KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL BETA BINOMIAL

(Skripsi)

Oleh

DWI MAYASARI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRACT

CHARACTERISTICS EMPIRICAL BAYES ESTIMATOR IN SMALL AREA ESTIMATION FOR BETA BINOMIAL MODEL

By

DWI MAYASARI

Empirical Bayes (EB) method is one of method in small area estimation for count or binary data. Estimation with EB method based on posterior which its parameter be estimated by data. *Maximum likelihood estimation* (MLE) can be used to estimate parameter of posterior. Beta Binomial model is model that can be used for binary data. This research review characteristics of EB estimator in small area estimation and Mean Squared Error EB estimator in theory and empirical though simulation. From the result of this research, we know that EB estimator is biased. Based on simulation provided that if amount of area gets greater, than the value of bias gets smaller, and then the value of MSE is almost same.

Keyword: Small Area Estimation, Empirical Bayes (EB), Beta Binomial Model, Maximum Likelihood Estimation (MLE).

ABSTRAK

KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL BETA BINOMIAL

Oleh

DWI MAYASARI

Metode *Empirical Bayes* (EB) merupakan salah satu metode pada pendugaan area kecil untuk data cacah atau biner. Pendugaan dengan pendekatan EB didasarkan pada sebaran posterior yang parameternya diduga dari data. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter pada distribusi posterior yaitu *maximum likelihood estimation* (MLE). Model Beta Binomial merupakan salah satu model yang dapat digunakan pada respon biner. Penelitian ini mengkaji karakteristik penduga EB dan Mean Squared Error penduga EB baik secara teori maupun empiris melalui kajian simulasi. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa penduga EB bersifat bias. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa jika jumlah area semakin besar maka nilai biasnya semakin kecil, sedangkan nilai MSEnya menghasilkan nilai yang tidak jauh berbeda (hampir sama).

Kata kunci: Pendugaan Area Kecil, *Empirical Bayes* (EB), Model Beta Binomial, *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL BETA BINOMIAL

Oleh

DWI MAYASARI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL BETA BINOMIAL**

Nama Mahasiswa : Dwi Mayasari

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031021

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP 19800502 200501 2 003

Drs. Eri Setiawan, M.Si.
NIP 19581101 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Widiarti, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Drs. Eri Setiawan, M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **28 April 2016**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Karakteristik Penduga *Empirical Bayes* Pada Pendugaan Area Kecil Dengan Model Beta Binomial"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, April 2016
Yang menyatakan

Dwi Mayasari
NPM. 1217031021

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 05 Mei 1994, sebagai anak kedua dari dua bersaudara, dari Bapak Taswin dan Ibu Nani Nursanti.

Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) Ismariah diselesaikan tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 1 Rajabasa Raya pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMPN 2 Bandar Lampung pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMAN 2 Bandar Lampung pada tahun 2012.

Tahun 2012, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa penulis pernah menjadi asisten praktikum Matematika Komputasi, Metode Statistika dan Statistika Industri serta menjadi asisten responsi Statistika Dasar dan Pengantar Teori Peluang. Penulis juga aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila periode 2013/2014 sebagai anggota bidang eksternal dan pada periode 2014/2015 sebagai sekretaris bidang eksternal. Pada tahun 2015, penulis melakukan Kerja Praktek di Bandara Radin Inten II Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Syukur Alhamdulillah atas Rahmat Allah SWT

Skripsi ini saya persembahkan kepada :

Kedua Orang Tua Tercinta Ayahanda Taswin dan Ibunda Nani Nursanti
Orang tua yang telah membesarkan saya dan merawat saya hingga saat ini, telah mendidik, memberikan ilmu agama dan dunia, memberikan dukungan materil maupun moril selama menempuh pendidikan hingga sampai sekarang. Terima kasih atas semua doa dan harapan yang besar pada saya, dan terimkasih telah menjadi pembimbing hidup yang terbaik sampai saat ini.

Kakak Gita Wulandari dan Ahmad Sidik
Saudara yang selalu memberikan semangat serta dukungan moril maupun materil. Terima kasih atas semua doa dan dukungannya.

Teman dan Sahabat Tersayang
Teman dan sahabat yang selalu memberikan warna dalam hari-hari saya, canda tawa, suka, duka, dan bahagia yang diberikan selama ini. Terima kasih atas dukungan, saran, semangat, bantuan, bahkan kritikan yang membangun.

Alamamaterku Tercinta
Universitas Lampung

SANWANCANA

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi umat manusia.

Skirpsi dengan judul “Karakteristik Penduga *Empirical Bayes* Pada Pendugaan Area Kecil Dengan Model Beta Binomial” adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains di Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih:

1. Papa, Mama, Yunda, Kak Sidik dan Keenan atas do’a, nasehat, dukungan, kepercayaan dan semangatnya selama ini.
2. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
3. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku dosen pembimbing pembantu yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku penguji atas saran dan kritik yang diberikan bagi skripsi ini.

5. Bapak Drs. Rudi Ruswandi,M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Lampung.
7. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Sahabat sejak SMA Almira, Devina Octarrum, Firstiana Putri K, M. Ferly Herdiansyah, Ramadewi Fitrianti, yang selalu memberikan canda tawa dan semangat sampai saat ini.
9. Sahabat matematika 2012 atas bantuan, semangat dan rasa kekeluargaan yang telah diberikan.
10. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan namanya satu persatu, terimakasih untuk semangat dan bantuan yang telah diberikan.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa skripsi ini ketidaksempurnaan skripsi ini, dan penulis berharap penelitian ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca. Amiin.

Bandar Lampung,   2016
Penulis

Dwi Mayasari

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar | Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Metode *Empirical Bayes* (EB) merupakan salah satu metode pada pendugaan area kecil. Pendugaan area kecil merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukuran contohnya kecil. Menurut Rao (2003), metode EB cocok digunakan dalam menangani data biner dan data cacahan pada pendugaan area kecil. Beberapa penelitian terkait penerapan metode EB pada pendugaan area kecil antara lain dilakukan oleh Lohr dan Rao (2009) yang menggunakan pendekatan EB dalam menduga *mean squared error* dan Kismiantini (2007) menggunakan pendekatan EB untuk menduga resiko relatif penyakit demam berdarah di Kota Bekasi.

Pendugaan dan inferensi pada pendekatan EB didasarkan pada sebaran posterior yang parameternya diduga dari data. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter pada distribusi posterior yaitu *maximum likelihood estimation* (MLE). MLE dapat digunakan untuk menduga parameter jika distribusi dari populasinya diketahui.

Dalam pendugaan area kecil umumnya digunakan model dua tahap dimana konsep pendugaannya memanfaatkan informasi tambahan yang dikenal sebagai distribusi prior. Dengan demikian diperlukan distribusi prior yang mengakomodir informasi tambahan ini. Salah satu distribusi yang bisa digunakan untuk respon biner atau cacah pada pendugaan area kecil adalah distribusi Binomial. Pada penelitian ini dipilih distribusi Beta sebagai distribusi prior sehingga model pendugaan area kecil yang digunakan yaitu model Beta-Binomial.

Kebaikan suatu penduga dapat dievaluasi melalui sifat tak bias dan varian minimum. Pada kenyataannya, penduga Bayes biasanya bersifat bias (Bolstad, 2007). Sehingga dalam penelitian ini kualitas penduga EB yang diperoleh akan dievaluasi melalui kriteria *Mean Square Error* (MSE).

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Menentukan penduga EB pada pendugaan area kecil untuk model Beta Binomial
2. Mengkaji karakteristik penduga EB dan mengevaluasi MSE penduga EB baik secara teori maupun empiris melalui kajian simulasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah memberikan informasi tentang karakteristik penduga *Empirical Bayes* pada pendugaan area kecil dengan model Beta Binomial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pendugaan area kecil merupakan metode estimasi tidak langsung yang mengkombinasikan antara data survei dengan data pendukung lain misalnya dari data sensus sebelumnya yang memuat variabel dengan karakteristik yang sama dengan data survei sehingga dapat digunakan untuk menduga area yang lebih kecil dan memberikan tingkat akurasi yang lebih baik. Model area kecil dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu:

1. Pendugaan Area Kecil Berbasis Area

Pada model pendugaan area kecil berbasis area, data pendukung yang tersedia hanya sampai level area. Model level area menghubungkan penduga langsung pendugaan area kecil dengan data pendukung dari domain lain untuk setiap area.

2. Pendugaan Area Kecil Berbasis Unit

Pada model pendugaan area kecil berbasis unit diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit $x_{ij}^T = (x_{ij1}, x_{ij2}, \ldots, x_{ijp})^T$ tersedia untuk setiap elemen ke-j pada area ke-i namun kadang cukup dengan rata-rata populasi $\bar{x}ij$ diketahui saja.

2.2 Model Beta Binomial

Model dasar yang digunakan dalam penelitian ini adalah model berbasis area dua level. Model dua level tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$y_i = p_i + \varepsilon_i$

Dengan:

y_i= penduga langsung area ke-i

ε_i= pengaruh acak di dalam area

p_i = Parameter yang ingin diduga

Dimana::

Level 1: $y_i | p_i \sim$ Binomial (n_i, p_i)

Level 2: $p_i \sim$ Beta (α,β), i= 1,2,3,...,m

Dengan y_i menyatakan banyaknya pengamatan suatu kasus pada area ke-i, n_i adalah banyaknya ulangan keberhasilan suatu kasus pada area ke-i, p_i adalah peluang keberhasilan suatu kasus pada area ke-i yang tidak diketahui dan m menyatakan jumlah area, sedangkan α dan β merupakan parameter yang belum diketahui. Level pertama diasumsikan bahwa $y_i \sim$ Binomial (n_i, p_i) dan level kedua diasumsikan bahwa $p_i \sim$ Beta (α,β).

2.3 Metode *Empirical Bayes*

Dasar pengembangan pendekatan statistik Bayes adalah hukum Bayes yang dibuat oleh Thomas Bayes. Hukum ini diperkenalkan oleh Richard Price tahun 1763 dua tahun setelah wafatnya Thomas Bayes. Pada tahun 1774 dan 1781, Laplace memberikan analisis lebih rinci dan lebih relevan untuk statistik Bayes sekarang

(Gill, 2002). Model Bayes sederhana yaitu misalkan kemungkinan $Y|\theta \sim f(y|\theta)$ dan prior $\theta \sim \pi(\theta)$, Y atau θ dapat berupa vektor dan π diasumsikan diketahui, maka sebaran posterior dari θ adalah:

$p(\theta|y)=\frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{m(Y)}$, dengan $m(y)=\int f(y|\theta)\pi(\theta)d\theta$.

Pendugaan dan inferensi pada pendekatan EB didasarkan pada sebaran posterior yang parameternya diduga dari data. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Untuk menentukan *maximum likelihood estimator* dari $\hat{\theta}$ sebagai berikut:

1. Tentukan fungsi likelihood.

   $L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)=\prod_{i=1}^{n} f(xi;\theta)$.

2. Bentuk log *likelihood* l= log $L(\hat{\theta})$.

3. Tentukan turunan dari l= log $L(\hat{\theta})$ terhadap $\hat{\theta}$.

   $\frac{\partial L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}=0$

Penyelesaian dari persamaan poin 3 merupakan *maximum likelihood estimator* untuk θ.

4. Tentukan turunan kedua dari l= log $L(\hat{\theta})$ terhadap $\hat{\theta}$. Jika $\frac{\partial 2L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta} 2}<0$, maka

akan membuktikan bahwa $\hat{\theta}$ benar-benar memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\hat{\theta})$. (Bain dan Engelhardt, 1992).

2.4 Metode Iterasi *Newton Raphson*

Apabila dalam proses estimasi parameter didapat persamaan akhir yang non linear maka tidak mudah memperoleh estimasi parameter tersebut, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memecahkan persamaan non linear tersebut. Salah satu metode yang sangat populer digunakan untuk memecahkan sistem persamaan non linear adalah metode *Newton Raphson*. Metode *Newton Raphson* adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linear secara iteratif seperti persamaan *likelihood* yang mencari lokasi yang memaksimalkan suatu fungsi.

Dasar dari metode ini adalah pendekatan deret taylor linear:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!} \frac{\partial^p f(x^0)}{\partial (x^0)^i} (x - x^0)^i$$

Perluasan dari bentuk orde 1:

$\frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta}$=0

Diperoleh:

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = f(\theta^0) + H^0(\theta - \theta^0)$$

$$= G^0 + H^0(\theta - \theta^0)$$

Jika θ^0 merupakan nilai awal (inisialisasi) dari θ atau θ^0 merupakan nilai ke-1 dari θ, maka dapat dimisalkan $\theta^0=\theta^t$ dan $\theta=\theta^{t+1}$ dengan t awal=0. Begitu pula dengan G dan H. Maka diperoleh iterasi sebagai berikut:

$$\theta^{t+1} = \theta^t - (H^t)^{-1} G^t$$

dengan indeks t menyatakan ukuran iterasi.

Adapun langkah-langkah metode iterasi *Newton Raphson* adalah sebagai berikut:

1. Ambil estimasi awal dari θ, misal θ^0
2. $\hat{\theta}^1 = \theta^0 - \frac{G(\hat{\theta}^0)}{H(\hat{\ }^0)}$, $G(\hat{\theta}^0)$ merupakan derivative pertama dari f(θ) pada $\theta=\theta^t$
3. $\hat{\theta}^{t+1} = \hat{\theta}^t - \frac{G(\hat{\theta}^t)}{H(\hat{\theta}^t)}$, misal $H(\hat{\theta}^t) = H^t$dan $G(\hat{\theta}^0) = G^t$, maka:

$$\hat{\theta}^{t+1} = \hat{\theta}^{t} - (H^{t})^{-1}G^{t}$$

4. Estimator $\hat{\theta}^{t}$ diiteratif sampai diperoleh jarak antara $\hat{\theta}^{t+1}$ dengan $\hat{\theta}^{t}$ nilainya sangat kecil atau $\hat{\theta}^{t+1} - \hat{\theta}^{t} \approx \varepsilon$

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sitem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal θ_1, θ_2,....,θ_p maka iterasinya sebagai berikut:

$$\hat{\theta}^{t+1} = \hat{\theta}^{t} - (H^{t})^{-1}G^{t}$$

Dimana $\hat{\theta}^{t+1}$ dan $\hat{\theta}^{t}$ dalam bentuk vektor yaitu

$$\hat{\theta}^{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{t+1} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p^{t+1} \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{\theta}^{t} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{t} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p^{t} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_p^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_p^2} \end{bmatrix} \text{ dan } G = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

(Seber dan Wild, 2003)

2.5 Karakteristik Penduga Parameter

Estimator yang baik adalah yang memenuhi sifat tertentu, diantaranya sifat tak bias dan varian minimum.

2.5.1 Ketakbiasan

Sifat penduga yang baik salah satunya adalah sifat takbias. Suatu penduga dikatakan takbias apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi, adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.5 (Takbias)

Misalkan Y_1, Y_2, Y_3 merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y;\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui.

Penduga $\hat{\theta} = [h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$dikatakan takbias bagi θ, jika $E(\hat{\theta}) = \theta$.

(Larsen dan Marx, 2012).

2.5.2 Varian Minimum

Selain sifat ketakbiasan, penduga parameter dikatakan baik apabila memenuhi sifat penduga ragam minimum. Adapun definisi ragam minimum suatu penduga sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Ragam Minimum)

Bila U(X) merupakan penduga bagi g(θ), maka U_1(X) dikatakan sebagai penduga beragam terkecil, jika

$$\sigma^2_{u1(x)} \leq \sigma^2_{U(X)}$$

Dimana U(X) merupakan sembarang penduga bagi g(θ).

(Hogg dan Craig, 1995).

Untuk estimator tak bias, nilai varian U(X) akan sama dengan MSE U(X) tetapi pada pendugaan *Empirical Bayes* penduga yang dihasilkan bersifat bias sehingga performa dari penduga dievaluasi melalui MSE.

Jika $\hat{p}_i^{EB}$ merupakan sebuah estimator untuk p, maka MSE tidak bersyarat dari $\hat{p}_i^{EB}$ adalah:

$$MSE(\hat{p}_i^{EB}) = MSE(\hat{p}_i^{B}) + E(\hat{p}_i^{EB} - \hat{p}_i^{B})^2$$

Dimana

$MSE(\hat{p}_i^B) = E\{var(p|y)\}$

(Lohr dan Rao, 2009).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2015/2016, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Lampung.

3.2. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menetapkan model dua tahap distribusi Beta Binomial

   Level 1: $y_i | p_i \sim$ Binomial (n_i, p_i)

   Level 2: $p_i \sim$ Beta (α, β)

   Model dua level ini dapat ditulis sebagai model linear campuran:

   $Y_i = p_i + e_i$

2. Menentukan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dari model linear campuran di atas.
3. Menduga parameter distribusi Binomial dengan menggunakan pendugaan EB.
4. Menduga parameter dari penduga EB dengan menggunakan MLE.
5. Jika dugaan parameter penduga EB tidak dapat diselesaikan secara analitik maka menggunakan Metode Iterasi *Newton Raphson.*

6. Mengevaluasi nilai harapan dan MSE penduga EB.

Langkah-langkah dalam mengevaluasi nilai harapan dan MSE dengan menggunakan simulasi:

1. Menentukan jumlah area yang berbeda-beda yaitu 10, 50 dan 100 sebagai representasi jumlah area yang berukuran kecil, sedang dan besar.
2. Membangkitkan theta berdistribusi Beta.
3. Membangkitkan data berdistribusi Binomial dengan theta berdistribusi Beta sesuai dengan jumlah area yang sudah ditentukan.
4. Menentukan ε yaitu 0,0001.
5. Melakukan iterasi untuk mendapatkan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ dengan ulangan 100 kali dan kriteria berhenti untuk *Newton Raphson* adalah saat iterasi mencapai 1000. dengan sebelumnya menentukan parameter awal α dan β.
6. Menghitung nilai bias dan MSE.

V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Penduga EB pada pendugaan area kecil model Beta Binomial adalah:

   $$\hat{p}_{EB} = \frac{y+\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}+n+\hat{\beta}}$$

2. Penduga EB pada pendugaan area kecil model Beta Binomial bersifat bias dengan MSE tidak bersyaratnya adalah:

   $$MSE(\hat{p}_i^{EB}) = AB + CD$$

   Dimana:

   $$A = \frac{\alpha}{(\alpha+n+\beta+1)(\alpha+n+\beta)^2}$$

   $$B = \left(\frac{n(n-1)\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} + \frac{n(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta} + n + \beta\right)$$

   $$C = \frac{\alpha}{(\alpha+n+\beta)^2(\alpha+\beta)}$$

   $$D = \left(\frac{(n-1)\big(n(\alpha+1)\big)}{(\alpha+\beta+1)} + n - \frac{n^2\alpha}{(\alpha+\beta)}\right)$$

   Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa jika jumlah area semakin besar maka nilai biasnya semakin kecil, sedangkan nilai MSEnya menghasilkan nilai yang tidak jauh berbeda (hampir sama).

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J. dan Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics,* Second Edition. Duxbury Press, California.

Berger,C., 1990. *Statistical Inference*. Pasific Grove, New York

Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. A John Wiley & Sons. Inc; America

Giil, J. 2002. *Bayesian Methods: A social and Behavioral Sciences Approach*. Chapman and Hall, Boca Raton.

Hogg, R.V., dan Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics,* Fifth Edition. Pretice-Hall, Inc., New Jersey.

Kismiantini. 2007. Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma. Tesis. Institut Pertanian Bogor, Bogor.

Larsen, Richard.J dan Marx, M.L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Appications,* Fifth Edition. Pearson Education Inc., United States of America.

Lohr, S.L. dan Rao. 2009. Jackknife Estimation of Mean Squared Error of Small Area Predictors in Nonlinear Mixed Models. *Journal of Biometrika*. **96**, 457-468.

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation.* John Willey and Sons, New York.

Seber, G.A.F. dan Wild, C.J. 2003. *Non Linear Regression.* Departement of Statistics University Auckland, New Zealand.