2. Dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya dengan persamaan diferensial yang lain.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi masalah pada jenis persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa orde dua non linear.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan diantara derivatif-derivatif yang dispesifikasikan pada suatu fungsi yang tidak diketahui nilainya, dan diketahui jumlah serta fungsinya (Birkhoff, 1978).

Contoh :

1. $\frac{d^2y}{d^2x} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

2. $\frac{\partial v}{\partial s} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = v$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dinamakan persamaan diferensial biasa (Munzir, 2009).

Contoh :

1. $m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right)$

2. $\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x)$

3. $x\,\frac{dy}{dx} + 5y = 6$

4. $x\frac{dy}{dx} = y(1 - x\,tan\,x) + x^2 \cos x$

2.3 Persamaan Diferensial Biasa Linear

Suatu persamaan diferensial biasa $F\left(x, y, y^1, \dots, y^{(n)}\right) = 0$ dikatakan linear jika F merupakan suatu fungsi linear dari peubah $y, y^1, \dots, y^{(n)}$.

Secara umum persamaan diferensial biasa linear dituliskan sebagai $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$, jadi linear di sini adalah linear terhadap variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya (Munzir, 2009).

Contoh :

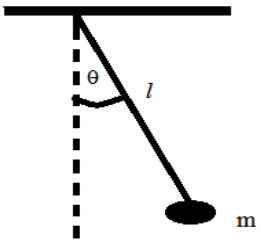
1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 6y = 2e^x$

3. $x\ \ \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - xy = \cos x$

2.4 Persamaan Diferensial Biasa Non Linear

Suatu persamaan diferensial yang tidak memiliki bentuk $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + a_n(x)y = g(x)$ dinamakan persamaan non linear. Sebuah contoh permasalahan fisik sederhana yang memiliki bentuk persamaan diferensial biasa non linear adalah gerakan bandul.



Gambar 1. Contoh masalah nyata dari persamaan diferensial biasa non linear

Sudut θ yang mengatur gerakan bandul sepanjang l membuat gerakan ke arah vertikal, memenuhi persamaan non linear $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$. Contoh lain persamaan diferensial biasa non linear adalah

1. $yy' + xy'' = 0$

   Persamaan diferensial non linear, karena $F(x, y, y', y'') = yy' + xy''$ polinom berpangkat dua dalam y, y', y''.

2. $\sin xy \frac{dy}{dx} + \cos\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

   Persamaan diferensial non linear, karena F tak berbentuk polinom dalam $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ (Munzir, 2009).

2.5 Orde Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke n (Kartono, 2000).

Contoh:

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$; orde satu.

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$; orde tiga.

3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$; orde tiga.

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$; orde dua.

2.6 Derajat Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai *degree* (derajat) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat k (Kartono, 2000).

Contoh:

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$; derajat satu.

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$; derajat satu.

3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$; derajat dua.

4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + 2y = 6$; derajat tiga

2.7 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Suatu persamaan diferensial biasa orde satu adalah suatu persamaan yang memuat satu variabel bebas, biasanya dinamakan x, satu variabel tak bebas, biasanya dinamakan y, dan derivatif $\frac{dx}{dy}$. Suatu persamaan diferensial biasa orde satu tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Persamaan $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ dengan $f(x, y)$ adalah fungsi kontinu pada x dan y (Dafik, 1999).

Contoh :

1. $x\frac{dy}{dx} + 20y = 0$
2. $\frac{dy}{dx} - 3A\cos 3x + 3B\sin 3x = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2Ax + B$

2.8 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan Diferensial Biasa orde dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa yang turunan tertingginya adalah turunan kedua. Persamaan Diferensial Biasa orde 2 keatas dinamakan juga PDB orde lanjut (Dafik, 1999).

Contoh:

1. $y'' + y'\cos x - 3y = \sin 2x$
2. $P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y - \sin x = 0$

2.9 Persamaan Diferensial Non Linear Orde Dua

Bentuk umum persamaan diferensial non linear orde dua yaitu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left[x, \frac{dx}{dt}\right]$$

Salah satu contoh persamaan orde dua non linear adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Dengan μ adalah suatu konstanta positif. Hubungan antara persamaan

$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left[x, \frac{dx}{dt}\right]$ dan $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$

yaitu $F\left[x, \frac{dx}{dt}\right] = -\mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} - x$

Jika $y = \frac{dx}{dt}$ maka $\frac{d^2x}{dt^2} = F[x, y]$, atau

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= F[x, y] \end{aligned}\right\} \text{sistem persamaan diferensial non linear}$$

(L. Ross, 1984).

2.10 Masalah Nilai Awal (*Initial Value Problem*)

Secara umum, *problem* persamaan diferensial biasa selalu melibatkan nilai awal (*initial value*), yang dapat ditulis sebagai berikut

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$ dapat disebut sebagai masalah nilai awal (*initial value problem*) (Dafik, 1999).

2.11 Deret Tak Hingga

Jika $\{a_n\}$ suatu barisan dan $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots + a_n$ maka barisan $\{S_n\}$ disebut deret tak hingga. Deret tak hingga ini dinyatakan dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots + a_n$$

Bila $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ disebut suku-suku deret tak hingga, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ disebut jumlah parsial deret tak hingga. Jika S_n barisan jumlah-jumlah parsial, maka dapat ditulis sebagai

berikut:

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \ \dots$

Jadi $S_n = S_{n-1} + a_n$

Beberapa contoh deret tak hingga, antara lain adalah

2.11.1 Deret Pangkat

Deret pangkat dalam x mempunyai bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots$$

Deret pangkat ada 2 hal yang perlu diperhatikan:

1. Untuk nilai x berapa deret ini konvergen.
2. Untuk fungsi yang bagaimana deret tersebut akan konvergen, deret itu menyatakan jumlah $S(x)$ dari deret tersebut.

2.11.2 Deret Pangkat Dalam $(x - a)$

Deret pangkat dalam $(x - a)$ mempunyai bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ \dots$$

Himpunan konvergensinya salah satu dari ketiga jenis interval berikut:

1. Titik tunggal $x = a$.
2. Interval $(a - R,\ a + R)$ atau kedua titik ujungnya.
3. Seluruh garis bilangan R.

2.11.3 Deret Taylor

Definisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}{}_{(a)}}{n!}(x-a)^n = f_{(a)} + f'{}_{(a)}(x-a) + \frac{f''{}_{(a)}}{2!}(x-a)^2 + \ \ldots$$

$$+\frac{f^{n}{}_{(a)}}{n!}(x-a)^n + \ \ldots$$

Disebut deret Taylor dari f pada a. Hal khusus dari deret tersebut jika $a = 0$ disebut deret Maclaurine (Purcell, 2011).

2.12 Transformasi Sumudu

Transformasi Sumudu didefinisikan berdasarkan himpunan dari fungsi

$A = \{f(t) | \exists M, r_1, r_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{r_j}}, j = 1,2,$ jika $t\epsilon(-1)^j$x $[0, \infty)\}$

Dengan rumus

$$F_{(u)} = S\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}\, dt, \qquad u\epsilon\ (-r_{1,}, r_2\ )$$

Transformasi Sumudu ada jika $\int_0^{\infty} f(ut)\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_{\alpha}^{A} f(ut)\, dt$ konvergen ke nilai batasnya. Transformasi Sumudu identik dengan transformasi Laplace, karena sifat-sifat yang dimiliki oleh transformasi Sumudu identik dengan sifat-

sifat yang dimiliki oleh transformasi Laplace. Transformasi Laplace $F_{(s)}$dapat diubah menjadi transformasi Sumudu $F_{(s)}(u)$

dengan hubungan

$$F_{(u)} = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$$

dan inversnya

$$F_{(s)} = \frac{F_s\left(\frac{1}{s}\right)}{s}$$

Misalkan $F_{(t)}$ merupakan suatu fungsi dari t terdefinisi untuk $t > 0$. Kemudian integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, jika ada dinamakan suatu fungsi dari s, katakan $F_{(s)}$. Fungsi $F_{(s)}$ ini dinamakan transformasi Laplace dari $f(t)$ dan dinotasikan oleh $L\{f(t)\}$.

Jadi,

$$L\{f(t)\} = F_{(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Jika $L\{f(t)\} = F_{(s)}$ maka $f(t)$ dinamakan transformasi Laplace invers dari $F_{(s)}$ dan dinotasikan dengan $f(t) = L^{-1}\{F_{(s)}\}$. Kemudian untuk mencari $L^{-1}\{F_{(s)}\}$. Kita harus mencari suatu fungsi dari t yang transformasi Laplacenya adalah $F_{(s)}$. Akan ditunjukkan hubungan antara transformasi Sumudu dan transormasi Laplace

$$F_{(u)} = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$$

dan inversnya

$$F_{(s)} = \frac{F_s\left(\frac{1}{s}\right)}{s}$$

1. Untuk $F_{(u)} = 1$,

   Maka

   $F_{(1)} = \frac{F_S\left(\frac{1}{1}\right)}{s} = \frac{\frac{1}{1}}{s} = \frac{1}{s}$ untuk mencari nilai invers transformasi Sumudu

   $F_{(u)} = 1$ adalah sama dengan nilai invers transformasi Laplace $F_{(s)} = \frac{1}{s}$.

   Dengan kata lain $S^{-1}\left(F_{(u)}\right) = L^{-1}(F_{(s)}) = 1$

2. Untuk $F_{(u)} = u$,

   Maka

   $F_{(s)} = \frac{F_S\left(\frac{1}{s}\right)}{s} = \frac{\frac{1}{s}}{s} = \frac{1}{s^2}$ untuk mencari nilai invers transformasi Sumudu

   $F_{(u)} = u$ adalah sama dengan nilai invers transformasi Laplace $F_{(s)} = \frac{1}{s^2}$.

   Dengan kata lain $S^{-1}\left(F_{(u)}\right) = L^{-1}(F_{(s)}) = t$

3. Untuk $F_{(u)} = u^2$,

   Maka

   $F_{(s)} = \frac{F_S\left(\frac{1}{s^2}\right)}{s} = \frac{\frac{1}{s^2}}{s} = \frac{1}{s^3}$ untuk mencari nilai invers transformasi Sumudu

   $F_{(u)} = u^2$ adalah sama dengan nilai invers transformasi Laplace $F_{(s)} = \frac{1}{s^3}$

   Dengan kata lain $S^{-1}(F_{(u)}) = L^{-1}(F_{(s)}) = \frac{t^2}{2!}$

Begitu seterusnya untuk hubungan antara transformasi Sumudu dan transformasi Laplace.

Adapun beberapa invers transformasi Sumudu disajikan dalam tabel berikut :

Tabel 1. Beberapa fungsi $F_{(u)}$ dan invers transformasi Sumudu $S^{-1}(F_{(u)})$

No	$F_{(u)} = S\,(f(t))$	$f(t) = S^{-1}(F_{(u)})$
1	1	1
2	u	t
3	u^{n-1}	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ ,n = 1,2,\ldots$
4	u^{n-1}	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\ ,n > 0$
5	$\frac{1}{1-au}$	e^{at}
6	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\ ,n = 1,2,\ldots$
7	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
8	$\frac{u}{1+a^2u^2}$	$\frac{sin\ at}{a}$
9	$\frac{1}{1+a^2u^2}$	$cos\ at$
10	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$	$\frac{e^{bt}sin\ at}{a}$
11	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$	$e^{bt}\ cos\ at$
12	$\frac{u}{1-a^2u^2}$	$\frac{sinh\ at}{a}$
13	$\frac{1}{1-a^2u^2}$	$cosh\ at$
14	$\frac{u}{(1-bu)^2-a^2u^2}$	$\frac{e^{bt}sinh\ at}{a}$
15	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2-a^2u^2}$	$e^{bt}\ cosh\ at$
16	$\frac{u}{(1-bu)(1-au)}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}\ ,a \neq b$

No	$F_{(u)} = S\,(f(t))$	$f(t) = S^{-1}(F_{(u)})$
17	$\dfrac{1}{(1-bu)(1-au)}$	$\dfrac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}\ , a \neq b$
18	$\dfrac{u^3}{(1+a^2u^2)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
19	$\dfrac{u^2}{(1+a^2u^2)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$
20	$\dfrac{u}{(1+a^2u^2)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
21	$\dfrac{1}{(1+a^2u^2)^2}$	$\cos at - \dfrac{1}{2} at\sin at$
22	$\dfrac{u(1-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^2}$	$t\cos at$
23	$\dfrac{u^3}{(1-a^2u^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$
24	$\dfrac{u^2}{(1-a^2u^2)^2}$	$\dfrac{t\sinh at}{2a}$
25	$\dfrac{u}{(1-a^2u^2)^2}$	$\dfrac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$
26	$\dfrac{1}{(1-a^2u^2)^2}$	$\cosh at + \dfrac{1}{2}\, at\sinh at$
27	$\dfrac{u(1+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^2}$	$t\cosh at$
28	$\dfrac{u^5}{(1+a^2u^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$
29	$\dfrac{u^4}{(1+a^2u^2)^3}$	$\dfrac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
30	$\dfrac{u^3}{(1+a^2u^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$

(Setianingrum, 2013).

2.13 Dekomposisi Adomian

Misalkan persamaan

$$F(u) = g(t) \tag{2.1}$$

di mana operator diferensial F memuat bentuk linear atau nonlinear. Metode dekomposisi Adomian menguraikan bagian linear dari F menjadi $R + L$ dengan L adalah operator linear dan R adalah sisa operator linear, sedangkan bentuk non linear dari F dimisalkan N sehingga persamaan (2.1) menjadi

$$L(u) = g - Ru - Nu \tag{2.2}$$

Karena L adalah operator linear, maka L dapat ditentukan inversnya yaitu L^{-1}. Untuk $L = \frac{d}{dt}$ dan $L^{-1} = \int_0^t (.)dt$. Kemudian, dengan menerapkan L^{-1} pada kedua ruas persamaan (2.2) diperoleh

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.3}$$

Jadi ruas kiri persamaan (2.3) dapat dinyatakan dengan

$$L^{-1}Lu = \int_0^t Lu\, dt$$

$$= u(t) - u(0) \tag{2.4}$$

Kemudian substitusikan persamaan (2.4) ke persamaan (2.3), sehingga diperoleh

$$u(t) - u(0) = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$u = u(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.6}$$

Jika pada persamaan (2.6) diasumsikan $u_0 = u(0) + L^{-1}g$ maka akan diperoleh

$$u = u_0 - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.7}$$

Selanjutnya pada persamaan (2.7) diterapkan metode dekomposisi Adomian, yang mengasumsikan solusi u dalam bentuk deret sebagai berikut

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.8}$$

Bentuk non linear N_u dinyatakan dalam suatu polinomial khusus

$$N_u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.9}$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian non linear yang nilainya tergantung pada u_0,u_1,….u_n dan A_n dapat didefinisikan dengan

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$\text{dengan } n = 0,1,2,\ldots \tag{2.10}$$

dengan λ adalah suatu parameter. Jadi dengan menggunakan persamaan (2.10) A_n dapat diuraikan sebagai berikut

$$A_0 = N(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} N(u_0)$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} N(u_0) + \frac{{u_1}^2}{2!} \frac{d^2}{du_0} N(u_0)$$

$$A_3 = u_3 \frac{d}{du_0} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{{du_o}^2} N(u_0) + \frac{{u_1}^2}{2!} \frac{d^2}{du_0} N(u_0)$$

$$\vdots$$

Berdasarkan uraian A_n, diperoleh A_0 bergantung pada u_0. A_1bergantung pada u_0 dan u_1. A_2 bergantung pada u_0,u_1, u_2, dan seterusnya. Selanjutnya

subtitusikan persamaan (2.8) dan persamaan (2.9) ke persamaan (2.7), diperoleh solusi dari u sebagai berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.11) diperoleh relasi rekursi sebagai berikut

$u_1 = -L^{-1}R_0 - L^{-1}A_0$

$u_2 = -L^{-1}R_1 - L^{-1}A_1$

$u_3 = -L^{-1}R_2 - L^{-1}A_2$

$\vdots$

$u_{n+1} = -L^{-1}R_n - L^{-1}A_n$ (Widiya, 2013).

2.14 Dekomposisi Sumudu

Dekomposisi Sumudu merupakan gabungan antara transformasi Sumudu

$A = \{f(t) | \exists M, r_1, r_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{r_j}}, \ j = 1,2,$ jika $t\epsilon(-1)^j$x $[0, \infty)\}$

Dengan rumus

$$F_{(u)} = S\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(ut)e^{-t}\, dt, \qquad u\epsilon\ (-r_{1,}, r_2\ )$$

Transformasi Sumudu untuk turunan fungsi $f(t)$ adalah

$$S\{f^n(t)\} = \frac{F_{(u)}}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}$$

Dan dekomposisi Adomian

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} \text{ dengan } n = 0,1,2, \ldots$$

Gabungan ini terletak pada penyelesaian persamaan yang menggunakan keduanya. Dengan terlebih dahulu menerapkan transformasi Sumudu yang diketahui pada suatu persamaan. Setelah itu mengasumsikan solusi sebagai deret tak hingga, pada bentuk non linear menggunakan polinomial Adomian dan mencari relasi rekursif. Dengan menerapkan invers transformasi Sumudu $f(t) = S^{-1}F_{(u)}$, hasil invers untuk mencari relasi $y_{i,}$dengan $i = 0,1,2,..n$ dan menentukan $y(t)$ sebagai solusi akhir (Kumar, 2012).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu Dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2015/2016 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur dan menggunakan metode dekomposisi Sumudu. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

1. Menerapkan transformasi Sumudu pada persamaan diferensial biasa orde dua nonlinear yang diketahui.
2. Mendekomposisikan suku nonlinearnya ke dekomposisi Adomian sebagai $N_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.
3. Menerapkan invers transformasi Sumudu pada persamaan hasil transformasi.
4. Menyatakan solusi sebagai barisaan tak hingga $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$.
5. Mencari relasi rekurensi $y(t)$, dengan $y(t) = \sum_{n=o}^{\infty} y_n(t)$.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan metode dekomposisi Sumudu dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua non linear adalah dengan melihat turunan ke-n yaitu

$$S\{f^n(t)\} = \frac{F_{(u)}}{u^n} - \frac{f(0)}{u^n} - \frac{f'(0)}{u^{n-1}} - \ \dots - \frac{f^{n-1}(0)}{u}$$

dengan memasukkan nilai awal ke persamaan tersebut, lalu dengan transformasi Sumudu, dapat menghitung nilai invers transformasi Sumudu. Bentuk non linear dihitung menggunakan polinomial adomian

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} f\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k\right)\right]_{\lambda=0} \text{ dengan } i = 0,1,2, \dots$$

Pada persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dt^2} + (1-t)\frac{dy}{dt} - y = 2y^3$ dengan nilai awal $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$, diperoleh solusi yaitu

$$y(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \cdots$$

Deret tersebut membentuk kisaran $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ yang konvergen ke jumlah $\frac{1}{(1-t)}$ dengan $|t| < 1$

Pada persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t)^2 \frac{dy}{dt} + y - 2y^3 = -yt$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = -1$, diperoleh solusi yaitu

$$y(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots$$

Deret tersebut membentuk kisaran $\sum_{n=0}^{\infty} -t^n$ yang konvergen ke jumlah $\frac{1}{(1+t)}$ dengan $|t| < 1$

2. Cara memperoleh solusi $y(t)$ adalah dengan mencari relasi rekursif dari

$y_0(t) \quad = S^{-1}\{\, \alpha_0 + \alpha_1 u \quad \}$

$y_{i+1}(t) = S^{-1}\left\{ -u^2 S\left\{ b_1(t) \frac{dy_i}{dt} \right\} \quad - u^2 S\{b_0(t) y_i\} - u^2 S\{A_i\} \quad \right\}$

$i = 0,1,2, \ldots$

$y(t) = y_0(t) + y_{i+1}(t)$

$= \sum_{n=o}^{\infty} y_n(t)$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk penelitian selanjutnya pada persamaan diferensial yang lain, seperti dengan orde yang lebih tinggi atau pun pada persamaan diferensial parsial.

DAFTAR PUSTAKA

Birkhoff, G. and Rota. 1978. *Ordinary Diferential Equation*, 3rdEdition. John Wiley & Sons, Inc., USA.

Dafik. 1999. *Persamaan Diferensial Biasa :Masalah Nilai Awal dan Batas*. Universitas Jember, Jawa Timur.

Kartono. 2000. *Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Kumar, devendra, dkk. 2012. *Sumudu Decomposition Method for Nonlinear Equations*. International Mathematical Forum, 7(11): 516-520, (Online), dalam HIKARI Ltd (http://www.m-hikari.com/imf/imf-2012/9-12-2012/kumardIMF9-12-2012.pdf), diakses tanggal 22 November 2015.

Munzir, M. 2009. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu,Yogyakarta.

Purcell, J Edwin. and Varberg. 2011. *Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid 2*. Erlangga, Jakarta.

Setianingrum, D dan Tjang DC. 2013. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear Dengan Metode Dekomposisi Sumudu*. (http://jurnal-online.um.ac.id/data/artikel/artikel76D27118863F98983bd831B0A9DAE942.pdf) diakses tanggal 15 November 2015.

Shepley L.Ross. 1984. *Differential Equation*. JohnWiley & Sons, Inc., New York.

Widiya, Deswita L, dan Endang. 2013. *Modifikasi Metode Dekomposisi Adomian UntukMenyelesaikan Persamaan Gelombang Nonlinear*. (http://download.portalgaruda.php.val%20modifikasi%20dekomposisi%20adomian%20untuk%20menyelesaikan%20persamaan%20gelombang%20nonlinear), diakses tanggal 17 November 2015.